SOLUCION DE N.S. INCOMPRESIBLE A TRAVES DE FUNCIONES DE FORMA BILINEALES PARA LAS VARIABLES PRIMITIVAS

Daniel H Cascales
INGAR-CONICET
Santa Fe-Argentina
Sergio R Idelsohn
INTEC
Guemes 3450, (3000) Santa Fe, Argentina

RESUMEN

Es frecuente que los trabajos que tratan sobre la solución de Navier Stokes incompresible con elementos finitos usen interpolación de distinto orden para las velocidades y presiones, utilizando un esquema de solución simultanea de ambos tipos de variables.

En este trabajo, tanto las presiones como las velocidades son aproximadas con polinomios de igual orden sin por ello obtenerse modos espurios de presión. Es implementado un esquema de resolución desagregada de las ecuaciones de cantidad de movimiento y de la ecuación de continuidad.

Con propósitos comparativos son presentados dos ejemplos comunmente utilizados por otros autores.

ABSTRACT

Frecuently the works dealing with the solution of the incompresible Navier Stokes equations by finite element methods use mixed-order interpolation scheme. Also, pressure and velocities are often simultaneously obtained.

This paper presents an equal-order interpolation method that does not exhibit spurious modes. Momentum and continuity equations are solved by means of a segregated solution scheme.

Two examples used by a number of researches are presented for comparison purposes.

1. ECUACIONES QUE GOBIERNAN EL PROBLEMA

Las ecuaciones de movimiento a resolver son las de Navier Stokes para flujo laminar en dos dimensiones, que expresadas en coordenadas cartesianas son:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial u}{\partial y}) \qquad (1)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial v}{\partial y}) \qquad (2)$$

debiéndose además cumplir con la conservación de masa para flujo incompresible

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

2. DISCRETIZACION DE LA ECUACION DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La discretización del sistema de ecuaciones se hace a partir de las variables primitivas, presión y velocidad, aproximándolas a traves de funciones de forma bilineales. Usando el método de Galerkin en la forma usual en elementos finitos, Zienkiewicz [1], excepto para los términos de convección, se llega a

$$\bar{A}u = F^{u} \qquad (4)$$

$$\bar{A}v = F^{v} \qquad (5)$$

donde F^{u} y F^{v} tienen en cuenta los términos $-\frac{\partial P}{\partial x}$ y $-\frac{\partial P}{\partial y}$ respectivamente.

2.1. Discretización de los términos de convección

Siguiendo el trabajo de Rice y Schnipke [2] se usa un método de linea de corriente arriba para la aproximación de los términos de convección.

Considerando un fenómeno de transporte por convección pura, es decir $Pe \to \infty$ y considerando la ecuación que gobierna dicho fenómeno transformada a un sistema de coordenada coincidente con las lineas de corrientes queda

$$\rho u_s \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \qquad (6)$$

donde u_s es la velocidad sobre la linea de corriente, ρ es la densidad y ϕ es el escalar transportado.

La ecuación de arriba establece que en ausencia de otros términos el valor de ϕ permanece constante a lo largo de la linea de corriente.

La aproximación adoptada en este trabajo para el término de convección es que

$$\rho u_s \frac{\partial \phi}{\partial s} = cte \;\therefore \qquad (7)$$

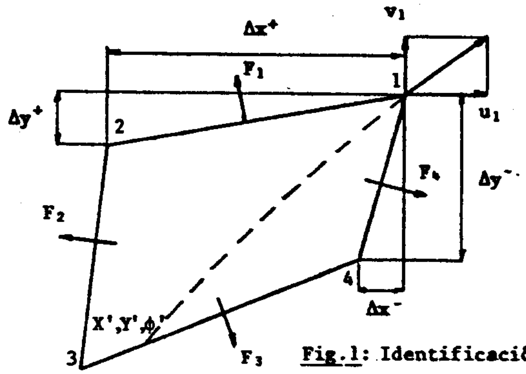
la contribución al elemento se evalúa

$$\rho u_s \frac{\partial \phi}{\partial s} \int_{A_e} W \, dA \qquad (8)$$

para lo cual es necesario conocer $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ que se calcula a través de la diferencia entre el valor de ϕ corriente arriba y el del nodo del elemento, considerado corriente abajo, fig. 1. Se asume que la localización del punto del contorno del elemento por donde se "introduce" la línea de corriente esta en cualquiera de los lados del elemento que no tienen al nodo corriente abajo. Matemáticamente diremos que un nodo está corriente abajo cuando

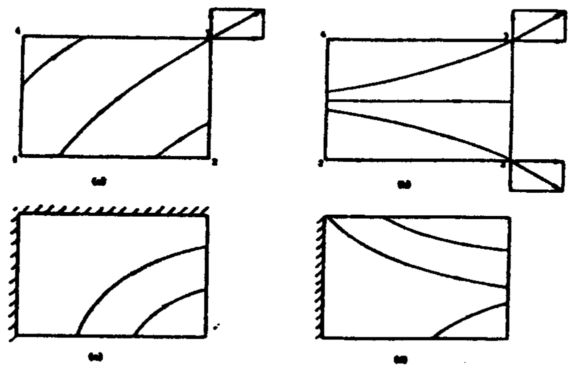
$$-v_1 \, \Delta x^- + u_1 \, \Delta y^- \geq 0 \qquad (9)$$

$$-v_1 \, \Delta x^+ + u_1 \, \Delta y^+ \geq 0 \qquad (10)$$



<u>Fig.1</u>: Identificación del nodo corriente abajo.

Un elemento puede tener más de un nodo corriente abajo o no tener ninguno. Fig. 2.



<u>Figura 2</u>: Posibles localizaciones de los nodos corriente abajo

$\therefore$ (8) se calculará como

$$\frac{\rho u_s}{\Delta s} (\phi_1 - \phi') \int_{A_e} W \, dA \quad (11)$$

donde $u_s = \sqrt{(u_1^2 + v_1^2)}$ (12)

y $\Delta_s = \sqrt{(X_1-X')^2 + (Y_1-Y')^2}$ (13)

y X', Y' y ϕ se calcularán como

$$X' = (1-F_p).X_2 + (1-F_n) X_4 + F_p F_n X_3 \quad (14)$$

$$Y' = (1-F_p) Y_2 + (1-F_n) Y_4 + F_p F_n Y_3 \quad (15)$$

$$\phi' = (1-F_p) \phi_2 + (1-F_n) \phi_4 + F_p F_n \phi_3 \quad (16)$$

siendo

$$F_p = \text{Max} [\text{Min} (F_1/-F_2, 1), 0] \quad (17)$$

$$F_n = \text{Max} [\text{Min} (F_4/-F_3, 1), 0] \quad (18)$$

donde $F1 = \int_1^2 \rho u dy - \int_1^2 \rho v dx$ (19)

$F2 = \int_2^3 \rho u dy - \int_2^3 \rho v dx$ (20)

$F3 = \int_3^4 \rho u dy - \int_3^4 \rho v dx$ (21)

$F4 = \int_4^1 \rho u dy - \int_4^1 \rho v dx$ (22)

3. DISCRETIZACION DE LA ECUACION DE CONTINUIDAD

Ya que tanto la presión como las componentes de la velocidad se discretizan con funciones de forma bilineales, Rice et.al [3], el residuo de la ecuación de continuidad es planteado según el método de Galerkin, así

$$\varepsilon_c = - \int_{A_e} W \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA \quad (23)$$

3.1. Conversión de la ecuación de continuidad a presión

La ecuación de presión resultante se desea que sea de segundo orden, es por esto que (23) debe ser integrada por partes, luego

$$\int_{A_e} W\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dA = \int_s Wudy - \int_s Wvdx - \int_{A_e} \left(\frac{\partial W}{\partial x} u + \frac{\partial W}{\partial y} v\right) dA \quad (24)$$

Las integrales de línea forman la condición de contorno natural, las cuales serán cero para cualquier condición de contorno de pared. Sin embargo, para contornos con salida o entrada de fluido estas deberán ser calculadas.

Sustituyendo las funciones de peso y discretizando la velocidad en la integral de superficie de la derecha de la ecuación de arriba se tiene

$$\varepsilon_i = \int_{A_e} \frac{\partial N_i}{\partial x} (N_j u_j) + \frac{\partial N_i}{\partial y} (N_j v_j) \, dA \quad (25)$$

3.1.1. Relación entre velocidad y presión

Para llegar a la ecuación de presión se debe establecer una relación de ésta con la velocidad y luego reemplazar la misma por esta relación en la expresión del residuo de la ecuación de continuidad. La relación antes nombrada se obtiene a partir de la ecuación de cantidad de movimiento global. Así expresando (4) y (5) como

$$a_{ii}\ u_i = -\sum_j a_{ij}\ u_j - \int_A W \frac{\partial P}{\partial x}\, dA\ ,\ j \neq i \tag{26}$$

$$a_{ii}\ v_i = -\sum_j a_{ij}\ v_j - \int_A W \frac{\partial P}{\partial y}\, dA\ ,\ j \neq i \tag{27}$$

Suponiendo que la $\frac{\partial P}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ son constantes dentro del elemento, (26) y (27) quedan

$$u_i = \hat{u}_i - K_i \frac{\partial P}{\partial x} \tag{28}$$

$$v_i = \hat{v}_i - K_i \frac{\partial P}{\partial y} \tag{29}$$

donde

$$\hat{u}_i = -\sum_j \frac{a_{ij}\ u_j}{a_{ii}}\ ,\ j \neq i \tag{30}$$

y

$$\hat{v}_i = -\sum_j \frac{a_{ij}\ v_j}{a_{ii}}\ ,\ j \neq i \tag{31}$$

$$K_i = \sum_e \int_{A_e} N_k\, dA/a_{ii},\ \text{conectividad } k \equiv i \text{ global.} \tag{32}$$

Reemplazando (28) y (29) en (25) queda

$$\varepsilon_i = -\int_{A_e} [\frac{\partial N_i}{\partial x} (N_j \{\hat{u}_j - K_j \frac{\partial P}{\partial x}\}) + \frac{\partial N_i}{\partial y} (N_j \{\hat{v}_j - K_j \frac{\partial P}{\partial y}\})]\, dA \tag{33}$$

Discretizando P y separando la expresión de arriba se obtiene

$$\int_{A_e} [N_j K_j\ (\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_K}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_K}{\partial y}) P_k\, dA = \int_{A_e} (\frac{\partial N_i}{\partial x} N_j \hat{u}_j + \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j \hat{v}_j)\, dA \tag{34}$$

Integrando numéricamente con 2x2 puntos de Gauss y ensamblando en la forma habitual queda

$$A\ P = F \tag{35}$$

Es importante notar que la ecuación de presión resultante es similar a la de Poisson, sólo que la expresión de arriba impone el cumplimiento de la ecuación de continuidad. La matriz global A resulta definida positiva y simétrica.

4. PROCESO ITERATIVO DE CALCULO

La secuencia de cálculo es la siguiente

a) Se eligen los valores de velocidades, pueden elegirse cero como valores de partida, y se calcula $\bar{A}$ (4) y (5)

b) Se calcula $\hat{u}$ y $\hat{v}$ a través de las ecuaciones (30) y (31) y K según (32)

c) Basado en estos últimos valores se calcula A de (35) y si corresponde, las integrales de línea de (24), se introducen las condiciones de contorno de velocidad, segun el pto. 5, y las de presión, obteniendo así F de (35). Resolviendo el sistema de ecuaciones se conocerán las presiones nodales.

d) Con dichas presiones y $\hat{u}$ y $\hat{v}$ se actualizarán las velocidades a través de

$$u_i = \hat{u}_i - \frac{1}{a_{ii}} \int W \frac{\partial P}{\partial x} dA \tag{36}$$

$$v_i = \hat{v}_i - \frac{1}{a_{ii}} \int W \frac{\partial P}{\partial y} dA \tag{37}$$

e) Se calcula la matriz $\bar{K}$ ecuaciones (4) y (5), luego se efectuan dos veces la serie de calculos descritos en b) a e) o si ya se han efectuado se calculan F^u y F^v de (4) y (5). Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene u y v retornando a b para comenzar una nueva iteración.

5. CONDICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno de velocidad son aplicadas directamente a la ecuación de presión restringiendo así el campo de presiones. En todos los casos donde la velocidad esté impuesta ésta no aportará ecuación a la cantidad de movimiento. En la ecuación de presión $\hat{u}$, $\hat{v}$ deberán tener el mismo valor que las velocidades impuestas , mientras que, en ese caso K debe ser cero. Se debe además calcular las condiciones de contorno natural donde haya entrada o salida de fluido (integrales de linea de la ecuación (24)). En este ultimo tipo de contorno se considerará nulo el gradiente de velocidad.

6. RESULTADOS

El primer ejemplo es el desarrollo entre placas paralelas separadas por la unidad de medida. La malla generada es estructurada y cuenta con 14 elementos entre las placas, con un total de 375 elementos. La velocidad de entrada es uniforme a partir del primer nodo más cercano a la pared, mientras que en la salida se impuso presión constante.

Se comparan los resultados con los obtenidos por Gosman et al [4] para un Reynolds de 150. En la fig.3 se muestra la evolución de la relación entre la componente u en el centro del conducto y la velocidad pistón de ingreso, con la distancia al borde de entrada. La velocidad pistón se calcula teniendo en cuenta la distancia a la pared del nodo más cercano a la misma y la velocidad impuesta sobre él. Los resultados son practicamente coincidentes con los de Gosman.

El segundo ejemplo es el flujo entre placas paralelas una de las cuales se separa bruscamente aumentando asi su separación. La malla generada, fig. 4 tiene 1350 elementos y 1435 nodos. Los resultados son comparados con los del trabajo de Armaly et al [5], donde se indica que este ejemplo es susceptible a la aparición de modos espurios. Las condiciones de contorno son de no deslizamiento en las paredes, flujo desarrollado a la entrada y presión constante a la salida. Tanto la entrada como la salida estan suficientemente alejadas de la expansión brusca. En la fig. 5 se observan las lineas de igual presión, mientras que en la fig. 6 las Líneas de corriente y la magnitud de la zona de recirculación son obtenidas para un Reynolds de 200. Los resultados estan muy cercanos a los informados por Armaly et al.

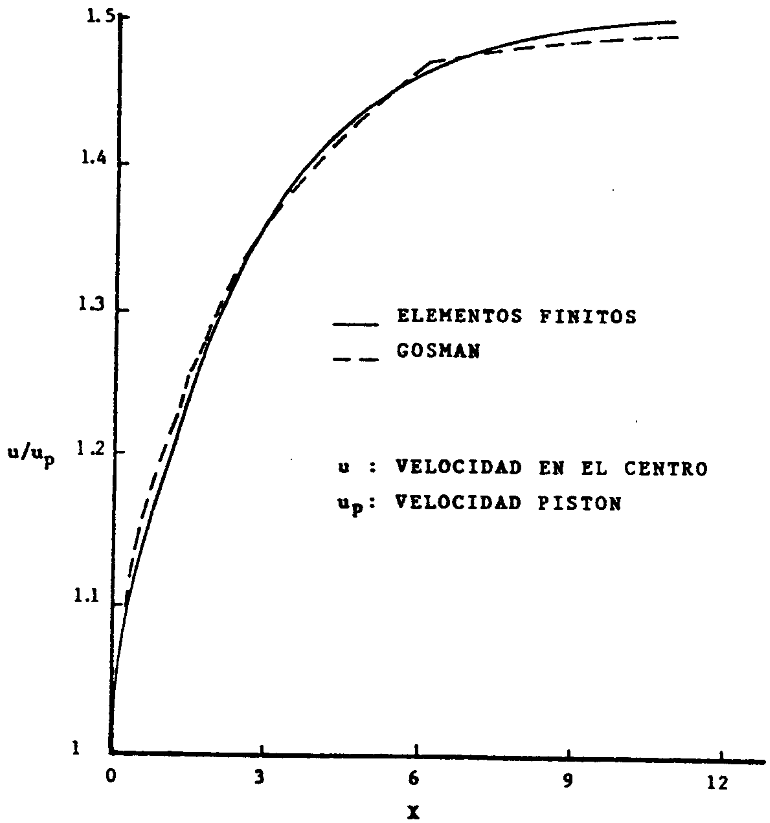


Figura 3: Evolución de las velocidades en el centro del conducto en un flujo en desarrollo.

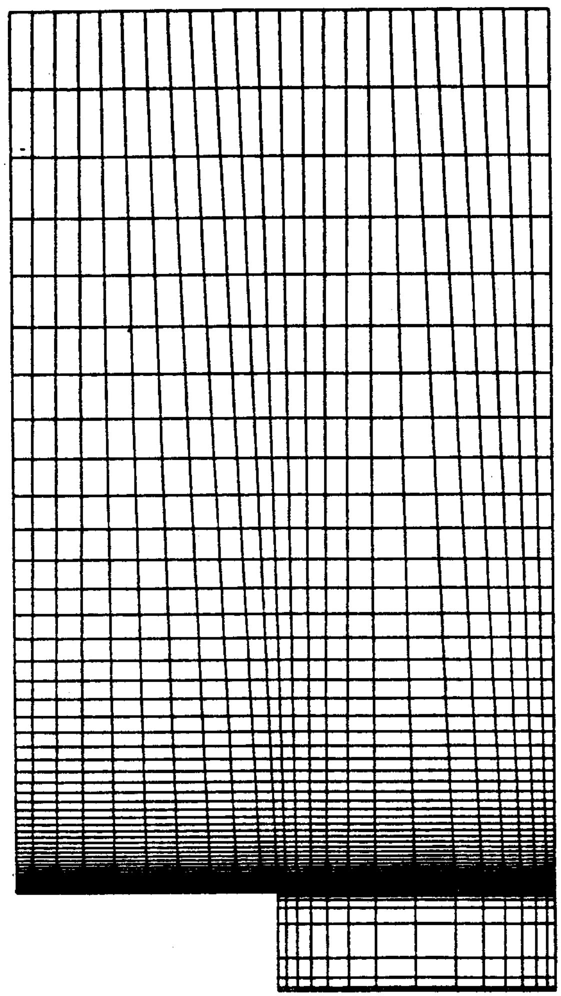
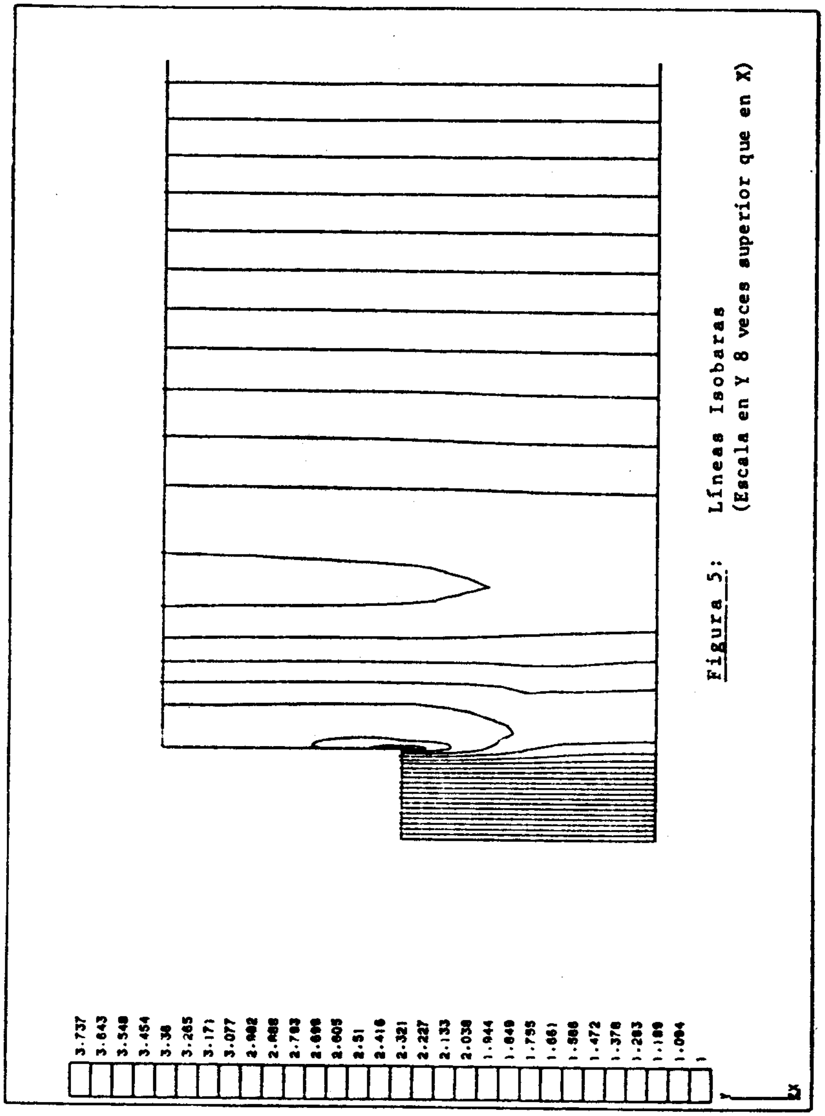


Figura 4: Malla de Elementos Finitos
(Escala en Y 8 veces superior que en X)



<u>Figura 5:</u> Líneas Isobaras
(Escala en Y 8 veces superior que en X)

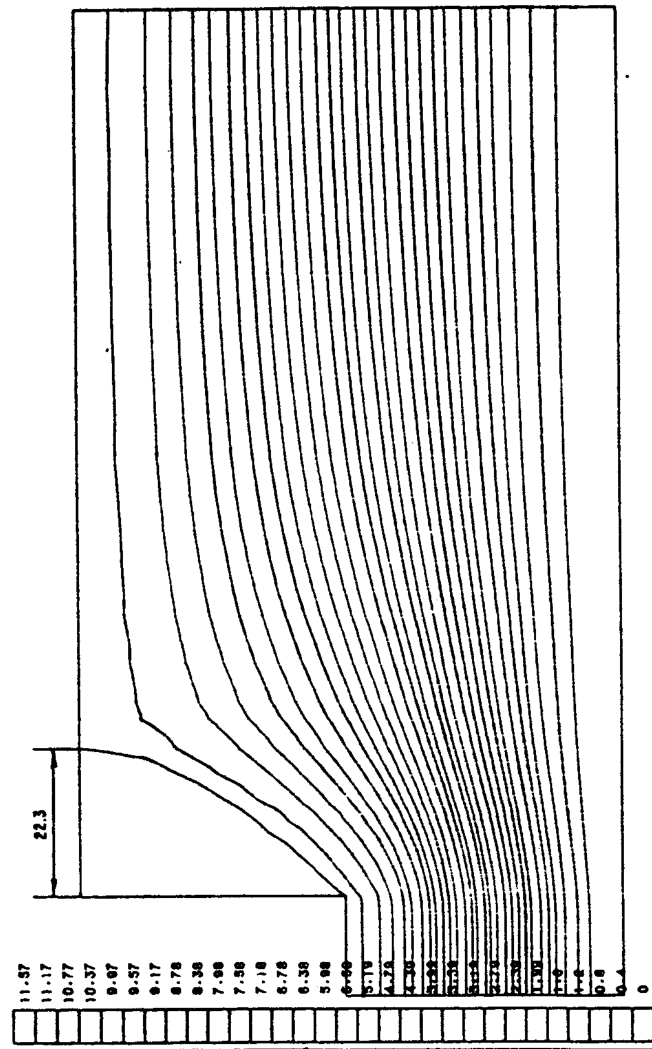


Figura 6 : Líneas de Corriente
(Escala en Y 8 veces superior que en X)

7. CONCLUSIONES

De acuerdo a los resultados obtenidos, esta formulación, que utiliza funciones bilineales para aproximar presiones y velocidades, no presenta modos espurios de presión. Hasta el presente el programa trabaja con un sistema de resolución de ecuaciones directo. Sin embargo, es bien sabido que las estrategias secuenciales son más aptas para combinarse con técnicas de resolución iterativas. Con el fin de lograr mayor eficiencia computacional, se está trabajando en una nueva versión del programa que utilice un sistema del tipo Gauss-Seidel linea a linea.

REFERENCIAS

[1] Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method". (McGraw-Hill, New York, 1977).

[2] Rice J.G. y R.J. Schnipke, "A monotone stream line upwind finite element method for convection-dominated flow", Comput. Meths. Appl. Mech. Engng., 48 (1985) 313-327.

[3] Rice J.G. y R.J. Schnipke, "An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes", Comput. Meths. Appl. Mech. Engng., 58 (1986) 135-149.

[4] Gosman, A.D.; Pun, W.M.; Runchal, A.K.; Spalding, D.B. y Wolfshtein, M., "Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows", Academic Press, 1969.

[5] Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C.F. y Schönung, B., Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow", J. Fluid Mech., 127, 1983, 473-496.