CONDICIONES DE EXISTENCIA PARA SOLUCIONES DISCRETAS A UN PROBLEMA MULTIDIMENSIONAL DE STEFAN

Domingo A. Tarzia

PROMAR (CONICET-UNR),

Instituto de Matemática "Beppo Levi",

Facultad de Ciencias Exactas, Ing. y Agr., Univ. Nac. de Rosario,

Avda. Pellegrini 250,

(2000) Rosario , Argentina.

RESUMEN

Se considera un material conductor de calor que ocupa un dominio poligonal $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con una frontera regular $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con $|\Gamma_1| > 0$ y $|\Gamma_2| > 0$. Se asume, sin pérdida de generalidad, que la temperatura de cambio de fase es 0°C. Se considera en Ω el problema estacionario de conducción del calor siguiente:

$$\Delta u = 0 \text{ en } \Omega \,, \quad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha\,(u - B) \,, \quad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \,,$$

donde α, q, B = Const. > 0. En un trabajo previo (Tabacman – Tarzia, J. Diff. Eq., 77(1989), 16-37) se estudian condiciones suficientes y/o necesarias para los datos α, q, B, Γ_1, Γ_2 para que el problema represente el caso estacionario de un problema multidimensional de Stefan a dos fases, es decir que la temperatura u sea de signo no-constante en Ω.

Se considera una triangulación del dominio Ω con triángulos tipo Lagrange de tipo 1, siendo $h > 0$ el parámetro de la discretización. Se obtienen condiciones suficientes (y/o necesarias) para los datos α, q, B, Γ_1, Γ_2 en función del parámetro h con el objeto de tener un cambio de fase en el dominio discretizado correspondiente (problema estacionario discreto de Stefan a dos fases), es decir una temperatura discreta u_h de signo no-constante en Ω. [El análisis numérico correspondiente al caso $\alpha = +\infty$ fue realizado en Tarzia, ENIEF'89, Mecánica Computacional, 9(1989), 517-533.]

ABSTRACT

We consider a material $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ which occupies a convex polygonal bounded domain, with regular boundary $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ with $\text{meas}(\Gamma_1) = |\Gamma_1| > 0$ and $|\Gamma_2| > 0$. We assume, without loss of generality, that the melting temperature is 0°C. We consider the following steady-state heat

conduction problem in Ω:

$$\Delta u = 0 \text{ en } \Omega , \quad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha\,(u - B) \;, \quad -\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \;,$$

where α, q, B = Const. > 0. In a previous paper (Tabacman–Tarzia, J. Diff. Eq., 77(1989), 16-37) we study sufficient and/or necessary conditions on data α, q, B, Γ_1, Γ_2 to obtain a multidimensional steady-state two-phase Stefan problem, i.e. the temperature u is of non-constant sign in Ω.

We consider a regular triangulation of the domain Ω with Lagrange triangles of the type 1, being h > 0 the parameter of the discretization. We obtain sufficient (and/or necessary) conditions on data α, q, B, Γ_1, Γ_2, as a function of the parameter h, to have a change of phase into the corresponding discretized domain (steady-state two-phase discretised Stefan problem), that is a discrete temperature u_h of non-constant sign in Ω. [The numerical analysis corresponding to the case $\alpha = +\infty$ was realized in Tarzia, ENIEF'89, Mecánica Computacional, 9(1989), 517-533.]

I. INTRODUCCIÓN.

Se considera un material Ω, dominio poligonal, convexo y acotado de R^n (n=1, 2, 3 para las aplicaciones), con una frontera $\Gamma = \partial\Omega$ regular, sobre el cual se estudiará un problema estacionario de conducción de calor con cambio de fase [Du,Ta1] y su correspondiente análisis numérico. Se supone que la temperatura del cambio de fase es 0°C y que Γ está compuesta de dos porciones Γ_1 y Γ_2, ambas con medida superficial positiva. El estudio que se realizará no sufrirá ningún cambio si se supone además que Γ contiene una porción de frontera Γ_3 impermeable al calor.

El problema consiste en estudiar el siguiente problema [Ta1]:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ &-\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = \alpha\,(u - B) \text{ sobre } \Gamma_1 \;, \\ &-\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = q \text{ sobre } \Gamma_2 \;, \end{aligned} \tag{1}$$

cuya formulación variacional está dada por [KiSt, Ta2]

$$a_\alpha(u,v) = L_{\alpha q B}(v) \qquad ,\forall\, v \in V,\ u \in V \tag{2}$$

donde

$$V = H^1(\Omega)\,, \qquad V_0 = \{\, v \in V \,/\, v|_{\Gamma_1} = 0 \,\},$$

$$a_\alpha(u,v) = a(u,v) + \alpha \int_{\Gamma_1} u\, v\, d\gamma\,, \qquad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \,.\, \nabla v\, dx, \tag{3}$$

$$L_{\alpha q B} = L_q(v) + \alpha\, B \int_{\Gamma_1} v\, d\gamma\,, \qquad L_q(v) = -\,q \int_{\Gamma_2} v\, d\gamma\,.$$

El problema (2) es equivalente al siguiente problema de mínimo

$$G(u) \leq G(v), \qquad \forall\, v \in V, \qquad u \in V\ , \tag{4}$$

donde

$$G(v) = \tfrac{1}{2}\, a_\alpha(v,v) - L_{\alpha q B}(v)\,. \tag{5}$$

La única solución $u = u(\alpha) = u(\alpha,q,B)$ del problema (2) está dada por

$$u(\alpha,q,B) = B - q\, U(\alpha) \quad \text{en } \Omega\ , \tag{6}$$

donde $U = U(\alpha)$ es la única solución de la ecuación variacional [KiS4,Ta2]

$$a_\alpha(U(\alpha),v) = \int_{\Gamma_2} v\, d\gamma, \quad \forall\, v \in V, \quad U(\alpha) \in V\,. \tag{7}$$

Se asumen hipótesis de regularidad para que $U(\alpha) \in C^0(\bar{\Omega})$ (En [Ta3] se muestran tres ejemplos que satifacen esta condición).

En [TaTa,Ta3,Ta4] se obtuvo el siguiente resultado :

TEOREMA 1. (i) Si $(\alpha,q) \in S^2(B)$ entonces se obtiene un caso estacionario de un problema de Stefan a dos fases, donde

$$S^2(B) = \{\ (\alpha,q) \in (R^+)^2\ /\ q_m(\alpha,B) < q < q_M(\alpha,B)\ \}, \tag{8}$$

$$q_m(\alpha,B) = \frac{B\,|\,\Gamma_2\,|}{A(\alpha)}\ , \qquad q_M(\alpha,B) = \frac{B\,\alpha\,|\,\Gamma_1\,|}{|\,\Gamma_2\,|}\ , \tag{9}$$

con $A = A(\alpha)$ una función estrictamente decreciente en α que verifica las siguientes propiedades :

$$\begin{gathered} A(\alpha) > \frac{|\,\Gamma_2\,|^2}{|\,\Gamma_1\,|}\,\frac{1}{\alpha} \qquad ,\ \lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = C > 0\ , \\ \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha\, A'(\alpha) = 0 \qquad ,\ (\alpha\, A(\alpha)\,)' = \frac{1}{q^2}\, a(u_{\alpha q B}\,, u_{\alpha q B})\ , \\ A(\alpha) = \int_{\Gamma_2} U(\alpha)\, d\gamma = a_\alpha(U(\alpha)\,,\, U(\alpha))\,. \end{gathered} \tag{10}$$

Por otra parte, la constante $C > 0$ viene dada por

$$C = \int_{\Gamma_2} u_3\, d\gamma = a(u_3,\, u_3) > 0\ , \tag{11}$$

donde u_2 es la única solución de la ecuación variacional

$$a(u_2,v) = \int_{\Gamma_2} v\, d\gamma \qquad , \forall\, v \in V_0 \;, u_2 \in V_0 \,. \tag{12}$$

(ii) Si se tiene el caso particular continuo en el cual $u(\alpha,q,B)$ verifica la condición

$$\frac{1}{q^2}\, a(u(\alpha,q,B),\, u(\alpha,q,B)) = \text{Const.}\ (= C > 0) \tag{13}$$

entonces se deduce

$$A(\alpha) = C + \frac{|\Gamma_2|^2}{|\Gamma_1|}\,\frac{1}{\alpha}\;. \tag{14}$$

Sea τ_h una triangulación regular de Ω, donde $h > 0$ es un parámetro destinado a tender a cero, formada por elementos finitos afín-equivalentes de clase C^0. Se toma h igual a la longitud del lado más grande de los triángulos $T \in \tau_h$ y se aproxima V por [Ci] :

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\bar\Omega) \,/\, v_h\,|_T \in P_1(T)\,,\ \forall T \in \tau_h \right\} \subset V\,, \tag{15}$$

donde P_1 es el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 1. Sea π_h el operador de interpolación lineal correspondiente.

Se considera el siguiente problema aproximado, en dimensión finita, del problema continuo (2):

$$a_\alpha(u_h, v_h) = L_{\alpha q B}(v_h) \quad , \forall\, v_h \in V_h \,, u_h = u_h(\alpha,q,B) \in V_h \;, \tag{16}$$

obteniéndose los siguientes resultados:

TEOREMA 2. (i) Existe una única solución $u_h(\alpha,q,B) \in V_h$ del problema discreto (16). Además, $u_h(\alpha,q,B)$ viene dada por

$$u_h(\alpha,q,B) = B - q\, U_h(\alpha)\,, \tag{17}$$

donde $U_h(\alpha)$ es la única solución de la ecuación variacional siguiente

$$a_h(U_h(\alpha),v_h) = \int_{\Gamma_2} v_h\, d\gamma \qquad , \forall\, v_h \in V_h \,, U_h(\alpha) \in V_h \;. \tag{18}$$

(ii) La función $U_h(\alpha)$ verifica las siguientes propiedades:

$$\int_{\Gamma_1} U_h(\alpha)\, d\gamma = \frac{|\Gamma_2|}{\alpha} \qquad , U_h(\alpha) > 0 \text{ en } \Omega . \tag{19}$$

(iii) La función $u_h(\alpha,q,B)$ verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} & u_h(\alpha,q,B) \leq B \text{ en } \bar{\Omega} \qquad , u_h(\alpha,q,B) \leq u_h(q,B) \text{ en } \bar{\Omega} \; , \\ & u_h(\alpha,q,B) \to u_h(q,B) \text{ en V fuerte cuando } \alpha \to +\infty \, , \\ & \operatorname*{Min}_{\Gamma_2} u_h(\alpha,q,B) \leq u_h(\alpha,q,B) \leq \operatorname*{Max}_{\Gamma_1} u_h(\alpha,q,B) \text{ en } \bar{\Omega} \, , \end{aligned} \tag{20}$$

donde $u_h(q,B) = B - q\, u_{3h}$, siendo u_{3h} la única solución de la ecuación variacional discreta siguiente

$$a(u_{3h},v_h) = \int_{\Gamma_2} v_h \, d\gamma \;, \quad \forall\, v_h \in V_{oh} \,, \quad u_3 \in V_{oh} \quad , \tag{21}$$

con

$$V_{oh} = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}) \,/\, v_h \mid_T \in P_1(T) \,, \forall T \in \tau_h \,, v_h \mid_{\Gamma_1} = 0 \right\} \subset V_o \,. \tag{22}$$

(iv) Se tiene la relación

$$a(u_h(\alpha,q,B),u_h(q,B)) = a(u_h(q,B),u_h(q,B)) \quad . \tag{23}$$

(v) Se tiene la siguiente propiedad de monotonía

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \,, \, q_2 \leq q_1 \Rightarrow u_h(\alpha_1,q_1,B) \leq u_h(\alpha_2,q_2,B) \text{ en } \bar{\Omega}, \; \forall\, B > 0 \,. \tag{24}$$

Demostración. Se utilizan las ecuaciones variacionales discretas (16), (18) y (21), siguiendo una metodología análoga a la desarrollada para el caso continuo [Ta1].

Sean las siguientes funciones

$$A_h(\alpha) = \int_{\Gamma_2} U_h(\alpha)\, d\gamma = a_h(U_h(\alpha),U_h(\alpha)) > 0 \qquad , \forall\, \alpha > 0, \tag{25}$$

$$qm_h(\alpha,q) = \frac{B\, |\Gamma_2|}{A_h(\alpha)} \,. \tag{26}$$

A continuación, siguiendo con la metodología desarrollada en [Ta5], se obtienen condiciones suficientes (y/o necesarias) para que la solución discreta $u_h(\alpha,q,B)$ sea de signo no-constante en Ω. Se realizarán estimaciones de $A_h(\alpha) - A(\alpha)$ y de $q_{m_h}(\alpha,B) - q_m(\alpha,B)$, en función del parámetro h. Se analizará también el caso particular discreto correspondiente al caso particular continuo (13).

II. CONDICIONES PARA LA EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DISCRETA DE SIGNO NO-CONSTANTE.

Para cada $q > 0$, $\alpha > 0$, $B > 0$, se consideran las funciones $u(\alpha,q,B) \in V$ y $u_h(\alpha,q,B) \in V_h$ como las únicas soluciones de las ecuaciones variacionales (2) (problema continuo) y (16) (problema discreto).

LEMA 3. Se tienen las siguientes propiedades:

(i) La función $A_h(\alpha)$ está dada igualmente por la expresión:

$$A_h(\alpha) = a_\alpha(U(\alpha), U_h(\alpha)). \tag{27}$$

(ii) Se tiene

$$A(\alpha) - A_h(\alpha) = a_\alpha(U_h(\alpha) - U(\alpha), U_h(\alpha) - U(\alpha)) \geq 0 . \tag{28}$$

(iii) Las funciones q_m y q_{m_h} están relacionadas a través de la siguiente desigualdad

$$q_m(\alpha,B) \leq q_{m_h}(\alpha,B) . \tag{29}$$

(iv) Se tienen las siguientes expresiones integrales:

$$\int_{\Gamma_1} u_h(\alpha,q,B)\, d\gamma = \frac{|\Gamma_2|}{\alpha}\,[q_M(\alpha,B) - q] \qquad , \forall\, h > 0, \tag{30}$$

$$\int_{\Gamma_2} u_h(\alpha,q,B)\, d\gamma = A_h(\alpha)\,[q_{m_h}(\alpha,B) - q] \qquad , \forall\, h > 0. \tag{31}$$

Demostración. (i) Surge de las ecuaciones variacionales que definen a $U(\alpha) \in V$ y $U_h(\alpha) \in V_h \subset V$.

(ii) Se tiene

$$0 \leq a_\alpha(U_h(\alpha) - U(\alpha), U_h(\alpha) - U(\alpha)) = a_\alpha(U_h(\alpha), U_h(\alpha)) + a_\alpha(U(\alpha),U(\alpha)) -$$

$$- 2\, a_\alpha(U_h(\alpha), U(\alpha)) = A_h(\alpha) + A(\alpha) - 2\, A_h(\alpha) = A(\alpha) - A_h(\alpha) .$$

(iii) (29) surge inmediatamente del hecho $A(\alpha) \geq A_h(\alpha)$.

(iv) Las expresiones (30) y (31) se obtienen teniendo en cuenta (19) y (25) respectivamente.

OBSERVACIÓN 1. De (30) y (31) se obtienen las siguientes equivalencias:

$$\int_{\Gamma_2} u_h(\alpha,q,B)\, d\gamma < 0 \Leftrightarrow q > q_{m_h}(\alpha,B)\,, \tag{32}$$

$$\int_{\Gamma_1} u_h(\alpha,q,B)\, d\gamma > 0 \Leftrightarrow q < q_M(\alpha,B)\,. \tag{33}$$

Se define la función $g_h: (R^+)^3 \to R$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} g_h(\alpha,q,B) &= G_{\alpha q B}(u_h(\alpha,q,B)) = -\tfrac{1}{2} L_{\alpha q B}(u_h(\alpha,q,B)) = \\ &= -\tfrac{1}{2} a_\alpha(u_h(\alpha,q,B)\,, u_h(\alpha,q,B)) < 0\,. \end{aligned} \tag{34}$$

OBSERVACIÓN 2. Teniendo en cuenta (34) se deduce

$$g_h(\alpha,q,B) = -\frac{A_h(\alpha)}{2}\, q^2 + B\, q|\Gamma_2| - \frac{\alpha\, B^2}{2}\, |\Gamma_1| < 0 \qquad , \forall\ \alpha,q,B > 0\,. \tag{35}$$

COROLARIO 4. De (35) surge que

$$A_h(\alpha) > \frac{2\, B\, |\Gamma_2|}{q} - \frac{\alpha\, B^2\, |\Gamma_1|}{q^2} < 0 \qquad , \forall\ \alpha,q,B > 0 \tag{36}$$

y por ende

$$A_h(\alpha) > \frac{|\Gamma_2|^2}{\alpha\, |\Gamma_1|} \qquad , \forall\ \alpha > 0\,. \tag{37}$$

TEOREMA 5. (i) Se tienen las siguientes desigualdades

$$q_m(\alpha,B) \le q_{m_h}(\alpha,B) < q_M(\alpha,B) \qquad , \forall\ \alpha,B > 0\,, \tag{38}$$

con lo cual el conjunto

$$S_h^2(B) = \{\, (\alpha,q) \in (R^+)^2 \ /\ q_{m_h}(\alpha,B) < q < q_M(\alpha,B)\,\} \neq \emptyset. \tag{39}$$

(ii) Si $(\alpha,q) \in S_h^2(B)$, para un dado $B > 0$, entonces la función $u_h(\alpha,q,B)$ es de signo no-constante en Ω, es decir que se tiene un problema estacionario discreto de Stefan a dos fases.

Demostración. (i) La segunda desigualdad en (38) se obtiene de (37). (ii) se deduce de (32) y (33).

LEMA 6. (i) Se tienen las siguientes estimaciones:

$$u_{3h} \le U_h(\alpha) \text{ en } \bar{\Omega} \tag{40}$$

$$C_h \le A_h(\alpha)\,, \tag{41}$$

$$q_{m_h}(\alpha,B) \le q_{o_h}(B)\,, \tag{42}$$

donde

$$C_h = \int_{\Gamma_2} u_{3h}\, d\gamma \qquad , q_{o_h}(B) = \frac{B\,|\Gamma_2|}{C_h}\,. \tag{43}$$

(ii) La función $A_h = A_h(\alpha)$ es decreciente en α y verifica

$$\lim_{\alpha \to +\infty} A_h(\alpha) = C_h\,. \tag{44}$$

(iii) La función $q_{m_h} = q_{m_h}(\alpha,B)$ es creciente en α y verifica las siguientes propiedades:

$$q_{m_h}(0^+,B) = 0 \qquad , q_{m_h}(+\infty,B) = q_{o_h}(B) \qquad , \forall\, B > 0\,. \tag{45}$$

TEOREMA 7. Si $q > q_{o_h}(B)$ entonces $u_h(\alpha,q,B)$ es de signo no-constante en Ω cuando

$$\alpha > \alpha_0(q,B) = \frac{q\,|\Gamma_2|}{B\,|\Gamma_1|}\,. \tag{46}$$

Demostración. Si $q > q_{o_h}(B)$ entonces el problema estacionario discreto correspondiente para $u_h(q,B)$ (es decir, para $\alpha = +\infty$) es a dos fases [Ta5] y por ende $u_h(q,B)|_{\Gamma_2} < 0$, con lo cual $u_h(\alpha,q,B)$ resulta ser negativa sobre Γ_2.

Por otro lado, de (30) se tiene la siguiente equivalencia

$$\int_{\Gamma_1} u_h(\alpha,q,B)\; d\gamma > 0 \Leftrightarrow \alpha > \alpha_0(q,B)\,, \tag{47}$$

con lo que se completa la prueba.

TEOREMA 8. (i) La función $g_h = g_h(\alpha,q,B)$ satisface las siguientes propiedades:

$$\frac{\partial g}{\partial q}(\alpha,q,B) = \int_{\Gamma_2} u_h(\alpha,q,B)\, d\gamma\,, \tag{48}$$

$$\frac{\partial g}{\partial B}(\alpha,q,B) = -\,\alpha \int_{\Gamma_1} u_h(\alpha,q,B)\, d\gamma\,, \tag{49}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\alpha,q,B) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} [u_h^2(\alpha,q,B) - B\, u_h(\alpha,q,B)]\, d\gamma\,. \tag{50}$$

(ii) La función $A_h = A_h(\alpha)$ satisface las siguientes propiedades:

$$A_h'(\alpha) = \frac{dA_h}{d\alpha}(\alpha) = \frac{B^2|\Gamma_1|}{q^2} - \frac{2\,B\,|\Gamma_2|}{\alpha\,q} - \frac{1}{q^2}\int_{\Gamma_1} u_h^2(\alpha,q,B)\,d\gamma\,, \tag{51}$$

$$A_h'(\alpha) \geq -\frac{2\,B\,|\Gamma_2|}{\alpha\,q} \qquad , \forall\, h > 0\,, \tag{52}$$

$$\frac{d}{d\alpha}[\alpha\, A_h(\alpha)] = \frac{1}{q^2}\, a(u_h(\alpha,q,B),\, u_h(\alpha,q,B))\,, \tag{53}$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha\, A_h'(\alpha) = 0 \qquad , \forall\, h > 0\,, \tag{54}$$

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\partial q m_h}{\partial \alpha}(\alpha,B) = 0 \qquad , \forall\, B > 0\,, \tag{55}$$

Demostración. (i) Se utiliza (34) y el concepto de derivada como limite del cociente incremental. Se sigue una metodologia análoga a la desarrollada en [TaTa] para el caso continuo.
(ii) (51) surge de (35) y (50). Para obtener (52) se utiliza (20) y (51). (53) surge de (34) y (51). (54) es un corolario de (20), (52) y (53). En fin, (55) se deduce de (26) y (54).

III. UN CASO PARTICULAR DISCRETO.

Se define un caso particular discreto (CPD), analogamente al problema continuo (Ver (13)) [TaTa], como el problema en variables h, α, q, B que verifica la condición

$$\frac{1}{q^2}\, a(u_h(\alpha,q,B),\, u_h(\alpha,q,B)) = \text{Const.}. \tag{56}$$

Necesariamente la constante debe ser Const. $= C_h > 0$ tomando $\alpha \to +\infty$ en (56). Por otra parte, teniendo en cuenta (53), se tiene la equivalencia:

$$\text{(C.P.D.)} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{q^2}\, a(u_h(\alpha,q,B),u_h(\alpha,q,B)) = C_h \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{d\alpha}[\alpha\, A_h(\alpha)] = C_h\,. \tag{57}$$

Además, teniendo presente (17) y (56), se deduce

$$C_h = a(U_h(\alpha),U_h(\alpha)) = A_h(\alpha) - \alpha\int_{\Gamma_1} U_h^2(\alpha)\,d\gamma\,, \tag{58}$$

es decir

$$\text{(C.P.D.)} \;\Leftrightarrow\; A_h(\alpha) = C_h + \alpha\int_{\Gamma_1} U_h^2(\alpha)\,d\gamma)\,. \tag{59}$$

TEOREMA 9. Las siguientes proposiciones son equivalentes entre sí y al caso particular discreto:

$$u_h(q,B) - u_h(\alpha,q,B) = \frac{q}{\alpha}\frac{|\Gamma_2|}{|\Gamma_1|} \text{ en } \Omega, \tag{60}$$

$$u_h(\alpha,q,B)|_{\Gamma_1} = B - \frac{q}{\alpha}\frac{|\Gamma_2|}{|\Gamma_1|} \text{ sobre } \Gamma_1 , \tag{61}$$

$$U_h(\alpha,q,B)|_{\Gamma_1} = \frac{|\Gamma_2|}{\alpha\,|\Gamma_1|} \text{ sobre } \Gamma_1 , \tag{62}$$

$$A_h(\alpha) = C_h + \frac{|\Gamma_2|^2}{\alpha\,|\Gamma_1|} , \tag{63}$$

$$\frac{d}{d\alpha}[\alpha\, A_h(\alpha)] = C_h . \tag{64}$$

Demostración. En primer lugar se observa que si en (60) se tiene que $u_h(q,B) - u_h(\alpha,q,B) = \text{Const.}$ en Ω, entonces necesariamente la constante debería ser la dada pues se integra (60) sobre Γ_1 y se utiliza (30) y el hecho que $u_h(q,B)|_{\Gamma_1} = B$. Por este último razonamiento las implicancias (60) $\Rightarrow$ (61) y (61) $\Rightarrow$ (62) son inmediatas.

(62) $\Rightarrow$ (63). Surge de (59).

(63) $\Rightarrow$ (64). Derivando la expresión (63) se obtiene (64).

(64) $\Rightarrow$ (60). Se deduce de la siguiente equivalencia:

$$u_h(q,B) - u_h(\alpha,q,B) = \text{Const. en } \Omega \Leftrightarrow a(u_h(q,B) - u_h(\alpha,q,B), u_h(q,B) - u_h(\alpha,q,B)) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(u_h(\alpha,q,B), u_h(\alpha,q,B)) = a(u_h(q,B), u_h(q,B)) \Leftrightarrow (57).$$

Observación 3. Lo interesante del (C.P.D.) es que se ha obtenido una expresión analítica de la función $A_h(\alpha)$, dada por (63), y por ende la descripción del conjunto $S_h^2(B)$ es completa.

IV. ESTIMACIONES DEL ERROR EN FUNCION DEL PARAMETRO h.

Si se tiene en cuenta el resultado de interpolación siguiente [Ci]

$$\| v - \Pi_h v \|_V \leq C_0\, h\, |v|_{2,\Omega} , \ \forall\, v \in H^2(\Omega) , \tag{65}$$

y se supone la regularidad $U_\alpha \in H^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ (Ver en [Ta3] tres ejemplos en los cuales se tiene que la solución es C^∞) entonces se deducen los siguientes resultados de aproximación en función del parámetro de discretización h.

TEOREMA 10. (i) Se tiene

$$A(\alpha) - A_h(\alpha) = a_\alpha(U_h(\alpha) - U(\alpha), U_h(\alpha) - U(\alpha)) = \tag{66}$$

$$= \frac{1}{q^2} a_\alpha(u(\alpha,q,B) - u_h(\alpha,q,B),\ u(\alpha,q,B) - u_h(\alpha,q,B)) \geq 0.$$

(ii) Se tienen

$$a_\alpha(U(\alpha) - U_h(\alpha), U_h(\alpha)) = 0\ , \tag{67}$$

$$a_\alpha(U(\alpha) - U_h(\alpha), v_h) = 0 \qquad , \forall\ v_h \in V_h\ . \tag{68}$$

(iii) Se tiene que $U_h(\alpha) = P^\alpha_{V_h}(U(\alpha))$ es la proyección de $U(\alpha)$ sobre el sub-espacio V_h respecto a la norma asociada al producto escalar a_α , es decir

$$\|v\|_\alpha = \sqrt{a_\alpha(v,v)} \qquad , v \in V\ . \tag{69}$$

(iv) Se tiene la estimación abstracta siguiente:

$$\|U(\alpha) - U_h(\alpha)\|_V \leq M_\alpha \operatorname*{Inf}_{v_h \in V_h} \|U(\alpha) - v_h\|_V \tag{70}$$

donde

$$M_\alpha = \frac{\|a_\alpha\|}{\lambda_\alpha} \leq \frac{1 + \alpha\ \|\gamma_0\|^2}{\lambda_1\ \mathrm{Inf}(1,\alpha)}\ , \tag{71}$$

$$\lambda_\alpha = \lambda_1\ \mathrm{Inf}(1,\alpha)\ , \tag{72}$$

con $\lambda_1 > 0$ la constante de coercividad de la forma bilineal a_1 (a_1 es a_α para $\alpha=1$), es decir

$$a_1(v,v) \geq \lambda_1 \|v\|_V^2 \qquad , \forall\ v \in V, \tag{73}$$

siendo $\gamma_0 : V \to L^2(\Gamma)$ el operador traza.

(v) Se tiene la estimación abstracta siguiente:

$$0 < A(\alpha) - A_h(\alpha) \leq \operatorname*{Inf}_{v_h \in V_h} a_\alpha(v_h - U(\alpha), v_h - U(\alpha)). \tag{74}$$

(vi) Si se tiene la regularidad $U(\alpha) \in H^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, entonces se deducen las siguientes estimaciones

$$\|U(\alpha) - U_h(\alpha)\|_V \leq C_{1\alpha}\ h, \tag{75}$$

$$0 < A(\alpha) - A_h(\alpha) \leq C_{2\alpha}\ h^2, \tag{76}$$

$$0 < q_{m_h}(\alpha,B) - q_m(\alpha,B) \leq \frac{C_{2\alpha}}{A(\alpha)}\ q_{m_h}(\alpha,B)\ h^2, \tag{77}$$

donde

$$C_{1\alpha} = C_0\ M_\alpha\ |U(\alpha)|_{2,\Omega} \quad , \quad C_{2\alpha} = C_0^2\ \|a_\alpha\|\ |U(\alpha)|^2_{2,\Omega}\ . \tag{78}$$

Demostración. (i) y (ii) surgen de las definiciones de $U(\alpha)$, $U_h(\alpha)$, $A(\alpha)$ y $A_h(\alpha)$. De (68) se deduce (iii).

(iv) La forma bilineal a_α es coerciva con constante de coercividad λ_α, es decir

$$a_\alpha(v,v) \geq \lambda_\alpha \|v\|_V^2 \qquad , \forall\, v \in V. \tag{79}$$

Para $v_h \in V_h$ se tiene

$$\lambda_\alpha \|U(\alpha) - U_h(\alpha)\|_V^2 \leq a_\alpha(U(\alpha) - U_h(\alpha), U(\alpha) - U_h(\alpha)) = a_\alpha(U_\alpha - U_h(\alpha), U(\alpha)) =$$

$$= a_\alpha(U_\alpha - U_h(\alpha), U(\alpha) - v_h) \leq \|a_\alpha\| \, \|U(\alpha) - U_h(\alpha)\|_V \, \|U(\alpha) - v_h\|_V \;,$$

de donde surge (70). Por otra parte, se tiene

$$|a_\alpha(u,v)| \leq |a(u,v)| + \alpha \int_{\Gamma_1} |u|\,|v|\,d\gamma \leq \|u\|_V \|v\|_V + \alpha \|u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq$$

$$\leq (1 + \alpha \|\gamma_0\|^2) \|u\|_V \|v\|_V \,,$$

es decir (71).

(v) Se tiene

$$A(\alpha) - A_h(\alpha) = a_\alpha(U(\alpha) - U_h(\alpha), U(\alpha) - U_h(\alpha)) = \|U(\alpha) - U_h(\alpha)\|_\alpha^2 \leq$$
$$\leq \|U(\alpha) - v_h\|_\alpha^2 = a_\alpha(U(\alpha) - v_h, U(\alpha) - v_h) \qquad , \forall\, v_h \in V_h \,,$$

es decir (74).

(vi) Teniendo en cuenta el resultado de interpolación (65) y el hecho que $\Pi_h(U(\alpha)) \in V_h$, entonces de (70) y (74) se deducen (75) y (76) respectivamente. Por otra parte, se tiene

$$q_{m_h}(\alpha,B) - q_m(\alpha,B) = \frac{B\,|\Gamma_2|}{A_h(\alpha)} \frac{A(\alpha) - A_h(\alpha)}{A(\alpha)} \leq \frac{C_{2\alpha}}{A(\alpha)} q_{m_h}(\alpha,B)\,h^2 \,,$$

es decir (77).

Observación 4. Si $U(\alpha) \in V$ y no necesariamente $U(\alpha) \in H^2(\Omega)$ entonces cuando $h \to 0$ se tiene [Ci]:

$$0 < A(\alpha) - A_h(\alpha) = \|U(\alpha) - \Pi_h(U(\alpha))\|_\alpha^2 \to 0. \tag{80}$$

Se define la función

$$Z(\alpha,h) = 1 - \frac{C_{2\alpha}\,h^2}{A(\alpha)} < 1 \,, \qquad \forall\, \alpha,h > 0. \tag{81}$$

y se tiene la equivalencia siguiente ($0 < \epsilon < 1$):

$$\epsilon < Z(\alpha,h) < 1 \iff h < h_0(\epsilon,\alpha), \tag{82}$$

donde

$$h_0(\epsilon,\alpha) = \sqrt{\frac{(1-\epsilon)\,A(\alpha)}{C_{2\alpha}}} \quad , 0 < \epsilon < 1,\ \alpha > 0. \tag{83}$$

TEOREMA 11. Si $h,B > 0$ y $\epsilon \in (0,1)$ (parámetro a elección), entonces se tienen, en función del parámetro h, las siguientes estimaciones

$$q_{m_h}(\alpha,B) \le \frac{1}{\epsilon}\, q_m(\alpha,B) \quad , \forall\, h \le h_0(\epsilon,\alpha), \tag{84}$$

$$0 < q_{m_h}(\alpha,B) - q_m(\alpha,B) \le \frac{B\,|\Gamma_2|\,C_{2\alpha}}{\epsilon\,A^2(\alpha)}\, h^2 \quad , \forall\, h \le h_0(\epsilon,\alpha). \tag{85}$$

Demostración. De (77) se deduce

$$Z(\alpha,h)\; q_{m_h}(\alpha,B) \le q_m(\alpha,B) \tag{86}$$

y por ende (84), debido a la equivalencia (82). De (77) y (84) se obtiene (85).

COROLARIO 12. Se tiene

$$\lim_{h \to 0^+} q_{m_h}(\alpha,B) = q_m(\alpha,B) \quad , \forall\, \alpha,B > 0. \tag{87}$$

LEMA 13. Si los casos continuo y discreto son casos particulares entonces

$$0 < A(\alpha) - A_h(\alpha) = C - C_h \le C_0^2\ \ |u_3|^2_{2,\Omega}\ h^2\,, \tag{88}$$

$$q_{m_h}(\alpha,B) \le \frac{B\,\alpha\,|\Gamma_1|}{|\Gamma_2|}\,, \tag{89}$$

$$q_{m_h}(\alpha,B) - q_m(\alpha,B) \le \frac{B\,C_0^2\,|\Gamma_1|}{|\Gamma_2|}\,|u_3|^2_{2,\Omega}\,\frac{\alpha}{A(\alpha)}\,h^2\ . \tag{90}$$

Demostración. Si los casos continuo y discreto son casos particulares entonces $A(\alpha)$ y $A_h(\alpha)$ están dados explícitamente por (14) y (63) respectivamente, y por ende surge (88) teniendo en cuenta [Ta5]. Por otra parte, se tiene

$$q_{m_h}(\alpha,B) = \frac{B\,|\Gamma_2|}{C_h + \dfrac{|\Gamma_2|^2}{\alpha\,|\Gamma_1|}} \le \frac{B\,\alpha\,|\Gamma_1|}{|\Gamma_2|}\ ,$$

es decir (89). Además, de (77) y (89) se obtiene (90).

Observación 5. Si $U(\alpha) \in \dot{H}^r(\Omega)$ con $1 \le r < 2$, se podrían también obtener estimaciones similares a las dadas en el Teorema 11.

Agradecimiento.

El presente trabajo ha sido realizado a través del proyecto de investigación y desarrollo "Análisis Numérico de Ecuaciones e Inecuaciones Variacionales" del CONICET - UNR, Rosario - Argentina.

REFERENCIAS

[Ci] P.G. CIARLET, "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam (1978).

[Du] G. DUVAUT, "Problèmes à frontière libre en théorie des milieux continus", Rapport de Recherche N° 185, LABORIA - IRIA, Rocquencourt (1976).

[KiSt] D. KINDERLEHRER — G. STAMPACCHIA, "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

[TaTa] E.D. TABACMAN — D.A. TARZIA, "Sufficient and/or necessary condition for the heat transfer coefficient on Γ_1 and the heat flux Γ_2 to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", J. Differential Equations, 77(1989), 16—37.

[Ta1] D.A. TARZIA, "Sur le problème de Stefan à deux phases", Thèse 3ème Cycle, Univ. Paris VI (Mars 1979). See also C.R. Acad. Sc. Paris, 288A(1979), 941—944; "Una familia de problemas que converge al caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 27(1979/80), 145—156 .

[Ta2] D.A. TARZIA, "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, CLAMI - CONICET, No. 5, Buenos Aires (1981).

[Ta3] D.A. TARZIA, "The two-phase Stefan problem and some related conduction problems", Reuniões em Matemática Aplicada e Computacão Científica, Vol. 5, SBMAC, Gramado (1987). See also "Mixed Elliptic and Parabolic Free Boundary Problems related to the Two-Phase Stefan Problem", Publicazioni No. 728, Istituto di Analisi Numerica, Pavia (1989).

[Ta4] D.A. TARZIA, "An inequality for the constant heat flux to obtain a steady-state two-phase Stefan problem", Engineering Analysis, 5(1988), 177—181.

[Ta5] D.A. TARZIA, "Análisis numérico de un problema elíptico mixto con cambio de fase", ENIEF'89, Mecánica Computacional, Vol. 9, A. Cardona (Ed.), AMCA, Santa Fe (1989), 517—533.