

## INTRODUCCION AL METODO DE VOLUMENES FINITOS

José Converti

Axel Larreteguy

División Termohidráulica, Centro Atómico Bariloche,  
Comisión Nacional de Energía Atómica.  
San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina.

### RESUMEN

Se describe un Método de Volúmenes Finitos aplicado a la resolución de problemas de convección-difusión. Se presenta una breve reseña histórica de su desarrollo. Se describen también algunas contribuciones originales al método, realizadas por los presentes autores y otros colaboradores. Este trabajo está orientado principalmente a servir de introducción al método para gente no familiarizada con el mismo.

### ABSTRACT

A Finite Volume Method for the solution of convection-diffusion problems is described. A short review of its development is presented. Some original improvements to the method, performed by the present authors, are also described. This work is intended to serve as a basic introduction to this method.

## PRINCIPIOS BASICOS

El método de Volúmenes Finitos fue desarrollado originalmente por Baliga y Patankar [1,2], bajo el nombre de Elementos Finitos basados en Volúmenes de Control. Ellos lo aplicaron en un principio a la ecuación de difusión-advección, y luego lo extendieron para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes, junto a Pham y Prakash [3,4,5,6].

El método, en su versión bidimensional original, está basado en una discretización de un dominio  $\Omega$  de frontera  $\Gamma$  en elementos triangulares de tres nodos. Alrededor de cada nodo genérico  $i$  ( $i=1,N$ ) se define un volumen de control  $\Omega_i$ , como se muestra en la Figura 1. Cada  $\Omega_i$  tiene forma poligonal, delimitado por líneas que unen centros de lados con centroides de elementos. De esta manera se obtienen volúmenes de control que cubren todo el dominio y no se solapan.

El sistema de ecuaciones discretizado resulta de un balance entre la fuente interior a cada volumen  $\Omega_i$  y el flujo que cruza la superficie  $\Gamma_i$  del mismo, llamada *superficie de control*. Para calcular este flujo es necesario realizar alguna suposición acerca de los valores que toma la variable de interés dentro de cada elemento. Debemos contar entonces con alguna función de forma o interpolante que nos permita estimar el valor de esta variable en cualquier punto interior del elemento a partir del conocimiento de los valores en los nodos del mismo, ya que estos valores nodales serán el resultado de nuestro cálculo. En este método se utilizan funciones interpolantes que ya poseen alguna información acerca de la ecuación que se está intentando resolver, en lugar de usar aproximaciones polinomiales como es usual en Elementos Finitos.

## EL METODO PARA LA ECUACION GENERAL DE TRANSPORTE

La ecuación de balance

Describiremos el método aplicado a la ecuación general de transporte de un escalar por convección y difusión en el caso bidimensional estacionario, siguiendo a Baliga y Patankar [2]. Este proceso responde a una ecuación del tipo

$$v \cdot j = S \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} j &= \vec{f} + \vec{q} && \text{(flujo total)} \\ \vec{f} &= \alpha \vec{u} v && \text{(flujo convectivo)} \\ \vec{q} &= -\beta \nabla v && \text{(flujo difusivo)} \end{aligned}$$

Esta ecuación describe la distribución del escalar  $v$ , sujeto a convección por un campo de velocidades  $\vec{u}$  y que difunde de acuerdo a la ley de Fick, siendo  $\alpha$  y  $\beta$  los respectivos coeficientes de convección y difusión. El término  $S$  tiene en cuenta la producción de  $v$  y será llamado fuente.

Consideremos un dominio  $\Omega$  de frontera  $\Gamma$ , y subdominios (llamados *volúmenes de control*)  $\Omega_i$  de frontera  $\Gamma_i$ , como se ve en la Figura 1.

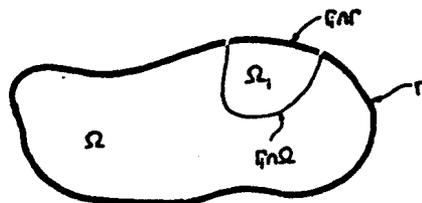


Fig. 1: notación de dominios y fronteras

Reescribamos ahora la Ec. (1) en forma integral para cada volumen de control  $\Omega_1$

$$\int_{\Omega_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} \, d\Omega = \int_{\Omega_1} S \, d\Omega \quad (2)$$

Apliquemos en la Ec. (2) el teorema de la divergencia

$$\int_{\Gamma_1\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{\bar{n}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1\Gamma} \mathbf{\bar{f}} \cdot \mathbf{\bar{n}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1\Omega} \mathbf{\bar{q}} \cdot \mathbf{\bar{n}} \, d\Gamma = \int_{\Omega_1} S \, d\Omega \quad (3)$$

En la (3) se ha separado  $\Gamma_1$  en dos partes. Al flujo a través de  $\Gamma_1\Gamma$  lo llamaremos flujo exterior, y solo está presente en los volúmenes de control que tienen contacto con la frontera del dominio. Al flujo a través de  $\Gamma_1\Omega$  lo llamaremos flujo interior. Los flujos exteriores convectivos y difusivos han sido separados debido a que reciben un tratamiento muy diferente en el momento de colocar las condiciones de borde.

#### Discretización

El primer paso en la obtención de una aproximación algebraica del problema es discretizar el dominio  $\Omega$  en elementos triangulares de 3 nodos y definir los volúmenes de control  $\Omega_1$  alrededor de cada nodo, como se muestra en la Fig. 2. El dominio se considera de profundidad unitaria. En dicha figura solo se han dibujado dos volúmenes de control, uno perteneciente a un nodo interior (P) y el otro a un nodo exterior (V).

Notaremos con  $\Omega^e$  al interior del elemento e y con  $\Gamma^e$  a su superficie (sus tres caras). Por ejemplo, en la Fig. 2:  $\Omega_v$  es el recinto sombreado delimitado por  $\Gamma_v$ ;  $\Gamma_v$  es la superficie cerrada v-i-j-k-l-m-n-o-v;  $\Gamma_w\Gamma$  es la superficie o-v-i y  $\Gamma_w\Omega$  es la i-j-k-l-m-n-o. En la misma figura, si consideramos por ejemplo el elemento vWQ, tendremos que:  $\Omega_w\Omega^e$  es el recinto delimitado por V-i-j-k-V;  $\Gamma_w\Omega^e$  es la superficie i-j-k y  $\Gamma_w\Gamma^e$  es la superficie V-i.

En adelante se usará la convención de suma de índices repetidos, salvo en los que respecta al índice e. Los índices i y j ( $i, j=1, N$ )

hacen referencia a la numeración global de los nodos mientras que los  $m$  y  $n$  ( $m, n=1,3$ ) a la numeración local de los mismos, en cada elemento.

La ecuación (3), que expresa el balance en el volumen de control  $i$ , puede ser dividida en las contribuciones de cada elemento a ese balance, quedando

$$\sum_i \left\{ \int_{\Gamma_i \cap \Omega_e} \vec{P} \cdot \vec{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_i \cap \Gamma_e} \vec{P} \cdot \vec{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_i \cap \Gamma_e} \vec{q} \cdot \vec{n} \, d\Gamma \right\} = \sum_i \int_{\Omega_i \cap \Omega_e} S^e \, d\Omega \quad (4)$$

donde la suma está definida sobre todos los elementos de la grilla, pero solo tienen contribuciones no nulas los elementos que tienen al nodo  $i$  como uno de sus nodos. En estos elementos las intersecciones  $\Gamma_i \cap \Omega_e$  y  $\Omega_i \cap \Omega_e$  son no nulas. Si además el elemento  $e$  tiene contacto con el exterior  $\Gamma$ , entonces  $\Gamma_i \cap \Gamma_e$  tampoco es nula.

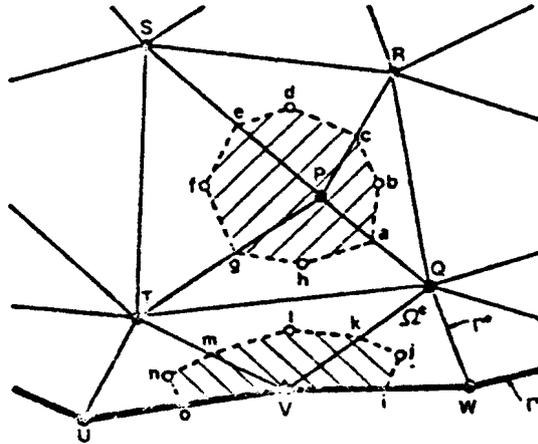


Fig.2: Discretización del dominio  $\Omega$

Para evaluar las integrales de la Ec.(4) es necesario hacer algunas suposiciones acerca de la variación de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\vec{u}$ ,  $S$  y  $v$  sobre todo el dominio  $\Omega$ . Los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $S$  se consideran constantes por elemento. Las velocidades  $\vec{u}$  se interpolan linealmente en cada elemento a partir de sus valores nodales. La función interpolante utilizada para la incógnita  $v$  es el ítem más relevante del método y será tratada en detalle en el siguiente apartado. Por ahora indicaremos solamente que se usa dentro de cada elemento (e) una interpolación del tipo

$$v^e(X, Y) = v_m^e \phi_m^e(X, Y) + S^e \psi^e(X, Y) \quad (5)$$

donde  $m$  es el índice de numeración local de los nodos del elemento en

cuestión ( $m=1,3$ );  $v_n^e$  son los valores incógnita en los tres nodos del elemento y  $S^e$  es el valor constante de la fuente en el mismo. Las  $\phi_n^e$  y  $\psi^e$  son funciones interpolantes cuyo soporte es el elemento e.

Los flujos  $\vec{f}^e$ ,  $\vec{f}^e$  y  $\vec{q}^e$  están definidos en cada elemento. El próximo paso en la discretización es introducir en estos flujos las funciones de forma definidas en (5), obteniendo

$$\vec{f}^e = \alpha^e \vec{u}^e (\phi_n^e v_n^e + \psi^e S^e) \quad (6-a)$$

$$\vec{q}^e = -\beta^e (\nabla \phi_n^e v_n^e + \nabla \psi^e S^e) \quad (6-b)$$

#### Balace en un volumen de control interior

Es conveniente introducir en este punto el operador de conectividades  $\Delta_{im}^e$ , que permite expresar en forma simbólica el proceso de ensamblaje elemento a elemento

$$\Delta_{im}^e = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo local } m \text{ del elemento } e \text{ es el nodo global } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7)$$

Utilizando las igualdades (6) y el operador definido en (7) podemos escribir la Ec. (4) para un nodo interior como

$$\left[ \sum_e \Delta_{im}^e \Delta_{jm}^e J_{im}^e \right] v_j = \sum_e \Delta_{im}^e (V_m^e - J_m^e) S^e \quad (8)$$

donde  $V_i^e = \Delta_{im}^e V_m^e$  = volumen de la región  $\Omega^e \cap \Omega_i$ , y donde

$$J_m^e = \int_{\Gamma_m \cap \Omega^e} (\alpha^e \vec{u}^e \phi_n^e - \beta^e \nabla \phi_n^e) \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (9-a)$$

$$J_m^e = \int_{\Gamma_m \cap \Omega^e} (\alpha^e \vec{u}^e \psi^e - \beta^e \nabla \psi^e) \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (9-a)$$

El balance de la Ec. (8) es válido para todo volumen de control cuya superficie no tenga contacto con la frontera exterior de  $\Omega$ .

#### Tratamiento de los flujos exteriores

Si el volumen de control tiene parte de su frontera coincidente con  $\Gamma$  hay que considerar todos los sumandos del miembro izquierdo de la Ec. (4), incluyendo los flujos convectivos y difusivos hacia el exterior de  $\Omega$ .

Para el flujo convectivo  $\vec{f}^e$  se utiliza la función de forma definida en (5), quedando entonces

$$\sum_e \int_{\Gamma \cap \Omega^e} \vec{f}^e \cdot \vec{n} \, d\Gamma = \left[ \sum_e \Delta_{im}^e \Delta_{jm}^e F_{im}^e \right] v_j + \sum_e \Delta_{im}^e F_m^e S^e \quad (10)$$

donde

$$F_{in}^v = \int_{\Gamma_{in}\Omega^e} ( \alpha^e \bar{u}^e \phi_n^e ) \cdot \bar{n} \, d\Gamma \quad (11-a)$$

$$F_{in}^s = \int_{\Gamma_{in}\Omega^e} ( \alpha^e \bar{u}^e \psi^e ) \cdot \bar{n} \, d\Gamma \quad (11-b)$$

El flujo difusivo exterior debe ser un dato del problema, a menos que se especifique una condición de borde de tipo Dirichlet. El término difusivo será entonces evaluado a partir de los flujos dato por unidad de área, dados por el usuario como valores constantes por lado de elemento exterior. Se puede conocer entonces

$$Q_i = \sum_{\Gamma_{in}\Omega^e} \int \bar{q}^e \cdot \bar{n} \, d\Gamma \quad (12)$$

o sea el flujo difusivo a través de la frontera del volumen de control  $i$  que sale del dominio  $\Omega$ .

El balance de la (8) es completado entonces por la (10) y la (12), quedando finalmente

$$\left( \sum_{\circ} \Delta i_n \Delta j_n ( J_{in}^v + F_{in}^v ) \right) v_j = Q_i + \sum_{\circ} \Delta i_n ( V_n^s - J_n^s - F_n^s ) S^e \quad (13)$$

el cual es válido para cualquier volumen de control (si es interior los  $F$  y  $Q$  son nulos). La condición homogénea ( $Q_i=0$ ) aparece en la Ec.(13) como una condición natural del método.

La Ec.(13) es la ecuación discretizada para el volumen de control  $i$  en su forma final. Aplicandola a cada nodo de la red obtenemos un sistema algebraico del tipo

$$A \cdot v = b \quad (14)$$

donde  $A$  es una matriz no-simétrica. La matriz  $A$  y el vector  $b$  pueden ser calculados elemento a elemento a partir de las Ec.(9), (11) y (12) y luego ensamblados como indican las Ec.(8) y (10). Las integrales de (9) y (11) pueden ser evaluadas en forma analítica o numérica (por ej. usando Simpson).

#### Funciones interpolantes

Concentraremos nuestra atención ahora en la función interpolante utilizada para la incógnita, tal como ha sido definida en la Ec.(5). En este apartado obviaremos el índice  $e$ , entendiéndose que todo lo que se dice es válido dentro de cada elemento en particular. El objetivo es llegar a una función interpolante que contenga alguna información acerca de la ecuación que se está intentando resolver, en lugar de usar aproximaciones polinomiales como es usual en Elementos Finitos.

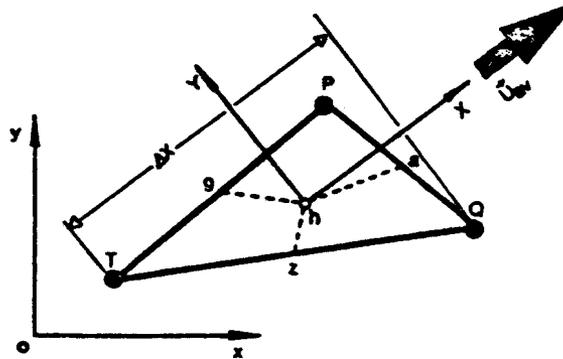


Fig.3: Un elemento y su sistema rotado de coordenadas

Consideremos el elemento P-Q-T mostrado en la Fig.3. La velocidad  $\bar{u}_{uv}$  (de módulo  $U_{uv}$ ), promedio de las tres velocidades nodales, define una dirección privilegiada. Definamos entonces un sistema local de coordenadas X-Y con su eje X coincidente con la dirección de  $u_{uv}$ , rotado con respecto al sistema original x-y. Definamos también  $\Delta X$  como la dimensión del elemento en dirección X, como se muestra en la Fig.3, y el Peclet del elemento como  $Pe = U_{uv} \alpha \Delta X / \beta$ .

Supongamos ahora que simplificamos el problema, y consideramos  $\alpha$ ,  $\beta$  y S constantes; y  $\bar{u} = \bar{u}_{uv}$  (un campo de velocidades uniforme) sobre el elemento. En estas condiciones la ecuación (1) escrita en el sistema rotado X-Y toma la forma

$$\frac{Pe}{\Delta X} \frac{\partial v}{\partial X} - \left( \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) = \frac{S}{\beta} \quad (15)$$

Baliga y Patankar proponen para v una función interpolante del tipo

$$v(X, Y) = A W(X) + B Y + C \quad (16)$$

donde

$$W(X) = \exp\left(\frac{Pe X}{\Delta X}\right)$$

y donde A, B y C dependen entre otras cosas de los valores nodales de v, y se determinan pidiendo  $v(X_n, Y_n) = v_n$ . La función (16) es la solución general de la Ec. (15) homogénea en el caso unidimensional, a la que se le ha agregado un interpolación lineal en Y para introducir un tercer parámetro a determinar, con lo cual pasa a ser una solución particular de la ecuación anterior. Esta función interpolante tiene en cuenta la naturaleza direccional del transporte de v, eliminando los problemas de soluciones oscilantes que tienen los esquemas centrados

cuando se supera un cierto Peclet.

Prakash [6] introduce en la función (16) un término dependiente de la fuente

$$v(X, Y) = A W(X) + B Y + C + \frac{S \Delta X}{Pe \beta} X \quad (17)$$

La función (17) es una solución particular de la Ec.(15) no-homogénea. Esta nueva función adquiere importancia en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, ya que permite obtener un método de igual orden, lo que significa que no se necesitan redes diferentes para el cálculo de velocidades y presiones. Esto no es posible con la función propuesta por Baliga y Patankar.

Debido a que la solución particular propuesta por Prakash como función interpolante no es única, hemos explorado [7,8,9,10] otras posibilidades. Proponemos entonces la siguiente función

$$v(X, Y) = A W(X) + B Y + C + S R(X, Y) \quad (18)$$

donde

$$R(X, Y) = \left[ (1-\gamma) \frac{X \Delta X}{Pe \beta} - \gamma \frac{Y^2}{2 \beta} \right]$$

donde el parámetro  $\gamma$  puede ser ajustado para elegir una determinada función interpolante. Para valores de  $\gamma$  entre 0. y 1. la (18) es una solución particular de la Ec.(15). El caso  $\gamma=0$  corresponde a la función propuesta por Prakash.

La función (18) puede ser puesta en la forma (5), eliminando las constantes auxiliares A, B y C. Pidiendo que en cada uno de los nodos del elemento sea  $v(X_m, Y_m) = v_m$ , es decir

$$A W_m + B Y_m + C + S R_m = v_m ; \quad m=1,3 \quad (19)$$

se obtiene que

$$A = a_m v_m - (a_m R_m) S \quad (20-a)$$

$$B = b_m v_m - (b_m R_m) S \quad (20-b)$$

$$C = c_m v_m - (c_m R_m) S \quad (20-c)$$

En las ecuaciones anteriores  $W_m = W(X_m)$  y  $R_m = R(X_m, Y_m)$ . Los coeficientes  $a_m$ ,  $b_m$  y  $c_m$  solo dependen de la geometría y el Pe del elemento, por lo que son fácilmente evaluables. Finalmente, reemplazando las (20) en la función (18) obtenemos la forma (5) que estábamos buscando, y que repetimos aquí por motivos de claridad

$$v(X, Y) = v_m \phi_m(X, Y) + S \psi(X, Y) \quad (21)$$

donde

$$\phi_m(X, Y) = a_m W(X) + b_m Y + c_m \quad (22-a)$$

$$\psi(X, Y) = R(X, Y) - R_m \phi_m(X, Y) \quad (22-b)$$

Estas funciones tienen su soporte en el elemento, y cumplen las siguientes relaciones:

$$\phi_p(x_n, y_n) = \delta_{pm} \quad ; \quad \phi(x_n, y_n) = 0 \quad (23)$$

donde  $\delta$  es el símbolo de Dirac.

#### Aplicabilidad del teorema de la divergencia

Es importante notar que, debido a que en la definición de las funciones de forma (21) solo hay información local al elemento, no se respeta la continuidad entre elementos, ni en los valores de la función ni en sus derivadas. El teorema de la divergencia no es estrictamente aplicable en cada volumen de control  $\Omega$  debido a que  $v(x,y)$ , y por lo tanto el flujo  $j$ , no cumple con las hipótesis requeridas de continuidad en las superficies  $\Omega_i \cap \Omega^*$ .

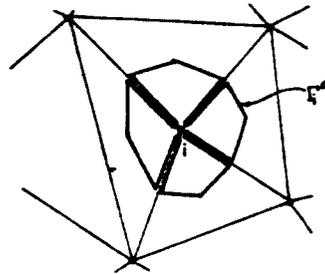


Fig. 4: Superficies de control extendidas

Consideremos por simplicidad un volumen de control interior. Supongamos que ahora la frontera del volumen de control  $\Omega$  ya no solo es el  $\Gamma_1$  que habíamos considerado anteriormente. Esta nueva frontera, que llamaremos  $\Gamma_1^*$ , es la suma de  $\Gamma_1$  más las superficies del tipo  $\Omega_i \cap \Omega^*$  recorridas en ambas direcciones en elementos adyacentes (ver Fig. 4), o sea:

$$\Gamma_1^* = \Gamma_1 + \sum_{\Omega_i \cap \Omega^*} \quad (24)$$

donde  $\Gamma^*$  se recorre en cada elemento siempre en sentido antihorario.

Para un volumen de control interior  $\Omega$ , donde las funciones son continuas solo dentro de cada elemento, pero no entre los mismos, la aplicación estricta del teorema de la divergencia exige reescribir la (4) como

$$\sum_{\Omega} \left\{ \int_{\Gamma_1 \cap \Omega^*} \vec{J} \cdot \vec{n} \, d\vec{r} + \int_{\Omega_i \cap \Omega^*} \vec{J} \cdot \vec{n} \, d\vec{r} \right\} = \sum_{\Omega} \int_{\Omega_i \cap \Omega^*} s^* \, d\Omega \quad (25)$$

Al derivar el sistema algebraico a partir de la (4) estamos

suponiendo que

$$\sum_{\Omega} \left\{ \int_{\partial \Omega} \vec{j} \cdot \vec{n} \, d\Gamma \right\} = 0 \quad (26)$$

o sea que, si bien los flujos entre lados de elemento no son estrictamente iguales, se produce un balance entre todos estos flujos que no habian sido considerados. Esto no es en general cierto, siendo este desbalance uno de los factores del error de discretización del método.

Para demostrar la consistencia del método, hablando sin demasiada rigurosidad, sería necesario probar que el miembro izquierdo de la (26) tiende a 0 mas rapidamente que el resto de los términos de la (25) cuando  $h \rightarrow 0$ . En este sentido los trabajos de C. Padra [12] pueden ayudar a la fundamentación teórica del método.

### CONCLUSIONES

Se ha descrito un Método de Volúmenes Finitos (MVF) aplicado a la resolución de problemas de convección-difusión. La descripción ha sido hecha con el detalle suficiente como para servir de introducción a gente no familiarizada con el mismo, pero con conocimiento de otros métodos numéricos (Elementos Finitos, Diferencias Finitas, etc.).

Como se ha visto el MVF no requiere conocimientos matemáticos mas complejos que el teorema de la divergencia. Está basado en conceptos de balance, con marcado sentido físico. Debe tenerse claro sin embargo que aproximaciones se realizan en su desarrollo. Hacen falta todavía en este campo demostraciones de consistencia generales, aplicables a distintas funciones de forma.

En los trabajos realizados hasta el momento el MVF ha producido muy buenos resultados, no solo en problemas de convección-difusión, sino en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. Los resultados numéricos pueden encontrarse en las referencias [6] a [10]. Ha sido aplicado también con modelos de flujo turbulento [11].

REFERENCIAS

- [1] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington D.C., 1980.
- [2] B.R. Baliga and S.V. Patankar, 'A new finite element formulation for convection-diffusion problems', *Numer. Heat Transfer*, 3, 393-410, 1980.
- [3] B.R. Baliga and S.V. Patankar, 'A control volume finite element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer', *Numer. Heat Transfer*, 6, 245-262, 1983.
- [4] B.R. Baliga, T.T. Pham and S.V. Patankar, 'Solution of some two-dimensional incompressible fluid flow and heat transfer problems using a control volume finite element method', *Numer. Heat Transfer*, 6, 263-282, 1983.
- [5] C. Prakash and S.V. Patankar, 'A control volume based finite element method for solving the Navier-Stokes equation using equal-order variable interpolation', *Numer. Heat Transfer*, 8, 259-280, 1985.
- [6] C. Prakash, 'An improved control volume finite element method for heat and mass transfer, and for fluid flow using equal-order velocity-pressure interpolation', *Numer. Heat Transfer*, 9, 253-276, 1986.
- [7] A. Larreteguy, J. Converti, 'Algoritmo para Resolver la Ecuación de Transporte por Volúmenes de Control', presentado en el Congreso Ibero-Latinoamericano MECOM'88, Noviembre de 1988, Carlos Paz, Córdoba, Argentina.
- [8] A. Larreteguy, J. Converti, V. Fukami, P. Carrica, 'Tratamiento del Término Temporal en la Ecuación de Difusión-Advección y Proposición de Algunas Mejoras al Método de Elementos Finitos por Volúmenes de Control', presentado en el Congreso ENIEF'89, Julio de 1989, Bariloche, Río Negro, Argentina.
- [9] A. Larreteguy, J. Converti, 'Improvements to the Finite Volume Method for Convection-Diffusion Problems', enviado al *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Julio 1990.
- [10] A. Larreteguy, P. Carrica, J. Converti, 'Desarrollos en el Método de Elementos Finitos aplicado a la Resolución de las Ecuaciones de Navier-Stokes.', presentado en el Congreso ENIEF'90, Noviembre de 1990, Mar del Plata, Argentina.
- [11] P. Carrica, A. Larreteguy, J. Converti, 'Cálculo de Flujos Turbulentos por el Método de Elementos Finitos basados en Volúmenes de Control.', presentado en el Congreso ENIEF'90, Noviembre de 1990, Mar del Plata, Argentina.
- [12] C. Padra, Informes Internos, división Mecánica Computacional, Centro Atómico Bariloche, Argentina.

