

ALGORITMO DE PASO VARIABLE PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Arturo Cassano

Alberto Cardona

Grupo de Tecnología Mecánica

INTEC (Conicet / Universidad Nacional del Litoral)

Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina

Resumen

Se analizan algoritmos de integración temporal a paso variable para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales / algebraicas (DAE), características en modelos para la simulación de mecanismos [1,2]. Se ensayan dos algoritmos: el de Gladwell y Thomas, con estimación del error por comparación entre resultados de dos integradores de diferente orden, y el de Hilber, Hughes y Taylor, determinándose el error de integración en base a la estimación de derivadas de orden superior. Se presentan ejemplos numéricos sencillos, con una comparación de prestaciones entre ambos algoritmos.

Abstract

We analyze variable-step time integration algorithms to solve systems of differential / algebraic equations (DAE). Two algorithms are tested: the Gladwell and Thomas scheme [4,5], with an error estimation based on comparing results given by two algorithms of different order, and the Hilber, Hughes and Taylor's one, determining the integration error from an estimation of higher order derivatives. Some numerical examples are shown, giving a comparison between the performances of both algorithms.

1. Introducción

La ecuación de movimiento a integrar, para obtener el comportamiento en el tiempo de una estructura analizada por elementos finitos es:

$$M\ddot{q} + G^{int}(q, \dot{q}) = F(t) \quad (1)$$

en donde M es la matriz de masas; G^{int} el vector de fuerzas internas; q, \dot{q}, \ddot{q} , desplazamientos, velocidades y aceleraciones nodales y $F(t)$ es el vector de cargas externas. Para casos lineales, la misma se reduce a:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = F(t) \quad (2)$$

en donde K es la matriz de rigidez y C es la matriz de amortiguamiento.

Cuando se analiza mecanismos, usualmente aparecen restricciones sobre algunos grados de libertad, del tipo:

$$\Phi(q) = 0 \quad (3)$$

Por lo tanto, el equilibrio de un mecanismo estará dado por la verificación simultanea de (1) y (3); un sistema de este tipo es llamado sistema de ecuaciones diferenciales algebraicas (DAE).

Cardona y Gérardin [3] demuestran que el comportamiento de un algoritmo de integración temporal para este tipo de ecuaciones está relacionado a su habilidad para tratar sistemas de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

A lo largo de este trabajo analizaremos la aplicación de distintos algoritmos a la resolución de sistemas como el (4), comenzando con problemas lineales y aumentando la complejidad hasta llegar a problemas no lineales con restricciones.

2. Estimación del error en base al uso de una "familia" de algoritmos

Thomas y Gladwell [4,5] proponen estimar el error local de integración comparando el resultado del "integrador" propiamente dicho con aquel dado por un algoritmo de orden superior, de la misma familia, al que podemos llamar "de referencia". La familia de algoritmos usada es aquella presentada por Zienkiewicz y otros en la referencia [6].

2.1 Problemas lineales

Para la resolución de la ecuacion (2) el conjunto de algoritmos resulta:

a) Algoritmo integrador: precisión de primer orden

i) Predictor

$$\begin{aligned}\bar{q}_{n+1} &= q_n + \varphi_1 h \dot{q}_n \\ \dot{\bar{q}}_{n+1} &= \dot{q}_n\end{aligned}\quad (5)$$

ii) Equilibrio

$$(M + \varphi_2 C h + \varphi_3 K h^2) \alpha_n = f(t_n + \varphi_1 h) - C \dot{\bar{q}}_{n+1} - K \bar{q}_{n+1} \quad (6)$$

iii) Corrector

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= q_n + h \dot{q}_n + h^2 \alpha_n / 2 \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + h \alpha_n\end{aligned}\quad (7)$$

b) Algoritmo de referencia: precisión de segundo orden

i) Predictor

$$\begin{aligned}\bar{q}_{n+1} &= q_n + \psi_1 h \dot{q}_n + \psi_2 h^2 \ddot{q}_n \\ \dot{\bar{q}}_{n+1} &= \dot{q}_n + \psi_3 h \ddot{q}_n \\ \ddot{\bar{q}}_{n+1} &= \ddot{q}_n\end{aligned}\quad (8)$$

ii) Equilibrio

$$(\psi_4 M + \psi_5 C h + \psi_6 K h^2) h \beta_n = f(t_n + \psi_1 h) - M \ddot{\bar{q}}_{n+1} - C \dot{\bar{q}}_{n+1} - K \bar{q}_{n+1} \quad (9)$$

iii) Corrector

$$\begin{aligned}q_{n+1} &= q_n + h \dot{q}_n + h^2 \ddot{q}_n / 2 + h^3 \beta_n / 6 \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + h \ddot{q}_n + h^2 \beta_n / 2 \\ \ddot{q}_{n+1} &= \ddot{q}_n + h \beta_n\end{aligned}\quad (10)$$

El error local se puede estimar por diferencia entre las soluciones brindadas por ambos algoritmos:

$$\begin{aligned}E_{n+1} &= q_{n+1}(\text{integrador}) - q_{n+1}(\text{referencia}) = \\ &= \frac{h^2}{2} (\alpha_{n+1} - \bar{\alpha}_{n+1} - \frac{h \beta_{n+1}}{3}) \\ e_{n+1} &= \|E_{n+1}\|\end{aligned}\quad (11)$$

Este error debe ser puesto en escala; es decir, debe ser referido a una magnitud representativa del problema; por ejemplo $e_{n+1}^r = e_{n+1} / \|q_n\|$; para luego compararlo con la tolerancia especificada (*TOL*) de manera de aceptar o no el paso realizado.

Para la elección del siguiente paso de tiempo se intenta que el próximo error sea igual a la tolerancia *TOL*, esto es estimado en base al último error y al siguiente

paso $h_{n+1} = r h$ [7], cumpliéndose:

$$r = \left(\frac{TOL}{\|e_{n+1}\|} \right)^{1/2} \quad (12)$$

A continuación se muestra un ejemplo en el que se utilizó el código VSA23 que implementa el algoritmo dado anteriormente.

Ejemplo 1

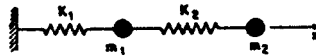


Figura 1 : Oscilador lineal doble

Este caso corresponde a un doble oscilador (figura 1) con frecuencias propias fuertemente separadas. La respuesta del sistema esta dada esencialmente por el oscilador de menor frecuencia, debido a las características de la excitación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 10001 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$q_{10} = 0.002; q_{20} = 10$$

La tolerancia para el error de integración se fijó en $TOL = 1 \times 10^{-4}$. El intervalo de integración fue $[0, 1.4]$, necesiándose 35 pasos de los cuales 6 fueron rechazados; además se efectuaron 442 evaluaciones de residuos, 33 factorizaciones de las matrices de iteración y 340 retrosustituciones. En la figura 2 se observa la evolución de h a lo largo del tiempo.

2.2 Problemas no lineales

En los casos no lineales se debe resolver un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales a cada paso de tiempo, por medio de un algoritmo de tipo iterativo. En este caso el algoritmo puede escribirse de la siguiente manera:

a) Algoritmo integrador:

i) Predictor

$$\begin{aligned} q_{n+\varphi_1}^0 &= q_n + \varphi_1 h \dot{q}_n \\ \dot{q}_{n+\varphi_1}^0 &= \dot{q}_n \end{aligned} \quad (13)$$

ii) Equilibrio (evaluación del residuo en la iteración k)

$$R^k = F(t_n + \varphi_1 h) - M \alpha_n^k - G^{m'}(q_{n+\varphi_1}^k; \dot{q}_{n+\varphi_1}^k) \quad (14)$$

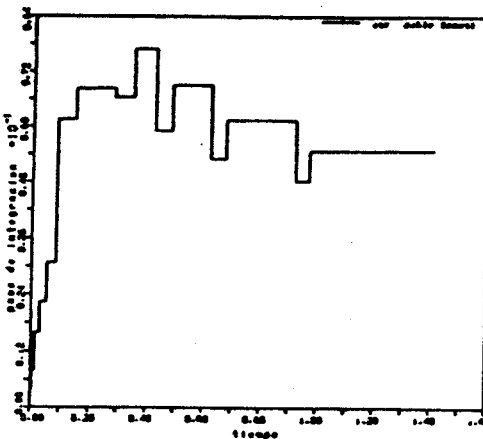


Figura 2 : Evolución del paso de tiempo para el oscilador lineal doble

Si $|R^k| < EPS \rightarrow \text{goto}(\text{iii})$

$$\left[M + \varphi_2 h \frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \Big|_{\dot{q}_{n+\varphi_1}^k} + \varphi_3 h^2 \frac{\partial G}{\partial q} \Big|_{q_{n+\varphi_1}^k} \right] \Delta \alpha^{k+1} = R^k \quad (15)$$

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta \alpha^{k+1}$$

$$\begin{aligned} q_{n+\varphi_1}^{k+1} &= q_{n+\varphi_1}^k + \varphi_3 h^2 \alpha_n^{k+1} \\ \dot{q}_{n+\varphi_1}^{k+1} &= \dot{q}_{n+\varphi_1}^k + \varphi_2 h \alpha_n^{k+1} \end{aligned} \quad (16)$$

goto(ii)

iii) Corrector

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + h \dot{q}_n + h^2 \alpha_n / 2 \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + h \alpha_n \end{aligned} \quad (7)$$

b) Algoritmo de referencia:

i) Predictor

$$\begin{aligned} q_{n+\varphi_1}^0 &= q_n + \psi_1 h \dot{q}_n + \psi_2 h^2 \ddot{q}_n \\ \dot{q}_{n+\varphi_1}^0 &= \dot{q}_n + \psi_3 h \ddot{q}_n \end{aligned} \quad (17)$$

ii) Equilibrio (residuo en la iteración k)

$$R^k = F(t_n + \psi_1 h) - M \{ \psi_4 h \beta_n^k + \ddot{q}_n \} - G^{int}(q_{n+\varphi_1}^k; \dot{q}_{n+\varphi_1}^k) \quad (18)$$

Si $|R^k| < EPS \rightarrow \text{got}\alpha(\text{iii})$

$$\left[\psi_4 h M + \psi_6 h^3 \frac{\partial G}{\partial q} \Big|_{q_{n+\psi_1}^k} + \psi_5 h^2 \frac{\partial G}{\partial \dot{q}} \Big|_{\dot{q}_{n+\psi_1}^k} \right] \Delta \beta^{k+1} = R^k \quad (19)$$

$$\beta^{k+1} = \beta^k + \Delta \beta^{k+1}$$

$$q_{n+\psi_1}^{k+1} = q_{n+\psi_1}^k + \psi_6 h^3 \beta_n^{k+1}$$

$$\dot{q}_{n+\psi_1}^{k+1} = \dot{q}_{n+\psi_1}^k + \psi_5 h^2 \beta_n^{k+1} \quad (20)$$

got $\alpha(\text{ii})$

iii) Corrector

$$q_{n+1} = q_n + h \dot{q}_n + h^2 \ddot{q}_n / 2 + h^3 \beta_n / 6$$

$$\dot{q}_{n+1} = \dot{q}_n + h \ddot{q}_n + h^2 \beta_n / 2 \quad (10)$$

$$\ddot{q}_{n+1} = \ddot{q}_n + h \beta_n$$

La estimación del error, así como la elección del paso siguiente, se efectúan de manera similar al caso lineal.

Ejemplo 2

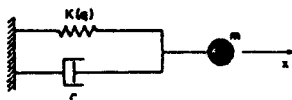


Figura 3 : Oscilador simple no lineal

Se resuelve el sistema no lineal de la figura 3; donde $K(q) = k q^2$, con $k = 5$; $c = 0.01$; $m = 1$, la fuerza exterior es $F(t) = 10$. Los resultados son mostrados en las figuras 4 y 5 (solución y variaciones del paso de tiempo respectivamente). Fueron necesarios 293 pasos de integración de los cuales 45 fueron rechazados. Hubo también 586 factorizaciones y retrosustituciones, así como 1172 evaluaciones de residuos.

2.3 Problemas no lineales con restricciones

Se ha visto que mientras no aparezcan restricciones en el sistema, el algoritmo se comporta bien y en la forma de evaluar el error no se presentan anomalías.

En la simulación de mecanismos, siempre nos encontramos con restricciones en el sistema a resolver; es aquí que comienzan los problemas en la estimación del error de la manera propuesta por Thomas y Gladwell.

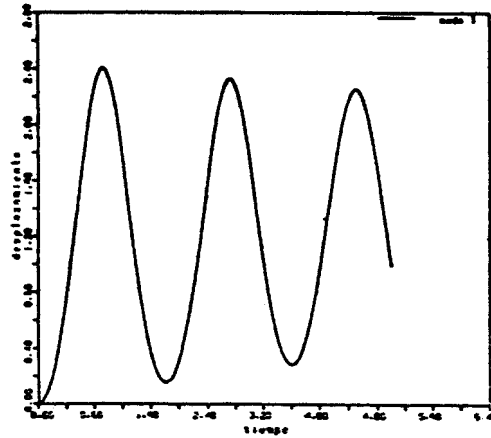


Figura 4 : solución del problema dado
en el ejemplo 2 (no lineal)

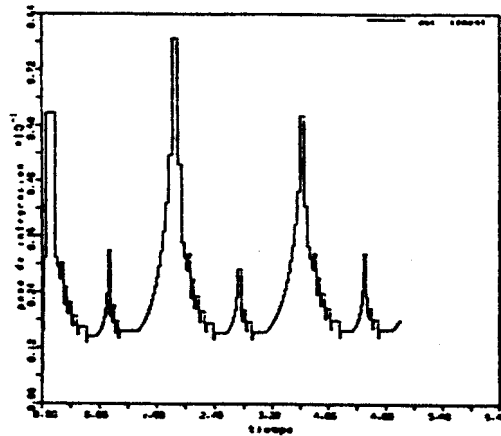


Figura 5 :Evolución del paso h
en el ejemplo 2 (no lineal)

Analizaremos un sistema de la forma siguiente:

$$M_{\phi} \ddot{y}_{\phi} + K_{\phi} y_{\phi} = 0 \quad (21)$$

donde

$$M_{\Phi} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{\Phi} = \begin{bmatrix} K & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$$

$$y_n = \begin{Bmatrix} q_n \\ \lambda_n \end{Bmatrix}$$

q_n son los grados de libertad geométricos (desplazamientos, velocidades y aceleraciones) en el paso n ; λ_n los multiplicadores de Lagrange; K es la matriz de rigidez; M es la matriz de masa y B el gradiente de las restricciones:

$$B = \frac{\partial \Phi}{\partial q} \quad (22)$$

reemplazando y_n en las ecuaciones (5) a (10) podemos obtener:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (M_{\Phi} + K_{\Phi} \varphi_3 h^2)^{-1} \left\{ -K_{\Phi} \bar{y}_n^{\alpha} \right\} \\ \frac{h}{3} \beta_n &= (M_{\Phi} + K_{\Phi} \frac{\psi_6}{\psi_4} h^2)^{-1} \left\{ \frac{1}{3\psi_4} (-M_{\Phi} \bar{y}_n - K_{\Phi} \bar{y}_n^{\beta}) \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

Introduciendo las (23) en (11) y luego de algunas manipulaciones algebraicas [7] se llega a una expresión para el error del tipo

$$E_{n+1,q} = \mathcal{F}(h) + \left(\frac{\psi_1}{3\psi_4\psi_6} - \frac{1}{\varphi_3} \right) \left[M^{-1} B (B^T M^{-1} B)^{-1} B^T q_n \right] \quad (24)$$

el subíndice q en $E_{n+1,q}$ significa que evaluamos el error de integración solo en los grados de libertad geométricos (dejamos de lado las componentes de λ).

Se observa que la medida de error consiste en la suma de dos términos: uno que tiende a cero con el paso de tiempo h y otro independiente del paso de tiempo. En el segundo, el factor $B^T q_n$ no es otra cosa que el cumplimiento de las restricciones. En otras palabras; si nos aseguramos que éstas se cumplan perfectamente, entonces el error se aproximará a cero tanto como lo haga h ; pero si q_n no cumple las restricciones, el error tendrá un "umbral" independiente de h , que será mayor o menor según la precisión con que se calculó q_n , y será variable de paso a paso.

Para ejemplificar este fenómeno, se analizó el péndulo doble graficado en la figura 6. Se realizó un único paso de integración y al término del mismo se evaluó el error con la fórmula (11). Fueron analizados dos casos, uno con un error a dos decimales en las ecuaciones de restricción al instante inicial y otro con ocho decimales de precisión en la verificación de las mismas. La figura 7 muestra la variación del error al final del primer paso con la medida del paso de tiempo. Se

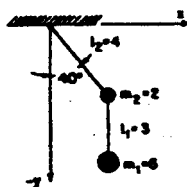


Figura 6 : Péndulo doble

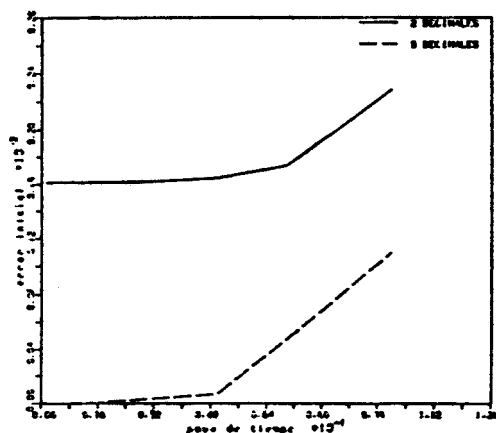


Figura 7 : Variación del error local según h

ve que ambas curvas presentan un "umbral" de variación y que se hace imposible disminuir el error de integración por más que se disminuya el paso de tiempo.

2.3.1 Control de las restricciones

En vista de las experiencias realizadas con el péndulo doble que corroboran lo expresado por la ecuación (24), surge investigar que sucede con las restricciones al pasar de un instante de cálculo al siguiente.

Como se puede ver en las ec. (5) a (10), el integrador, así como el algoritmo de referencia, plantean el equilibrio en un punto intermedio entre t_n y t_{n+1} , a los que llamaremos $t_{n+\varphi}$ y $t_{n+\psi}$ según se trate del integrador o el de referencia, respectivamente (fig.8). Desde estos puntos intermedios, una vez que se llega a la convergencia del problema no lineal, son extrapolados los resultados a t_{n+1} según

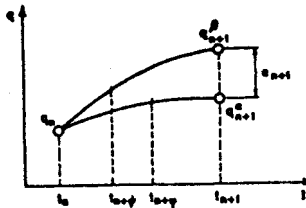


Figura 8 : Puntos de equilibrio en el esquema original

(7) y (10) y es en función de los resultados en t_{n+1} que se estima el error.

Fué verificado para el mismo ejemplo del péndulo doble, que las restricciones se cumplen con una muy buena aproximación en los puntos intermedios, pero al llevar los resultados a t_{n+1} su cumplimiento cae notablemente; por ejemplo para una tolerancia en el residuo de $EPS = 1 \times 10^{-4}$, las restricciones en los puntos medios se verifican en orden de 1×10^{-16} pero luego de extrapolar a t_{n+1} , el orden cambia a 1×10^{-6} .

Basados en lo visto hasta ahora, aparece la necesidad de evaluar el error en un punto donde se verifiquen las restricciones de modo muy preciso. Esto se puede lograr tratando de hacer coincidir el instante de verificación del equilibrio para los dos algoritmos y evaluando el error \bar{e}_{n+1} en vez de e_{n+1} (fig.9).

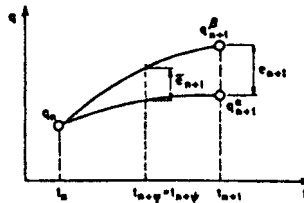


Figura 9 : Puntos de equilibrio comunes

Los parámetros φ ; y ψ ; necesarios para cumplir ese requisito fueron deducidos a partir de las condiciones de estabilidad dadas en [8].

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi_2 = 1.1455; \varphi_3 = 0.5728 \\ \psi_1 = \psi_2 = \psi_4 = 1.1455; \psi_2 = \psi_3 = 0.6561; \psi_6 = 0.2864 \end{aligned} \quad (25)$$

Esta configuración "destraba" el umbral que aparece en el error, visto en la sección 2.3; se comprobó (mediante experimentos numéricos) que cuando h tiende a cero y para exigencias acordes en la tolerancia especificada al residuo, el error calculado también disminuye y se acerca al valor nulo.

Cabe hacer notar que una vez extrapolada la solución del error en t_{n+1} no será el mismo que se estimaba anteriormente.

En las figuras 10 y 11 se muestran los resultados de una integración a paso variable del problema del péndulo doble. Fué usado el esquema corregido de la fig.9 y se compara con la solución dada por el algoritmo de Hilber - Hughes - Taylor [2,3], con un paso de $h = 0.05$.

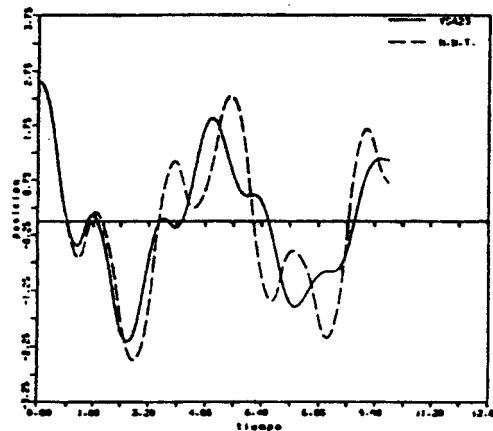


Figura 10 : Evolución de la componente horizontal del nodo 2

3. Estimación del error con un único algoritmo

Se ha visto que es posible (después de algunas correcciones al algoritmo) obtener un método basado en la propuesta de Thomas y Gladwell en [5] que admita y supere las inestabilidades propias de las restricciones en el sistema de ecuaciones diferenciales. No obstante, al comparar los resultados con HHT (figura 10) puede notarse que debido a que VSA23 es de primer orden de precisión, la calidad de la solución es relativamente mala y su costo computacional muy alto, ya que para t de 0 a 10 se necesitaron 486 pasos frente a los 200 de HHT, obteniéndose resultados mas pobres.

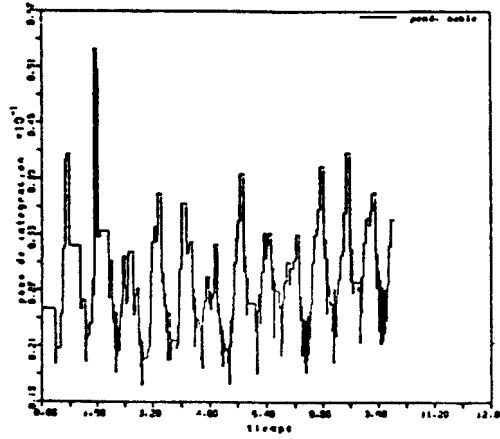


Figura 11 : Marcha de h en función del tiempo

Nos planteamos entonces, la utilización del algoritmo HHT como integrador, que tiene una probada eficacia en MECANO [2] y su orden de precisión es 2.

Para implementar en HHT un control de paso de tiempo, es necesario encontrar una forma de estimar el error local sin que aparezcan problemas con las restricciones. Tomemos el sistema (1) y escribamos el algoritmo HHT presentado en [2] de la siguiente forma:

i) Predictor

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1}^0 &= \mathbf{q}_n + h \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}_n \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^0 &= \dot{\mathbf{q}}_n + h \ddot{\mathbf{q}}_n \\ \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^0 &= \ddot{\mathbf{q}}_n \end{aligned} \quad (26)$$

ii) Equilibrio (iteración k)

$$\begin{aligned} \mathbf{M} h \delta_{n+1} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{G}^{int}(\mathbf{q}_{n+1}^k, \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^k) + \alpha \mathbf{G}^{int}(\mathbf{q}_n, \dot{\mathbf{q}}_n) = \\ (1 - \alpha) \mathbf{G}_{n+1}^{ext} + \alpha \mathbf{G}_n^{ext} \end{aligned} \quad (27)$$

iii) Corrector (iteración k)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1}^{k+1} &= \mathbf{q}_{n+1}^k + \beta h^3 \delta_{n+1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^{k+1} &= \dot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + \gamma h^2 \delta_{n+1} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^{k+1} &= \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}^k + h \delta_{n+1} \end{aligned} \quad (28)$$

Al resolver el problema no lineal de (27), por ejemplo con Newton - Raphson, se evalúa el residuo (al que se le exige sea menor que una tolerancia EPS) y si esto es satisfecho, quedan los últimos valores de desplazamiento, velocidad y aceleración calculados (q_{n+1}^{k+1} , \dot{q}_{n+1}^{k+1} , \ddot{q}_{n+1}^{k+1}) como solución.

Se debe notar que la incógnita δ_{n+1} es en realidad la derivada de las aceleraciones:

$$\delta_{n+1} = \frac{\ddot{q}_{n+1} - \ddot{q}_n}{h_{n+1}} \approx \left. \frac{d\ddot{q}}{dt} \right|_{t_{n+1}} \quad (29)$$

Podemos entonces evaluar el error cometido en t_{n+1} de la forma que proponen Zienkiewicz y otros [6] para un algoritmo de orden p como:

$$E_{n+1} = \frac{q_{n+1}^{(p+1)} h^{p+1}}{(p+1)!} \quad (30)$$

En HHT el orden del polinomio de aproximación p en $[t_n, t_{n+1}]$ es igual a 3; luego:

$$E_{n+1} = \frac{h^4}{24} \left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{n+1} \quad (31)$$

donde la derivada de δ_{n+1} puede ser aproximada en la forma:

$$\left. \frac{d\delta}{dt} \right|_{n+1} = \frac{\delta_{n+1} - \delta_n}{h_{n+1}} \quad (32)$$

Se realizaron experiencias numéricas evaluando el error de esta última forma (manteniendo h constante), y se comprobó la eficacia del método para problemas con y sin restricciones. El esquema no presenta anomalías cuando h tiende a cero.

Se analizó la evolución del error local medido con este último procedimiento para tres casos.

- a) péndulo doble visto en 2.3 .
- b) oscilador lineal simple: $\ddot{q} + 100q = 0$

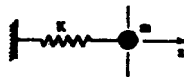


Figura 12 : Oscilador lineal simple

- c) problema de impacto: $\ddot{q} + G(q) = 0$ con $G(q) = 100q$ para $q < 0.25$ y $G(q) = 2000$ en otras posiciones de q

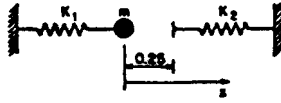


Figura 13 : Problema de impacto

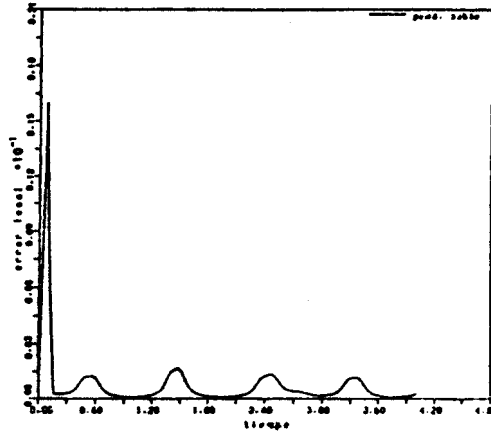


Figura 14 : Error en el péndulo doble

En todos los casos, el intervalo de integración fue $[0,2]$; los pasos de tiempo fueron: $h_s = 0.04$; $h_b = 0.033yh_s = 0.02$. En las figuras 14 y 15 pueden verse las variaciones en la estimación de error.

4. Conclusiones

Hemos mostrado que, cuando se trata de analizar dinámica de mecanismos con algoritmos de paso variable, una de las facetas en las que hay que poner mayor cuidado es la evaluación del error.

Entre los dos métodos presentados en este trabajo, el segundo brinda muy buenos resultados sin cambiar la forma del integrador y lo que es mas importante tiene precisión de segundo orden. Es debido a esto que a priori nos inclinamos en favor de HHT, con la estimación de error prevista por Zienkiewicz y otros [6] y modificando h según (20).

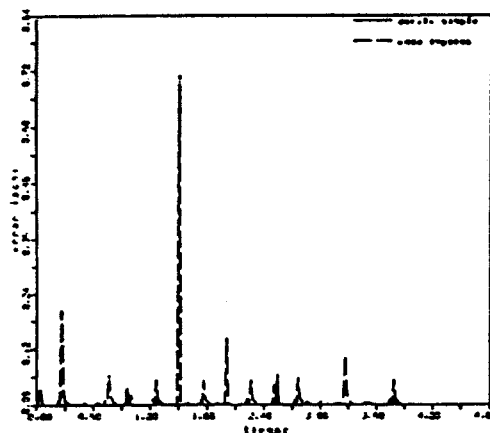


Figura 15 : Error en oscilador lineal e impacto

Actualmente nos encontramos en etapa de experimentación y seguimiento - para distintos casos típicos- de la segunda propuesta, así como su implementación a modo de test en el programa de análisis de mecanismos flexibles "MECANO" [2].

Referencias

1. A. Cardona, *An Integrated approach to mechanism analysis*, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Aplicadas, Universidad de Lieja (1989).
2. A. Cardona, M. Géradin, *SAMCEF-Module d'analyse de mécanismes MECANO (manuel d'utilisation)*, Facultad de Ciencias Aplicadas, Universidad de Lieja (1987).
3. A. Cardona, M. Géradin, *Time integration of the equations of motion in mechanism analysis*, Computers and Structures, vol 33, 801-820 (1989).
4. R.M. Thomas, I. Gladwell, *Variable-order variable-steps algorithms for second-order systems. Part 1: The methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 26, 39-53 (1988).
5. I. Gladwell, R.M. Thomas, *Variable-order variable-steps algorithms for second-*

- order systems. Part 2: The Codes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 26, 55-80 (1988).
6. O.C. Zienkiewicz, W.L. Wood, N.W. Hine, R.L. Taylor, *A unified set of single step algorithms; part 1: General formulation and applications*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 20, 1529-1552 (1984).
 7. A.Cassano, A. Cardona, *Esquemas de paso variable en el análisis de mecanismos por elementos finitos*, Informe interno GTM, INTEC, Conicet / UNL, 1990.
 8. W.L. Wood, *A unified set of single step algorithms; part 2: Theory*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 20, 2303-2309 (1984).
 9. H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, R.L. Taylor, *Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics*, Earthquake engineering and structural dynamics, vol. 5, 283-292 (1977).
 10. L.F. Shampine, M.K. Gordon, *Computer solution of ordinary differential equations. The initial value problem*, W.H. Freeman and Company, (1975).