MODELO PARA ANÁLISE DE PÓRTICOS DE CONCRETO ARMADO

José M. Araújo
Departamento de Materiais e Construção
Universidade do Rio Grande
Rio Grande, RS, Brasil

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo para análise de pórticos de concreto armado segundo a Teoria de Timoshenko. A formulação em deslocamentos do método dos elementos finitos é empregada para a obtenção das equações de equilíbrio de um elemento quadrático. A contribuição do concreto tracionado entre fissuras é incluída na equação constitutiva da armadura longitudinal. Adota-se, também, uma relação bilinear entre esforço cortante e distorção. Resultados experimentais obtidos por outros autores são usados para testar o modelo.

ABSTRACT

The subject of this work is to present a model for analysis of reinforced concrete frames according to Timoshenko's Theory. The displacements formulation of the finite element method is used to obtain the equilibrium equations for a quadratic element. Tension stiffening effect is considered by modifing the constitutive equation for longitudinal reinforcement. A bilinear shear-distortion relationship is used. Experimental results, attained by other authors, are employed to test the model.

INTRODUÇÃO

Na análise de estruturas aporticadas de concreto armado, em geral, admite-se a hipótese das seções planas e normais desprezando-se, com isto, as deformações por corte. Esta formulação fornece bons resultados quando se trata de estruturas esbeltas.

Entretanto, em elementos pouco esbeltos, a parcela de deformação por corte pode se tornar significativa em relação à deformação total. Isto é particularmente verdadeiro em vigas de concreto armado após o surgimento de fissuras inclinadas. A consideração dessas componentes de deformação através do método dos elementos finitos pode ser feita a partir de uma formulação para estado plano de tensões ou, de maneira mais simples, com o emprego da Teoria de Timoshenko [1]. Nesta teoria, admite-se que as seções transversais permanecem planas mas não, necessariamente, normais ao eixo do elemento.

Neste trabalho apresenta-se a teoria de flexão de Timoshenko adaptada para a análise de pórticos planos de concreto armado pelo método dos elementos finitos. O elemento empregado possui três nós e interpolações quadráticas desacopladas para os deslocamentos. Na análise considera-se a não-linearidade geométrica do problema. A contribuição do concreto entre fissuras e uma relação bilinear entre esforço cortante e distorção são introduzidas na modelagem do comportamento do material.

RELAÇÕES DEFORMAÇÕES-DESLOCAMENTOS

Na fig. 1 apresenta-se um segmento de barra após a deformação, onde u_o e W representam os deslocamentos longitudinal e transversal do eixo e ϕ é a rotação produzida pela flexão.

De acordo com a figura verifica-se que ϕ não é igual a dW/dx, já que a seção não permanecerá perpendicular ao eixo da barra.

O campo de deslocamentos no interior do elemento é dado por

$$u = u_o(x) - z\,\phi(x); \tag{1}$$

$$W = W(x)\,. \tag{2}$$

Das conhecidas relações deformações-deslocamentos para o problema plano [2], vem

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 \tag{3}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dW}{dx} , \tag{4}$$

onde ε_x e γ_{xz} são as deformações longitudinal e transversal, respectivamente. O último termo da equação (3) introduz a não-linearidade geométrica do problema.

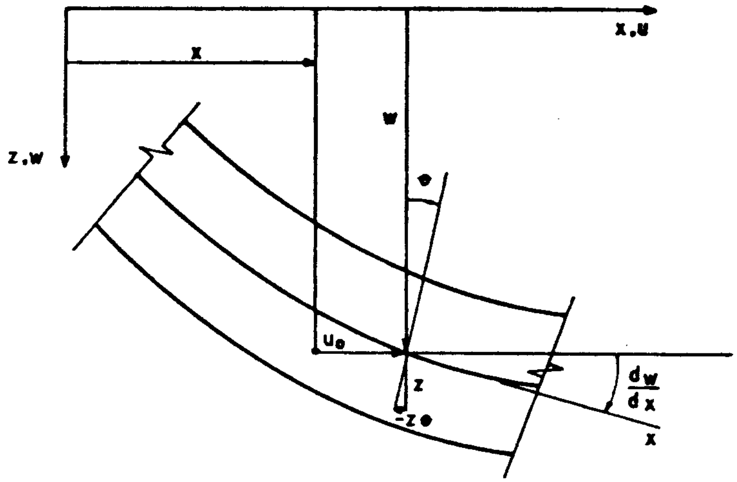

Fig. 1 — Deformada da barra.

Introduzindo as expressões (1) e (2) e colocando em forma matricial, resulta

$$\varepsilon = Lu + \varepsilon^{*} \tag{5}$$

onde $\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$ = vetor de deformações;

$u = \begin{Bmatrix} u_o \\ W \\ \theta \end{Bmatrix}$ = vetor de deslocamentos;

$$L = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dx} & 0 & -z\dfrac{d}{dx} \\ 0 & \dfrac{d}{dx} & -1 \end{bmatrix} \text{ = operador diferencial linear;}$$

e

$$\varepsilon^{*} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dW}{dx}\right)^{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ é a componente não-linear das deformações.}$$

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

O elemento finito empregado possui 3 nós com 3 graus de liberdade por nó, como indicado na fig. 2.

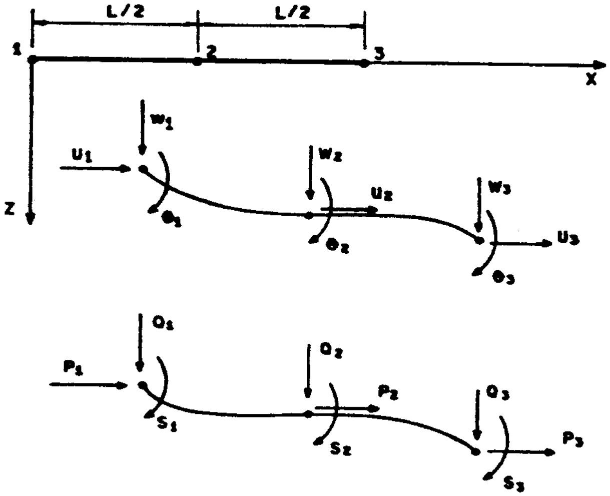

Fig. 2 - Características do elemento.

Os deslocamentos no interior do elemento são obtidos por

$$u = NU \tag{6}$$

onde U é o vetor de deslocamentos nodais e a matriz N contém as funções de interpolação [3].

Introduzindo (6) em (5), vem

$$\varepsilon = BU + \varepsilon^{*} \qquad (7)$$

onde $B = LN$.

Admitindo a validade da lei de Hooke, as relações tensão-deformação podem ser escritas na forma

$$\sigma = D\varepsilon \qquad (8)$$

onde $\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$ é o vetor de tensões e

$D = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \alpha G \end{bmatrix}$ é a matriz de constantes elásticas.

O coeficiente α é introduzido para levar em conta a distribuição real das tensões tangenciais e, para seções retangulares, é tomado igual a 5/6.

Introduzindo (7) em (8) vem

$$\sigma = DBU + D\varepsilon^{*} \qquad (9)$$

Desprezando os termos não-lineares em (7) e (9) e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais chega-se ao sistema de equações de equilíbrio

$$F = \left(\int_V B^T DB dv \right) U \qquad (10)$$

onde F é o vetor das ações nodais e o termo entre parênteses representa a matriz de rigidez linear do elemento.

A determinação das ações nodais equivalentes às cargas distribuídas ao longo do eixo do elemento, bem como a montagem do sistema global de equações é feita da forma usual [3].

AÇÕES NODAIS NÃO-LINEARES

Seja A_n o vetor que representa as ações não-lineares aplicadas aos nós do elemento. Empregando o princípio dos trabalhos virtuais vem

$$\delta\, U^T A_n = \int_V \delta\varepsilon^T \sigma \, dv \qquad (11)$$

onde em ε e σ estão incluídas as não-linearidades do problema.

Desenvolvendo a expressão (11) chega-se a

$$A_n = \int_0^L \begin{Bmatrix} A_{n1} \\ A_{n2} \\ A_{n3} \end{Bmatrix} dx \qquad (12)$$

$$A_{ni} = \begin{Bmatrix} N \dfrac{d\,\Phi_i}{dx} \\ Q \dfrac{d\,\Phi_i}{dx} + N \left(\Sigma \dfrac{d\,\Phi_j}{dx} w_j \right) \dfrac{d\,\Phi_i}{dx} \\ -M \dfrac{d\,\Phi_i}{dx} - Q\,\Phi_i \end{Bmatrix}$$

sendo as Φ_i as funções de interpolação, L o comprimento do elemento, N o esforço normal, M o momento fletor e Q o esforço cortante em uma seção transversal.

A não-linearidade física é introduzida na determinação dos esforços seccionais como será apresentado a seguir. A integração do longo do comprimento do elemento é feita usando 3 pontos de Gauss. Em cada ponto é realizada uma integração numérica para a avaliação do esforço normal e do momento fletor, dividindo-se a seção transversal em 20 faixas perpendiculares ao eixo z.

Uma vez definido o vetor de ações não-lineares do elemento o mesmo é armazenado em um vetor global da forma padrão. A solução do sistema não-linear de equações é obtida iterativamente empregando-se o método de Newton-Raphson, onde a matriz de rigidez é redefinida quando o número de iterações atingir um limite pré-estabelecido. A determinação da matriz tangente é feita com o mesmo esquema de integração usado na avaliação das ações não-lineares. O esquema de solução e a definição da matriz tangente são apresentados em detalhe em [4].

MODELO PARA CONCRETO ARMADO

Flexão:

Como já foi salientado a determinação do esforço normal e do momento fletor em um ponto de integração é feita discretizando-se a seção transversal em faixas perpendiculares ao eixo z. A deformação longitudinal pode, então, ser avaliada no centro de cada faixa, bem como nas camadas de armadura.

A seção transversal de concreto armado considerada é a retangular indicada na fig. 3.

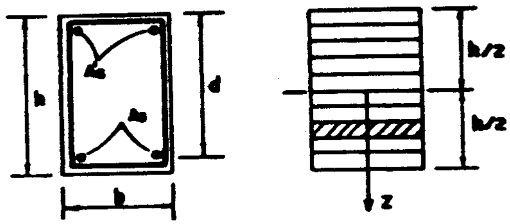

Fig.3 - Seção transversal.

Conhecidas as deformações, obtém-se as tensões a partir das equações constitutivas dos materiais e pode-se realizar a integração numérica mencionada.

Para o concreto em compressão adota-se o diagrama tensão-deformação apresentado pelo CEB [5], fig. 4a, cuja equação e dada por

$$\sigma_c = f_c \left[\frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k - 2)\eta} \right] \qquad (13)$$

onde $k = \dfrac{2,2\ E_c}{1000\ f_c}$; $\eta = \dfrac{1000\ \epsilon_c}{2,2}$,

e E_c é o módulo de deformação longitudinal que, na falta de determinação experimental, é dado por

$$E_c = 10450 f_c^{\ 1/3} \text{ , MPa.} \qquad (14)$$

Para o aço em compressão adota-se o comportamento elastoplástico perfeito indicado na fig. 4b, onde f_y é a tensão de escoamento e E_s = 200 GPa é o módulo de elasticidade longitudinal.

Em uma faixa tracionada de concreto a tensão é considerada nula, pois a colaboração do concreto entre fissuras será incluída na equação constitutiva do aço em tração, como apresentado a seguir.

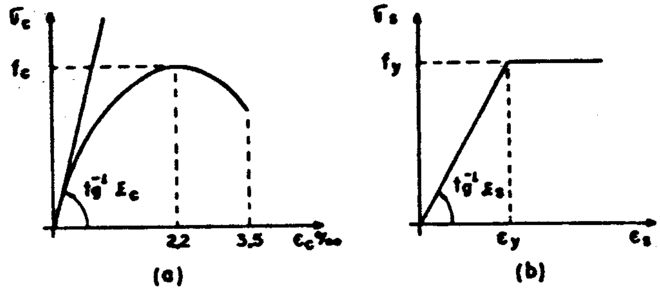

Fig. 4 – Diagramas tensão-deformação para compressão.

Seja o elemento de concreto armado da fig. 5 submetido a uma força de tração P constante, onde as fissuras estão espaçadas de uma distância 2a.

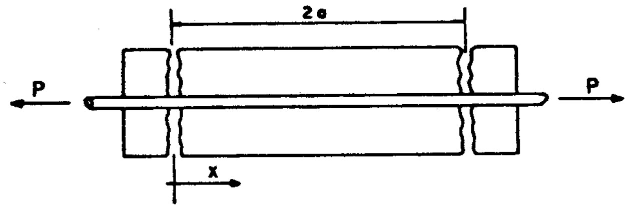

Fig. 5 – Elemento fissurado.

Em uma seção genérica, a uma distância x da fissura, tem-se que

$$R_c + R_s = P \qquad (15)$$

onde R_c e R_s são as forças de tração no concreto e na barra de aço, respectivamente.

Diferenciando (15) em relação a x, vem

$$\frac{dR_c}{dx} + \frac{dR_s}{dx} = 0. \qquad (16)$$

Se τ_{bm} é o valor médio da tensão de aderência entre os dois materiais tem-se que

$$\frac{dR_s}{dx} = -\mu \, \tau_{bm} \qquad (17)$$

onde μ é o perímetro da seção da barra de aço.

Integrando (17) e lembrando que em $x = 0$ a força R_s é igual a P, vem

$$R_s = P - \mu \tau_{bm} x. \tag{18}$$

Introduzindo (17) em (16) e fazendo $R_c = 0$ em $x = 0$, resulta

$$R_c = \mu \tau_{bm} x. \tag{19}$$

Assumindo que o comprimento a seja o necessário para introduzir a força de fissuração, P_r, chega-se a

$$a = \frac{P_r}{\mu \tau_{bm}}. \tag{20}$$

Se A_s é a área da seção transversal da barra de aço e σ_{so} é a tensão na fissura, a tensão no aço em uma seção genérica pode ser obtida a partir de (18) como

$$\sigma_s = \sigma_{so} - \frac{\mu \tau_{bm} x}{A_s}. \tag{21}$$

Considerando o comportamento elástico linear, a deformação da armadura é dada por

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_{so}}{E_s} - \frac{\mu \tau_{bm} x}{E_s A_s}. \tag{22}$$

e a deformação média no comprimento a será

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{so}}{E_s} - \frac{P_r}{2 E_s A_s}. \tag{23}$$

A deformação da armadura no momento da fissuração, ε_{sr}, ocorre na seção central. Substituindo x por a na equação (22) e introduzindo (20) pode-se obter a tensão no aço para a carga de fissuração como

$$\sigma_{sr} = E_s \left(\varepsilon_{sr} + \frac{P_r}{E_s A_s} \right). \tag{24}$$

Quando a armadura entra em escoamento, $\sigma_{so} = f_y$, a deformação média será

$$\varepsilon_{sy} = \frac{f_y}{E_s} - \frac{P_r}{2E_sA_s} \; . \qquad (25)$$

Os valores obtidos dão origem ao diagrama tensão-deformação média do aço indicado na fig. 6.

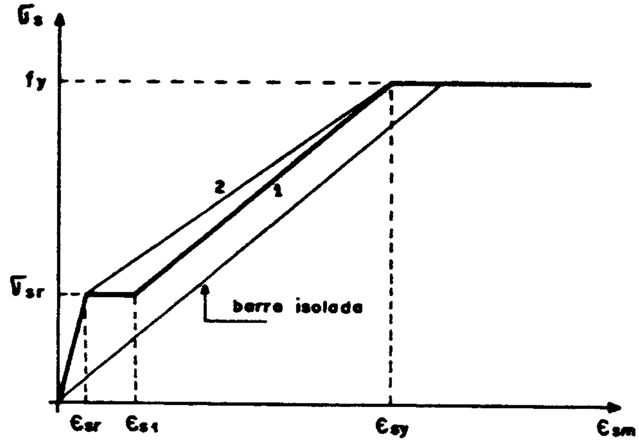

Fig. 6 — Modelo com aderência constante.

Da equação (23) é fácil ver que

$$\varepsilon_{s1} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{P_r}{2E_sA_s} \; . \qquad (26)$$

Uma vez que a distribuição real das tensões de aderência é variável ao longo do elemento e que o espaçamento das fissuras depende da tensão aplicada, não sendo constante como foi admitido, adota-se como modelo final o diagrama representado na fig. 7, que representa o comportamento médio entre as retas 1 e 2 da fig. 6.

A tensão σ_{s1} indicada no modelo é

$$\sigma_{s1} = \sigma_{sr} + \frac{\left(f_y - \sigma_{sr}\right)\left(\varepsilon_{s1} - \varepsilon_{sr}\right)}{2\left(\varepsilon_{sy} - \varepsilon_{sr}\right)} \; . \qquad (27)$$

Para a deformação de fissuração ε_{sr} adota-se o valor 0,1‰.

A força de fissuração P_r é tomada como

$$P_r = 0{,}25bhf_{ct}, \text{ na flexão simples;} \quad (28)$$

$$P_r = 0{,}50A_t f_{ct}, \text{ na flexo-compressão,} \quad (29)$$

onde A_t é a área tracionada da seção de concreto, variável ao longo do carregamento. Para flexo-tração e tração simples a força P_r deverá ser determinada em função da distribuição de deformações na seção transversal.

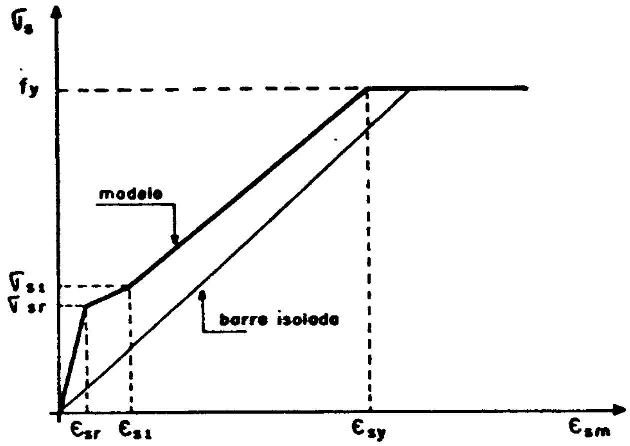

Fig. 7 – Diagrama tensão-deformação para armadura tracionada.

A resistência à tração do concreto, f_{ct}, é dada por

$$f_{ct} = E_c \, \varepsilon_{sr} \quad . \qquad (30)$$

Cisalhamento:

A relação entre o esforço cortante Q e a distorção γ em um ponto de integração é assumida ser bilinear, como indicado na fig. 8.

A rigidez inicial é dada por

$$k_o = \frac{5}{12} E_c bh \quad . \qquad (31)$$

Após a fissuração inclinada considera-se a rigidez obtida do modelo de treliça de Mörsch com bielas de compressão inclinadas a 45º em relação ao eixo do elemento. Para elementos armados com estribos perpendiculares ao seu eixo vem [6]

$$k_s = \left(\frac{\rho_w \; E_s}{1 + 4n \, \rho_w} \right) bd, \qquad (32)$$

onde $\rho_w = A_{sw}/(bs)$ é a taxa de armadura transversal, sendo A_{sw} e s a área da seção dos estribos e o seu espaçamento, respectivamente.

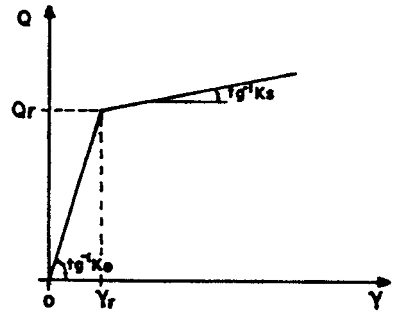

Fig. 8 — Relação esforço cortante – distorção.

Na equação (32) n é a relação entre os módulos de elasticidade longitudinal do aço e do concreto.

O esforço cortante limite, Q_r, é dado por

$$Q_r = \frac{M_r}{Z} \qquad (33)$$

onde M_r é o momento de fissuração da seção transversal e Z é a distância da resultante de compressão no concreto à armadura longitudinal.

Do modelo para flexão tem-se que

$$M_r = A_s \, \sigma_{sr} Z \qquad (34)$$

onde σ_{sr} é dada na equação (24).

Considerando a equação (28) e fazendo as operações necessárias chega-se a

$$Q_r = \left(n \rho + 0{,}25 \frac{h}{d} \right) bdf_{ct} \qquad (35)$$

onde $\rho = \frac{A_s}{bd}$ é a taxa de armadura longitudinal de tração.

EXEMPLOS

Com o fim de testar todos os aspectos levantados, são apresentadas as respostas obtidas para uma viga e um pórtico, em comparação com os resultados experimentais.

Na fig. 9 apresentam-se as curvas carga-deslocamento para a viga A1 ensaiada por Bresler e Scordelis [7]. Esta é uma viga curta com relação vão/altura aproximadamente igual a 6,5, cuja ruína ocorreu por cisalhamento. Observa-se da figura a boa concordância do modelo com os resultados experimentais até as proximidades da ruína.

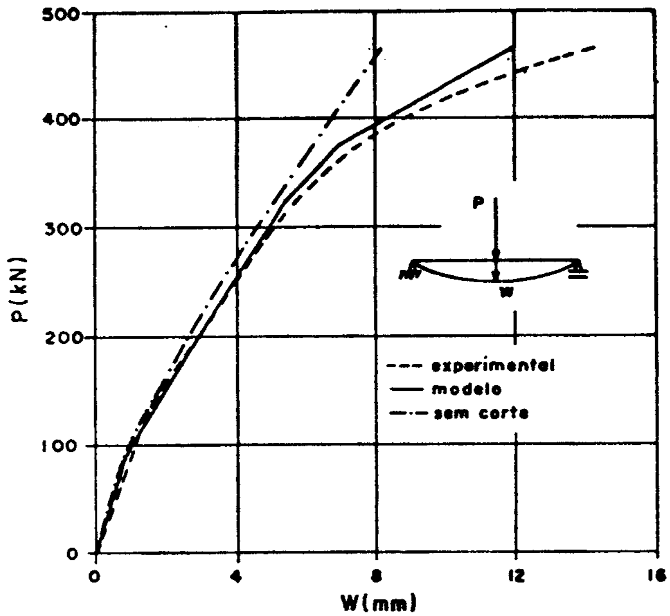

Fig.9 – Viga A1 (ref.7).

Na figura também é apresentada a resposta encontrada com o emprego do elemento cúbico da teoria clássica de flexão [8]. Verifica-se assim que, na ruína, o deslocamento é aproximadamente 75% maior que o previsto ao ser desconsiderada a deformação por corte.

Na fig. 10 encontram-se as respostas teórica e experimental de um pórtico ensaiado por Furlong e Ferguson [9]. Observa-se, mais uma vez, a boa concordância dos resultados.

CONCLUSÕES

O modelo desenvolvido foi testado em uma série de vigas, pilares e pórticos de concreto armado cujos dados são disponíveis em [7, 9, 10, 11]. Dos resultados obtidos conclui-se que:

- o modelo constitutivo para o aço, incluindo a colaboração do concreto entre fissuras, é prefeitamente compatível com a realidade física. Assim, é possível acompanhar a resposta de estruturas com taxas de armadura tão baixas como 0,7%, onde o efeito é importante, até taxas maiores que 2,5%, para as quais a contribuição do concreto entre fissuras é secundária. Além disto, a inclusão desse efeito diretamente na equação constitutiva do aço é mais realista do que a consideração de um diagrama tensão-deformação para o concreto tracionado. Isto é especialmente verdadeiro em vigas altas, onde a linha neutra está muito afastada da armadura.

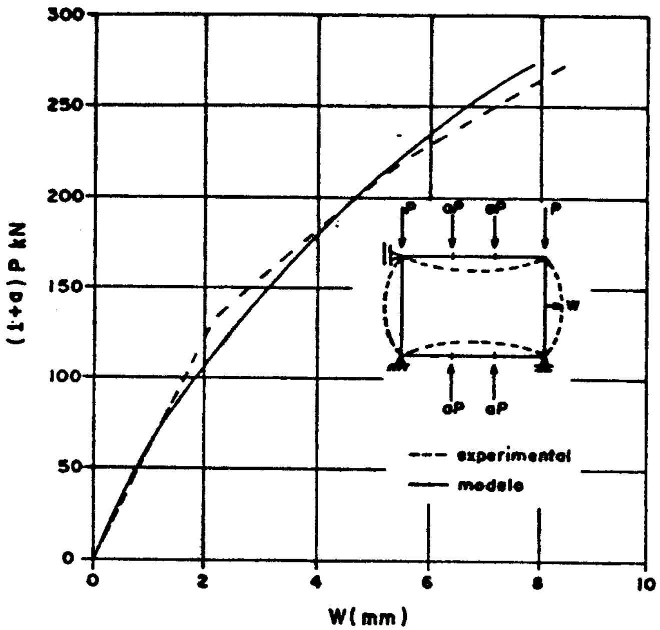

Fig. 10 – Pórtico F2 (ref. 9).

- O modelo para o corte procura representar o comportamento experimental. A previsão da carga de fissuração inclinada através da equação (35) mostrou-se satisfatória em todos os exemplos testados. Entretanto, uma relação não-linear entre esforço cortante e distorção, após a fissuração inclinada, deverá acompanhar melhor a resposta experimental.

- Com o modelo desenvolvido pode-se analisar estruturas de concreto armado, do tipo pórtico plano, incluindo de maneira realística as não-linearidades física e geométrica. Problemas localizados em nós de pórticos, entretanto, não foram considerados.

REFERÊNCIAS

[1] Dym, C. L. and Shames, I. H., "Solid Mechanics - A variational approach". McGraw-Hill, New York, 1973.

[2] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., "Theory of elasticity". McGraw-Hill, New York, 1970.

[3] Zienkiewicz. O. C., "The finite element method".McGraw-

-Hill, 1977.

[4] Araújo, J. M., "Optimization of Newton-Raphson methods in RC nonlinear analysis", Computers and Structures, vol. 33, No.3,pp. 735-741, 1989.

[5] CEB, "Code-modéle CEB/FIP pour les structures en beton", Paris, 1978.

[6] Park, R. and Paulay, T., "Reinforced concrete structures". J. Wiley, New York, 1975.

[7] Bresler, B. and Scordelis, A. C., "Shear strength of reinforced concrete beams", Journal of the American Concrete Institute, vol.60, pp. 51-74, January, 1963.

[8] Araújo, J. M., "Pilares esbeltos de concreto armado", Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, No.29, pp. 29-33, Lisboa, Dez. 1989.

[9] Furlong, R. W. and Ferguson, P. M., "Tests of frames with columns in single curvature", Symp. on Reinforced Concrete Columns, American Concrete Institute, SP-13, 1966.

[10] Telles, J. C. F. e Garcia, L. F. T., "Análise do comportamento não-linear geométrico e físico de pórticos planos de concreto armado", Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1976.

[11] Schegg, A. e Decanini, L., "Sobre las deformaciones en elementos de hormigon armado", Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Anais, v.2, pp. 1070-1120, Porto Alegre, 1971.