

MODELOS DE TURBULENCIA Y SU APLICACION EN FLUJOS INTERNOS

PIERINI, Jorge O.

División Mecánica Computacional
Centro Atómico Bariloche - CNEA

RESUMEN

Se realizó un análisis de los modelos de turbulencia de cero, una y dos ecuaciones, además de los modelos de ecuaciones de esfuerzo, estableciendo principalmente sus ventajas y desventajas para los distintos flujos. Entre todos los modelos que se han analizado, el más simple y el más utilizado en la mayoría de los flujos bidimensionales es el de dos ecuaciones ($k-\epsilon$), donde k es la energía cinética turbulenta y ϵ es la tasa de disipación.

Las ecuaciones básicas utilizadas en la resolución numérica son las de momento de Reynolds conjuntamente con las dos ecuaciones ($k-\epsilon$) del modelo de turbulencia. La formulación numérica general esta basada en el método de GALERKIN y la parte advectiva de las ecuaciones fueron tratadas con el método de las características. Los resultados computacionales que se presentan, en la predicción de flujos internos, son comparados con los obtenidos por otros autores.

ABSTRACT

This paper presents a brief account the advantages and disadvantages of various turbulence models used in the computation of turbulent flows. The two-equations models appear to be the simplest and more used ones in most 2D flows.

The basic equations are the Reynolds averaged momentum equations in conjunction with a two-equation ($k-\epsilon$) turbulence model. The general numerical formulation is based on Galerkin's method and the advection parts of the equations are treated by the method of characteristics. Computational results are presented and compared with other author's.

Introducción

Es difícil dar una precisa definición de turbulencia, pero es ampliamente reconocido que es la clase de fluido más complicado, siendo altamente irregular, no estacionario, tridimensional, involucrando números de Reynolds relativamente grandes, vorticidad, disipación y difusividad. Debido a estas complejidades, el movimiento turbulento y sus fenómenos asociados de transferencia de calor y masa son muy difíciles de describir y predecir teóricamente. Las ecuaciones de Navier-Stokes, que gobiernan el movimiento de los fluidos, no pueden ser resueltas directamente para cualquier flujo turbulento de interés práctico, debido al problema de representación de todas las escalas del flujo.

Hay dos posibles caminos para la predicción de flujos turbulentos; uno es simulando las grandes turbulencias y el otro es mediante una aproximación estadística. La primera es una técnica relativamente nueva que incluye la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes tridimensionales no estacionarias, para el movimiento turbulento en gran escala, junto con un modelo sub-grilla para los estadísticos del movimiento en pequeña escala. Estos modelos todavía están en desarrollo y aunque pueden ser bastante exactos, son muy caros computacionalmente. Por eso, las aproximaciones estadísticas son hasta el momento el único método práctico para simular flujos turbulentos. Estas ecuaciones describen la distribución promediada estadísticamente de la velocidad, presión, etc., o cualquier parámetro de interés.

Las ecuaciones de momento contienen esfuerzos turbulentos o de Reynolds ($-\rho u_i u_j$), donde u_i y u_j son fluctuaciones del campo de velocidad. Físicamente estas correlaciones expresan el transporte turbulento del momento. Aunque pueden ser derivadas ecuaciones diferenciales de transporte para $u_i u_j$, estas no resultan un sistema cerrado de ecuaciones, debido a la ocurrencia de correlaciones de mayor orden. Estas cantidades de mayor orden son gobernadas por un número infinito de ecuaciones de correlaciones. Esto es conocido como el problema de clausura de la turbulencia y a los efectos de obtener un sistema cerrado el conjunto de ecuaciones debe ser truncado en algún nivel, introduciendo aproximaciones para expresar las correlaciones incógnitas en términos de correlaciones de menor orden y/o cantidades del flujo medio. La elección del conjunto de ecuaciones, la provisión de las aproximaciones para la clausura del problema y las ecuaciones de flujo medio constituyen el modelo de

turbulencia.

El objetivo del presente trabajo fué realizar una revisión de los modelos turbulentos, estableciendo principalmente sus ventajas y desventajas en la aplicación a distintos tipos de flujos. Posteriormente fué seleccionado para realizar una experiencia numérica el modelo k- ϵ , por ser el más utilizado y el que mejor se ajusta a los flujos bidimensionales. La formulación numérica general esta basada en el método de galerkin y la parte advectiva de las ecuaciones fueron tratadas con el método de las características. Los resultados computacionales presentados, en la predicción de flujos internos, fueron comparados con los obtenidos por otros autores.

Ecuaciones de Flujo Medio

Si asumimos que las variables de flujo son de la forma $U = \bar{U} + u'$, donde \bar{U} es el valor medio de U y u' es la fluctuación sobre la media, y si las introducimos en las ecuaciones de continuidad y de momento y posteriormente aplicamos un promedio en el tiempo, el sistema de ecuaciones quedaría de la forma;

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -1/\rho \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 \bar{U}_i - \bar{\epsilon} R_{ij} / \partial x_j \quad [1]$$

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = 0 \quad [2]$$

donde $R_{ij} = u_i u_j$ son los esfuerzos de Reynolds. A los efectos de obtener un modelo de turbulencia es necesario establecer una manera de evaluar R_{ij} en términos de la variable U_i , de estadísticos turbulentos de mayor orden y de algunas constantes evaluadas de datos experimentales. Los modelos empleados para la clausura de las ecuaciones del flujo medio son presentados más adelante.

Clasificación de los Modelos de Turbulencia

Estos modelos pueden ser clasificados de varias formas, pero frecuentemente la mayoría de los autores los ordena de acuerdo al número de ecuaciones diferenciales que tienen que resolverse, además de las ecuaciones de flujo medio. Bajo estas condiciones se pueden ordenar de la siguiente manera;

a) Modelos sin ecuaciones.

Estos modelos usan solamente las ecuaciones de transporte para el flujo medio y no para las cantidades turbulentas. Relacionan las correlaciones turbulentas directamente con las cantidades de flujo medio. El modelo de longitud de mezcla de Prandtl, es uno de los más populares y relaciona la viscosidad turbulenta con el campo de velocidades medias según la siguiente relación;

$$\mu_t = \rho l_m^2 [U_{ij} (U_{ij} + U_{ji})]^{1/2} \quad [3]$$

donde l_m es la longitud de mezcla, la cual se da en forma empírica. Otros modelos populares son el de dos capas realizado por Cebeci y Smith, quien emplea cerca de la pared la relación de longitud de mezcla de Van Driest y en la región externa un modelo algebraico de viscosidad turbulenta (Rodi[1980]).

Los modelos sin ecuaciones funcionan bastante bien en un amplio rango de flujos de corte turbulento, pero requieren distintas constantes empíricas para diferentes problemas (Rodi[1980]). Es decir, carecen de universalidad por ser tan problema dependiente. Otra desventaja es que estos modelos están basados en la suposición que la turbulencia está en equilibrio local, es decir sin introducción de modificaciones ad-hoc los modelos no pueden sumar los efectos de transporte de turbulencia. Esto significa que la turbulencia es disipada en la misma forma que esta es producida (Visbal et al.[1984], Rodi [1986]). También son de poco uso en flujos complejos debido a la dificultad que se tiene en especificar la distribución de la longitud de mezcla.

En el caso de flujos limitados, el modelo de longitud de mezcla está entre los mejores para predecir los flujos de capa límite. La universalidad de las constantes son bastante altas y la separación de capas límites bajo gradientes de presión adverso permanecen difíciles de predecir, pero se logra mediante métodos más avanzados. Este modelo no es útil cuando el ancho de la capa de mezcla no puede identificarse, por ejemplo en flujos con expansión súbita. Su principal ventaja es su fácil implementación y su economía computacional, principalmente en 3D.

b) Modelos con una ecuación.

Para superar las limitaciones antes mencionadas sobre la hipótesis de longitud de mezcla, se desarrollaron modelos que incorporan los efectos de transporte de las cantidades turbulentas. Para lo cual requieren la solución de una ecuación para la energía cinética turbulenta, la cual puede ser derivada de las ecuaciones de Navier-Stokes. En el modelo k-l de Prandtl la viscosidad turbulenta es calculada utilizando la tan llamada expresión de Kolmogorov- Prandtl;

$$\mu_t = C_\mu \rho k^{1/2} l \quad [4]$$

donde C_μ es una constante empírica. Sin embargo como sucede también en los modelos sin ecuaciones, la longitud de escala en estos modelos hay que especificarla algebraicamente, volviendo a estos modelos muy flujo dependientes. Otros modelos que se aplicaron a flujos de capa límite de pared son el de Bradshaw et al. [1967] (Lakshminarayana [1986]).

Los modelos con una ecuación no son muy populares ya que son levemente mejores que los modelos sin ecuaciones. La principal desventaja es la necesidad de prescribir la distribución de la longitud de escala, esta es fácilmente dada solo para flujos de tipo capa límite. La mayoría de los investigadores han abandonado estos modelos en favor de los de dos ecuaciones o más, pero aún es posible realizar mejoras en estos.

c) Modelos con dos ecuaciones.

Estos modelos usan principalmente el concepto de viscosidad turbulenta y como se mencionó anteriormente la longitud de escala es determinada de una segunda ecuación de transporte. Todas las ecuaciones de longitud de escala que se propusieron tienen como variable independiente a $z = k^m / l^n$, donde m y n son constantes.

El grupo del Imperial College conducido por el Dr. D. Spalding son los que más han experimentado con estos modelos, principalmente los k-kl, k-w y k-e (Ilegbusi [1989], Malin [1986], Speziale [1987], Malin et al. [1988]). Su principal defecto es la necesidad de introducir cantidades adicionales para manejar las regiones cercanas a la pared (Ng [1971]). Por esta razón no se utiliza para flujos complejos, donde las paredes juegan un rol muy importante.

Jones y Launder [1972] y Launder y Spalding [1974] mejoraron una ecuación para la tasa de disipación de la energía turbulenta ($\epsilon = k^{3/2}/l$), propuesta inicialmente por Harlow y Nakayama [1968]. Spalding [1969] y Saffman [1970] propusieron una ecuación para el cuadrado de las fluctuaciones de vorticidad promediadas en el tiempo ($w = k/l^2$). El k-w ha sido empleado satisfactoriamente en la predicción de numerosos flujos turbulentos. La principal desventaja ha sido que para ajustar la ley logarítmica de la pared se debe variar una constante respecto de la distancia a la pared.

Las experiencias realizadas con estos modelos muestran que todas las segundas variables, aparte de ϵ , necesitan un término de corrección cerca de la pared.

c1) Modelo k- ϵ

El k- ϵ es el método más popular principalmente por dos razones; la ecuación de ϵ se deriva de las ecuaciones de Navier-Stokes y el número de Prandtl para ϵ tiene un valor razonable que se ajusta a datos experimentales lejos de la pared (Rodi[1980]). Su versión standard es presentada para dar una fácil referencia en discusiones futuras. Este modelo utiliza el concepto de viscosidad turbulenta de Boussinesq y relaciona estas viscosidades con k y ϵ mediante la relación de Kolmogorov-Prandtl; notando que $\epsilon = k^{3/2}/l$;

$$\mu_t = \rho C_\mu k^2 / \epsilon \quad [5]$$

donde C_μ es una constante empírica. La energía cinética turbulenta y la tasa de disipación es calculada según las siguientes ecuaciones, estas son obtenidas semi-empíricamente a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes;

$$\begin{aligned} \partial k / \partial t + U_i \partial k / \partial x_i &= 1/\rho \partial / \partial x_i [(\mu + \mu_t / \sigma_k) \partial k / \partial x_i] + \\ &\underbrace{\mu_t / \rho (\partial U_i / \partial x_k + \partial U_k / \partial x_i) \partial U_i / \partial x_k}_{P} - \epsilon \end{aligned} \quad [6]$$

donde σ_k es el número de Prandtl para la difusión y P es la tasa de producción volumétrica de la energía cinética.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = 1/\rho \frac{\partial}{\partial x_i} [(\mu + \mu_t / \sigma_\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i}] +$$

$$\underbrace{C_1 \mu_t \epsilon / (\rho k) (\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i}) \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - C_2 \epsilon^2 / k}_{G - D} \quad [7]$$

donde C_1 y C_2 son constantes empíricas. Los valores standard de las 5 constantes que aparecen en el modelo son:

$$C_1 = 0.09 \quad C_2 = 1.44 \quad C_3 = 1.92 \quad \sigma_k = 1 \quad \sigma_\epsilon = 1.314$$

Este modelo standard es solamente aplicable a flujos o regiones donde el número de Reynolds local es grande, por eso es que no puede ser aplicado cerca de la pared, ya que los efectos viscosos se vuelven dominantes.

En el modelado se pueden identificar dos áreas principales de potencial debilidad, una es el uso del concepto de viscosidad turbulenta y la otra, es el modelo más simple que se usó para representar los términos que describen la creación y destrucción de ϵ . El concepto de viscosidad turbulenta puede fallar en ciertos casos, por ejemplo en aquellos donde el campo de turbulencia es no-isotrópico y también donde el transporte convectivo de cada uno de los esfuerzos turbulentos son muy importantes. Para algunos de estos flujos el modelo de esfuerzo algebraico puede introducirse dentro del k- ϵ a fin de examinar estos efectos en una manera más apropiada.

En vista del modelo simplista aplicado a la ecuación ϵ , realmente no nos tiene que sorprender que falle para algunos flujos. En la última década se realizaron algunos intentos para desarrollar formas de la ecuación ϵ mucho más aplicables. Extensas discusiones sobre estas propuestas se pueden encontrar en Launder [1984] y Rodi [1980]. Aunque estas propuestas producen mejoras sustanciales en algunos flujos, en otros las predicciones son totalmente erróneas, por eso es que no se utilizan (Markatos [1986]).

En general las predicciones de modelos de transporte como el k- w y el k- ϵ concuerdan bastante bien con los datos experimentales para:

- Capas límites en 2D y chorros a lo largo de paredes planas.
- Chorros en 2D, onditas y longitudes de mezcla.

- Flujos bidimensionales en tubos, canales, difusores y anulares.
- Algunos flujos en 3D sin fuertes remolinos, variaciones de densidad o reacciones químicas.
- Algunos flujos influenciados por deriva y efectos de bajo número de Reynolds.

c2) Aproximación cerca de la pared

La condición de no deslizamiento en la pared asegura que en alguna región de la capa de pared turbulenta los efectos viscosos deben de ser grandes comparados con los procesos de transporte. La representación de estos procesos dentro de un modelo matemático genera dos problemas. Primero, el modelo de turbulencia para esta región debe considerar el problema de incorporar apropiadamente efectos viscosos dentro del sistema de ecuaciones empleado. Segundo, se requiere una malla muy densificada para resolver las variaciones rápidas del flujo que ocurren dentro de esta región.

Extensiones al modelo k- ϵ , como la del bajo número de Reynolds y las funciones de pared, fueron desarrolladas para permitir la integración de las ecuaciones directamente a través de la subcapa viscosa a la pared (Patel et al.[1985], So et al.[1986], [1988], Chien [1982]).

c2a) Método de las funciones de Pared

Con esta aproximación la subcapa viscosa es puenteada empleando formulas empíricas, llamadas funciones de pared, para dar condiciones de borde cerca de la pared a las ecuaciones de momento y de transporte turbulento. Estas formulas conectan las condiciones de pared a las variables dependientes en los nodos de la red cercanos a la misma. Estos nodos estan dentro del fluido totalmente turbulento. La ventaja de esta aproximación es que escapa a la necesidad de extender los cálculos a la pared y elude la necesidad de responder por los efectos viscosos en el modelo turbulento (Nagano et al.[1987], [1988], Bernard [1982], [1986]).

Estos méritos tienen un efecto muy beneficioso en la economía del proceso de predicción numérica, especialmente en flujos complejos en 3D (Choi et al. [1989]). Las formulas de las funciones de pared son una mezcla de análisis y datos experimentales para capas cerca de la pared en equilibrio local, aunque existen versiones extendidas que son más útiles para flujos separados. Extensos comentarios sobre estas funciones pueden encontrarse en Launder y Spalding [1974] y Launder [1984], [1988].

c2b) Método de Bajo Número de Reynolds

La alternativa al método anterior es usar un análisis de la red densificada donde los calculos son extendidos a través de la subcapa viscosa afectada, suficientemente cerca de la pared para aplicar condiciones de borde de flujo laminar. Algunos autores han desarrollado modelos turbulentos o extendido algunos ya existentes a fin de investigar en esta región de bajo número de Reynolds como también en la de flujo turbulento fuera de la subcapa viscosa.

Jones y Launder [1972], [1973], Launder y Sharma [1974], Lam y Bremhorst [1981], Chien [1982] y Patel et al. [1985] son algunos de los que realizaron una revisión de estos modelos, obteniendo resultados comparables en todos los casos y una eficiencia superior con respecto a los demás modelos. Hanjalic y Launder [1976] desarrollaron una extensión de bajo número de Reynolds del modelo de transporte de esfuerzos de Reynolds.

En el interés de la economía y estabilidad numérica muchos investigadores emplean ahora modelos con o sin una ecuación para utilizar en la región de bajo número de Reynolds. Fuera de la misma se utilizan modelos de mayor orden, pero estos modelos son muy caros computacionalmente.

Amano [1984] desarrolló un modelo cerca de la pared de dos y tres capas, parecido al de Chieng y Launder [1980] excepto por el tratamiento de los términos de

generación y destrucción en la ecuación de ϵ . Este modelo, cerca de la pared, ha sido útil para mejorar la predicción de tasas de transferencia de calor en la pared, pero no es bueno en la predicción de campos de flujos (Nallasamy [1987]).

d) Modelos con ecuaciones de esfuerzos de Reynolds.

Los modelos de dos ecuaciones fueron usados extensivamente en calculos ingenieriles, pero tienen sus limitaciones (Pollard et al. [1989]). La principal es la suposición de la viscosidad turbulenta isotrópica, los mismos valores de μ_t son tomados para diferentes $\bar{u}_i \bar{u}_j$. En algunos flujos esta suposición es demasiado simple, por ejemplo cuando están presentes fuerzas del cuerpo. Además, todos los modelos analizados asumen que el estado local de la turbulencia puede ser caracterizada por una escala de velocidad ($k^{1/2}$) y que cada uno de los esfuerzos de Reynolds pueden estar relacionados con esta escala.

Las ecuaciones para $\bar{u}_i \bar{u}_j$ pueden obtenerse en forma exacta, pero contienen correlaciones de mayor orden que tienen que ser modeladas para obtener un sistema cerrado (Amano [1988], [1987]). La derivación de las ecuaciones exactas tienen la ventaja de que son introducidos automáticamente términos debidos a importantes efectos anisotrópicos. Los modelos que emplean ecuaciones de transporte para $\bar{u}_i \bar{u}_j$ son llamados esquemas de clausura de segundo orden, y fueron propuestos por algunos grupos de investigación, siendo el más notable el de Launder y asociados (Launder et al. [1975]).

Todo el modelo de esfuerzos consiste en seis ecuaciones de transporte para los esfuerzos de Reynolds y una ecuación para la longitud de escala. La solución de todas estas ecuaciones más las de flujo medio no son tarea fácil y computacionalmente son muy caras. Por eso se realizaron propuestas para simplificar este sistema de ecuaciones reduciéndolas a expresiones algebraicas, reteniendo todavía la mayoría de sus características básicas. Esta aproximación es llamada modelo de esfuerzo algebraico.

En conclusión, un modelo de esfuerzos de Reynolds completo puede dar una aproximación más real y rigurosa en campos complejos de tensiones asociados con curvaturas, rotación y otros efectos (Gibson et al.[1981], Hanjalic et al.[1972], [1979]). Sin embargo, estos modelos no han sido totalmente probados ya que el esfuerzo computacional que requieren hace que los investigadores se inclinen por los de dos ecuaciones (k- ϵ).

e) Modelo de esfuerzo algebraico

El modelo más sencillo es despreciar en la ecuación de esfuerzos original los términos de convección y difusión. Sin embargo, Rodi [1980] propuso una aproximación más válida asumiendo que el transporte de $\bar{u}_i \bar{u}_j$ es proporcional al transporte de k mediante el factor de proporcionalidad $\bar{u}_i \bar{u}_j / k$. Este autor recomendo el uso de una aproximación mucho más simple para los esfuerzos de corte, en cambio para los esfuerzos normales utilizar una más general. Introduciendo estas aproximaciones, las ecuaciones de transporte para cada una de las correlaciones turbulentas se reducen a expresiones algebraicas para $u_i u_j$ que contienen la energía turbulenta, los gradientes de las cantidades de flujo medio y la longitud de escala turbulenta. Estas expresiones son bastantes extensas y no serán tratadas en el presente trabajo (Rodi[1980]).

A lo mencionado anteriormente, tienen que resolverse las ecuaciones de transporte para k y longitud de escala a los efectos de completar el modelo turbulento. De este modo, los modelos de esfuerzo algebraico son en la mayoría de los casos extensiones de los modelos con dos ecuaciones, explicando efectos no isotrópicos como la influencia de curvaturas de líneas de corriente. Buenos resultados se encuentran en flujos con regiones de flujo secundarios, como en caños no circulares. Por último, estos modelos no son útiles cuando es importante el transporte de $\bar{u}_i \bar{u}_j$ y también en situaciones de difusión contra el gradiente (Martinuzzi et al.[1989]).

Modelo k- ϵ : Implementación

De lo analizado anteriormente sobre los modelos de flujo turbulento se ha seleccionado al modelo de dos ecuaciones (k-ε) para efectuar una experiencia numérica. Se analizó el flujo turbulento en un canal bidimensional cerrado completamente desarrollado con Re=20000. Para una mayor claridad escribiremos a continuación las ecuaciones de momento y continuidad para flujos turbulentos incompresibles. Hay que notar que las derivadas con respecto a x o t son indicadas con una coma (,) seguida por 'i' o 't' y además usamos la notación de Einstein.

$$(\rho U_i)_{,t} + (\rho U_i U_j)_{,j} = -P_{,i} + (\tau_{ij} - \rho \overline{u_i u_j})_{,j} \quad [8]$$

$$U_{j,j} = 0 \quad [9]$$

donde U_i es la velocidad media, ρ es la densidad del fluido, $-\rho \overline{u_i u_j}$ es el tensor de Reynolds, P_i es la presión media y τ_{ij} es el tensor de esfuerzos viscosos, el cuál está definido por;

$$\tau_{ij} = \mu (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad [10]$$

donde μ es la viscosidad molecular. La función principal del tensor de Reynolds es el transporte convectivo de momento producido por las fluctuaciones turbulentas. Este término introduce nuevas ecuaciones (incógnitas) al problema y es necesario realizar aproximaciones sobre el mismo a fin de encontrar una clausura al modelo. Una de las primeras utilizadas para cerrar este sistema es suponer que el tensor de Reynolds tiene una forma de tipo gradiente (proporcional al gradiente de velocidad), esta es conocida como la aproximación de Boussinesq y su constante de proporcionalidad es la viscosidad turbulenta. Entonces podemos expresar el tensor de Reynolds como;

$$-\rho \overline{u_i u_j} = \mu_t (U_{i,j} + U_{j,i}) - 2/3 \rho k \delta_{ij} \quad [11]$$

donde μ_t es la viscosidad turbulenta, δ_{ij} es el delta de Kronecker y k es la energía cinética turbulenta ($\overline{u_i u_i} / 2$). Con lo señalado podemos redefinir la presión como;

$$P^* = P + 2/3 \rho k \quad [12]$$

entonces, introduciendo esta modificación en la ecuación [8] el sistema quedaría;

$$(\rho U_i)_{,i} + (\rho U_j U_i)_{,j} = -P_{,i} + \mu_e (U_{i,j} + U_{j,i})_{,j} \quad [13]$$

$$U_{i,j} = 0 \quad [14]$$

donde $\mu_e = \mu + \mu_t$ y es la denominada viscosidad efectiva. A los efectos de resolver este sistema dinámico debemos especificar el valor de la viscosidad turbulenta, obtenido en base a análisis dimensional, como;

$$\mu_t = \rho C_\mu k^2/\epsilon \quad [15]$$

Por eso, para resolver la ecuación anterior se necesitan las ecuaciones de transporte para k y ϵ ;

$$(\rho k)_{,i} + \rho U_j k_{,j} = [(\mu + \mu_t/\sigma_k) k_{,j}]_{,j} + \mu S - \rho \epsilon \quad [16]$$

$$(\rho \epsilon)_{,i} + \rho U_j \epsilon_{,j} = [(\mu + \mu_t/\sigma_\epsilon) \epsilon_{,j}]_{,j} + C_1 C_\mu \rho k S - C_2 \epsilon^2/k \quad [17]$$

donde S es el término fuente definido como $S = (U_{i,j} + U_{j,i})U_{i,j}$, σ_k y σ_ϵ son el número de Prandtl para la difusión de k y ϵ respectivamente, C_1 , C_2 y C_μ son constantes, dadas anteriormente. A los efectos de resolver el sistema completo de ecuaciones [13-17], debemos especificar las condiciones de borde impuestas al problema.

En la pared se aplica la condición de no adherencia, es decir las velocidades medias y sus fluctuaciones son nulas. En cambio la tasa de disipación en esa capa no es cero. Cuando la condición de borde es especificada en la pared, las ecuaciones deben ser integradas a través de la subcapa viscosa. Un problema es que los gradientes son muy grandes y la grilla tiene que ser muy fina para poder encontrar una solución, volviendo muy caros los cálculos. Por otra parte, el número de Reynolds local de turbulencia es pequeño y el transporte molecular se vuelve importante, es decir este modelo sería aplicable en altos números de Reynolds. Sin embargo, la integración a través de la subcapa viscosa no es necesaria, ya que existen leyes empíricas suficientemente universales que conectan las condiciones de pared a las variables dependientes justo en la región totalmente turbulenta.

La ley universal de la pared es una de las más aplicadas y se expresa como; (Schlichting [1968])

$$U_e = U / \kappa \ln(9 \delta Y^+) \quad [18]$$

$$U_e = \delta \tau_w / \rho \quad [19]$$

donde U_e es la velocidad tangencial en la capa límite δ , U_w es la velocidad friccional, κ es la constante de von Karman (0.4), $Y^+ = Y \rho U / \mu$ es la distancia adimensional a la pared y τ_w es la tensión de corte en la pared.

Esta ley debe aplicarse a puntos cuyo valor de Y se encuentren entre $30 < Y < 100$. En la región Y los esfuerzos de Reynolds son aproximadamente constantes, la convección y difusión de estos esfuerzos son despreciables, es decir que prevalece el equilibrio local. Esto implica que la producción de energía cinética turbulenta es igual a la disipación y agregándole que la tensión de corte es aproximadamente igual al esfuerzo de corte en la pared nos conduce a;

$$k_w / U_e^2 = 1 / \delta C \quad [20]$$

donde k_w es la energía cinética turbulenta en la pared. Como la producción es igual a la disipación, entonces;

$$P = -\overline{u'v'} \partial U / \partial Y = U_e^2 / \kappa Y \quad [21]$$

$$-\overline{u'v'} = U_e^2 \quad [22]$$

usando la ley logarítmica podemos obtener $\partial U / \partial Y$ y reemplazando nos quedaría;

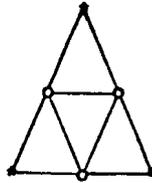
$$\epsilon_w = U_e^2 / \kappa Y \quad [23]$$

donde ϵ_w es la tasa de disipación en la pared.

Estas condiciones de borde de k_w y ϵ_w son las utilizadas en la mayoría de los modelos y nosotros las utilizaremos en nuestro ejemplo. En el eje medio del canal se impone una condición de simetría, en la entrada y salida del mismo tracción nula y además un gradiente de presión.

La formulación numérica general esta basada en el método de Galerkin y la parte advectiva de las ecuaciones fueron tratadas con el método de las características. El sistema matricial resultante de la discretización del conjunto de ecuaciones es no lineal y están

acopladas entre sí. El sistema completo es resuelto desacoplando velocidad y presión por un lado y k y ϵ por el otro. Las ecuaciones de momento y continuidad son resueltas con una viscosidad turbulenta conocida del cálculo previo de k - ϵ . Las ecuaciones de transporte utilizan también valores previos del campo de velocidad y viscosidad. El elemento utilizado para la discretización es triangular y puede verse a continuación. La presión es lineal en cada elemento y continua en el dominio. La velocidad es lineal en cada subelemento y también continua. Las variables k y ϵ son calculadas en el mismo espacio de discretización que la velocidad. El sistema algebraico es resuelto mediante la utilización del algoritmo de gradientes conjugados.



* Presión, Velocidad
 k y ϵ

o Velocidad, k y ϵ

Resultados

En las figuras 1, 2 y 3 se muestran los resultados del campo de velocidad, K y ϵ para el problema unidimensional propuesto. Como se puede observar, las estimaciones realizadas por el modelo son comparadas con las obtenidas por otros autores (Laufer[1950], Carrica et al.[1990]). Los resultados concuerdan bastante bien con datos experimentales y soluciones obtenidas mediante otros modelos.

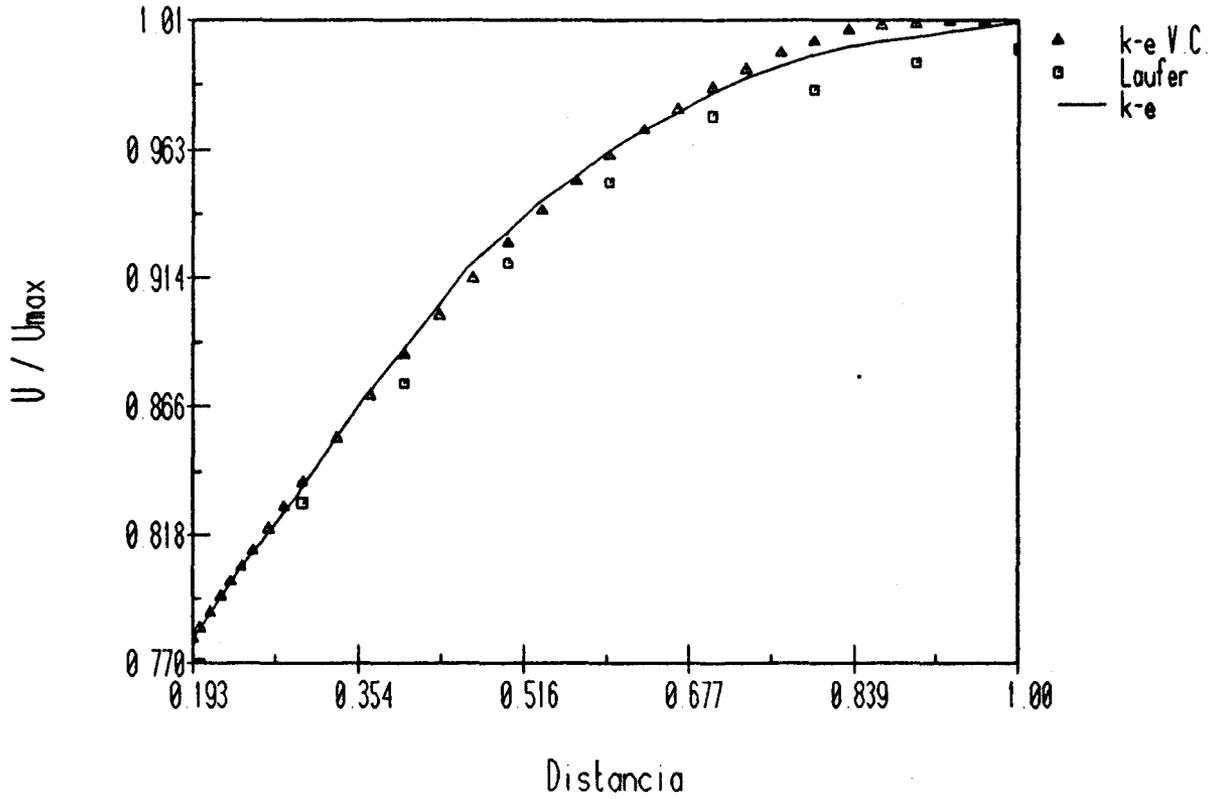
Conclusiones

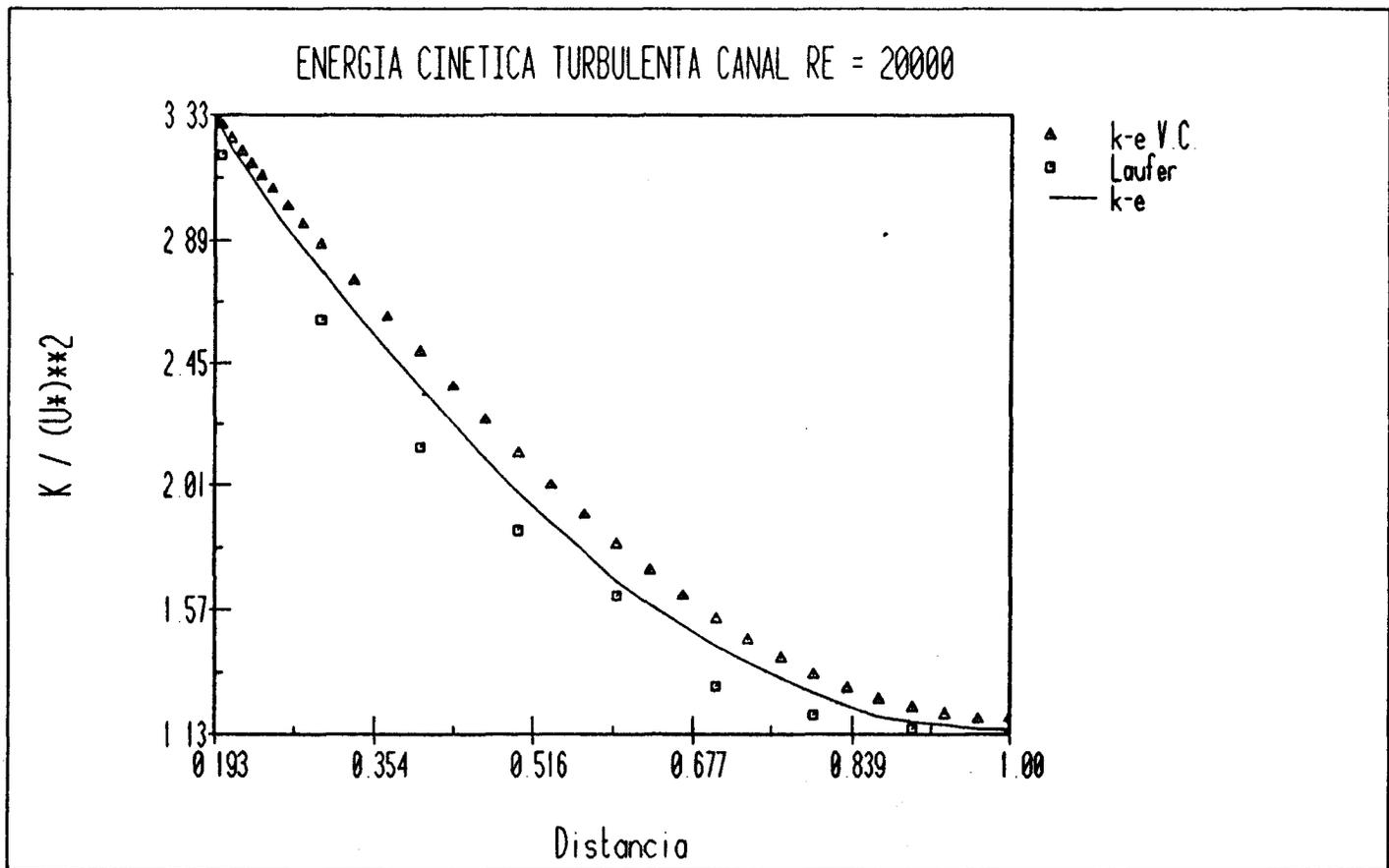
Este trabajo presenta una breve descripción de varios modelos de flujo turbulento y su aplicabilidad a distintos tipos de flujos. Se encontró que el modelo k - ϵ es el más ampliamente usado y el que mejor se ajusta a flujos internos bidimensionales, aunque tiene sus limitaciones para otros tipos de flujos en 2D.

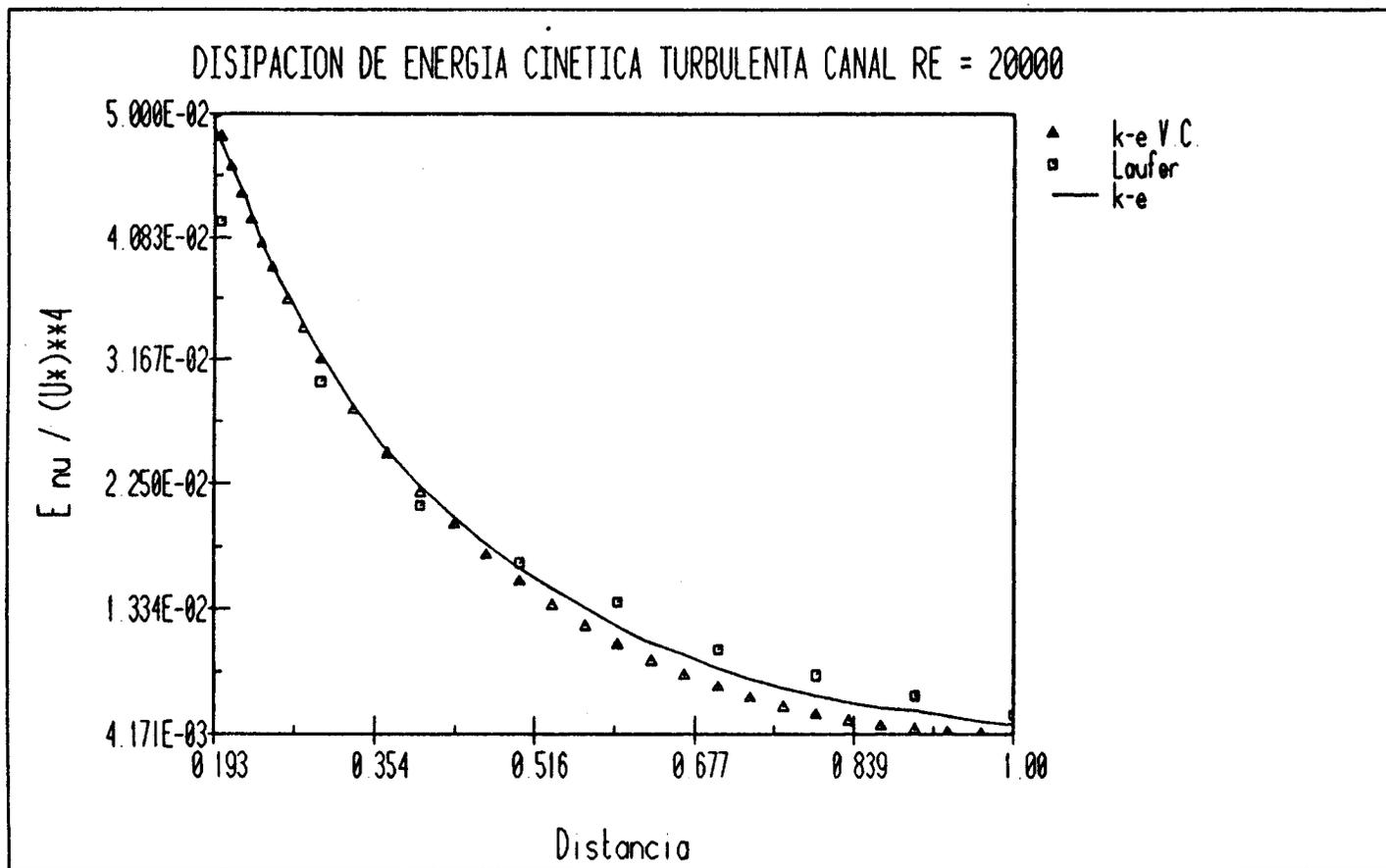
Se desarrolló un programa que resuelve el sistema acoplado de ecuaciones de Navier-Stokes y transporte para k y c en 2D mediante la utilización del método de elementos finitos. La parte advectiva de las mismas se calculó con el método de las características.

Los calculos presentados demuestran la capacidad del modelo de predecir bastante bien las características principales del caso estudiado.

FLUJO CANAL CERRADO RE = 20000







Bibliografía

- Amano R.S. y Chai J., 1987. Transport models of the turbulent velocity-temperature products for computations of recirculating flows. *Numerical Heat Transfer*, 14, pp.75-95.
- Amano R.S., Goel P., Chai J., 1988. Turbulence energy and diffusion transport or third-moments in a separating and reattaching flow. *AIAA J.*, 26(3), pp.273-282.
- Bernard P., 1982. Balance of turbulent energy in the linear wall region of channel flow. *AIAA J.*, 22(2), pp.306-308.
- Bernard P., 1986. Limitations of the near-wall k- ϵ turbulence model. *AIAA J.*, 24(4), pp.619-622.
- Bradshaw P., Ferris D. y Atwell N., 1967. Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation. *J. Fluid Mech.*, 28, pp.593-616.
- Bradshaw P., 1969. The turbulence structure of equilibrium boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 29, pp.625-633.
- Carrica P., Larreteguy A., Converti J., 1990. Cálculo de flujos turbulentos con el método de elementos finitos por volúmenes de control. Presentado en el ENIEF'90 en Mar del plata.
- Chien K., 1982. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model. *AIAA J.*, 20(1), pp.33-38.
- Chieng C. y Launder B., 1980. On the calculation of turbulent heat transport downstream from an abrupt pipe expansion. *Num. Heat Transf.*, 3, pp.189-201.
- Choi Y., Iacovides H. y Launder B., 1989. Numerical computation of turbulent flow in a square-sectioned 180 deg bend. *ASME J. Fluid Eng.*, 111, pp.59-68.
- Gibson M., Jones W., Younis B., 1981. Calculation of turbulent boundary layers on curved surfaces. *Phys. Fluids*, 24(3), pp.386-395.
- Hanjalic K. y Launder B., 1972. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. Fluid Mech.*,

52(4), 00.609-638.

- Hanjalic K. y Launder B., 1979. Sensitizing the dissipation equation to irrotational strains. ASME J.Fluids Eng., draft.
- Harlow F y Nakayama P., 1968. Turbulence transport equations. Phys. Fluids, 10, pp.2323-2332.
- Ilegbusi O. y Spalding D., 1989. Prediction of fluid flow and heat transfer characteristics of turbulent shear flows with a two-fluid model of turbulence. Int. J. Heat Mass Trans., 32(4), pp. 767-774.
- Jones W. y Launder B., 1972. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. Int. J. Heat Mass Trans., 15, pp.301-314.
- Jones W. y Launder B., 1973. The calculation of low-Reynolds number phenomena with two-equation model of turbulence. Int. J. Heat Mass Trans., 16, pp.1119-1130.
- Lakshminarayana B., Turbulence modeling for complex shear flows. AIAA J., 24(12), pp.1900-1917.
- Lam C. y Bremhorst K., 1981. A modified form of the k-e model for predicting wall turbulence. ASME J. Fluids Eng., 103(9), pp.456-460.
- Laufer J., 1950. NACA-TN-2123.
- Launder B. y Spalding D., 1974. The numerical computation of turbulent flows. Comp. Meth. App. Mech. and Eng., 3, pp.269-289.
- Launder B., Reece G. y Rodi W., 1975. Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. J. Fluid Mech., 68(3), pp.537-566.
- Launder B., 1984. Numerical computation of convective heat transfer in complex turbulent flows: time to abandon wall functions?. Int. J. Heat Mass Transf., 27(9), pp.1485-1491.
- Launder B., 1988. On the computation of convective heat transfer in complex turbulent flows. ASME J. Heat Trans., 110, 1112-1128.
- Malin M. y Spalding D., 1984. The prediction of turbulent jets and plumes by use of the k-w model of turbulence. Phys. Chem. Hydrod.,

5(2), pp.153-198.

- Malin M. y Sanchez L., 1989. A revised version of the k-k1 turbulence model for near wall flows. App. Math. Modelling, 13, pp.138- 143.
- Markatos N., 1986. The mathematical modelling of turbulent flows. App. Math. Modelling, 10, pp. 190-220.
- Martinuzzi R. y Pollard A., 1989. Comparative study of turbulence models in predicting turbulent pipe flow. Part I: Algebraic stress and k-e models. AIAA J., 27(1), pp.29-36.
- Nagano Y. y Hishida M., 1987. Improved form of the k-e model for wall turbulent shear flows. ASME J. Fluids Eng., 109, pp.156-160.
- Nagano Y. y Kim C., 1988. A two-equation model for heat transport in wall turbulent shear flows. ASME J. Heat Transf., 110, pp.583-589.
- Nallasamy M., 1987. Turbulence models and their applications to the prediction of internal flows: a review. Comp. and Fluids, 15(2), pp.151-194.
- Ng K. y Spalding D., 1972. Turbulence model for boundary layers near walls. Phys. Fluids, 15(1), pp.20-30.
- Patel V., Rodi W. y Scheuerer G., 1985. Turbulence models for near-wall and low-Reynolds number flows: A review. AIAA J., 23(9), pp.1308- 1316.
- Pollard A. y Martinuzzi R., 1989. Comparative study of turbulence models in predicting turbulent pipe flow. Part II: Reynolds stress and k-e models. AIAA J., 27(12), pp.1714-1721.
- Rodi W., 1980. Turbulence models and their application in hydraulics: A state of the art review. Book Publication of LAHR, Delf, The Netherlands, pp.
- Rodi W. y Scheuerer G., 1983. Calculation of curved shear layer with two-equation turbulence model. Phys. Fluids, 26(6), pp.1422-1436.
- Rodi W. y Scheuerer G., 1986. Scrutinizing the k-e turbulence model under adverse pressure gradient conditions. ASME J. Fluids Eng., 108, pp.174 -179.

- Saffman P., 1970. Turbulence model predictions for turbulent boundary layers. AIAA J., 12(4), pp.541-546.
- Schlichting H., 1968. Boundary layer theory, Mc Graw-Hill, NYC, pp.817.
- So R. y Yoo G., 1986. On the modelling of low-Reynolds number turbulence. NASA CR-3994, pp.135.
- So R., Lai Y., Hwang B. y Yoo G., 1988. Low-Reynolds number modelling of flows over a backward-facing step. ZAMP, 39(1), pp.13-27.
- Speziale C., 1987. On nonlinear k-l and k-e models of turbulence. J.Fluids Mech., 178, pp.459-475.
- Visbal M. y Knight D., 1984. The Baldwin-Lomax turbulence model for two-dimensional shock-wave/boundary-layer interactions. AIAA J., 22(7) , pp.921-928.

