

**DESARROLLOS EN EL METODO DE VOLUMENES FINITOS APLICADO
A LA RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES**

Axel Larreteguy
Pablo Carrica
José Converti

División Termohidráulica, Centro Atómico Bariloche,
Comisión Nacional de Energía Atómica.
San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina.

RESUMEN

Se describe un método de Volúmenes Finitos aplicado a la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. Se propone una nueva función interpolante, mucho más general, que incluye la propuesta anterior de otro autor como un caso particular. Debido a la presencia de un parámetro ajustable en su definición se obtiene toda una familia de funciones. Se propone una forma automática de evaluación de este parámetro.

Se prueba la nueva función en varios casos representativos de condiciones de flujo muy diferentes. Se comprueba que ella permite tratar diversos tipos de flujo, lo que no era posible con la función anterior. Se concluye que la nueva función, conjuntamente con la evaluación automática del parámetro libre, extiende en forma notable el campo de aplicabilidad del Método de Volúmenes Finitos.

ABSTRACT

A Finite Volume Method for the solution of the Navier-Stokes equations is described. A new shape function is proposed. Due to the presence of an adjustable parameter in its definition a whole family of shape functions is obtained. An earlier approach of another author is included as a particular case. Automatic evaluation of this free parameter is used.

Numerical results are obtained for problems involving very different flow conditions. It is found that, unlike earlier approaches, many flow conditions can be solved with the new shape function. It can be concluded that this improvements considerably increase the range of applicability of the Finite Volume Method.

INTRODUCCION

En este trabajo se presentan nuevos desarrollos del método de Volúmenes Finitos aplicado a la resolución de problemas de fluidos incompresibles en régimen laminar. La idea básica de este método fue desarrollada originalmente por Baliga y Patankar [1,2] y extendida luego a las ecuaciones de Navier-Stokes por ellos mismos, junto a Phan y Prakash [3,4,5].

El método, en su versión bidimensional original, está basado en una discretización de un dominio Ω de frontera Γ en elementos triangulares de tres nodos. Alrededor de cada nodo generico i ($i=1,N$) se define un volumen de control Ω_i , como se muestra en la Figura 1. Cada Ω_i tiene forma poligonal, delimitado por líneas que unen centros de lados con centroides de elementos. De esta manera se obtienen volúmenes de control que cubren todo el dominio y no se solapan.

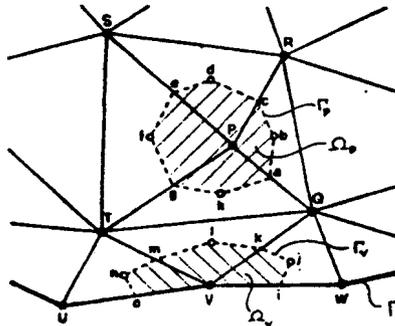


Fig.1: Discretización

El sistema de ecuaciones discretizado resulta de un balance entre la fuente interior a cada volumen Ω_i y el flujo que cruza la superficie Γ_i del mismo, llamada *superficie de control*. Para calcular este flujo es necesario realizar alguna suposición acerca de los valores que toma la variable de interés dentro de cada elemento. Debemos contar entonces con alguna función de forma o interpolante que nos permita estimar el valor de esta variable en cualquier punto interior del elemento a partir del conocimiento de los valores en los nodos del mismo, ya que estos valores nodales serán el resultado de nuestro cálculo.

Prakash introduce en [6] un concepto totalmente novedoso: la inclusión de la fuente en las funciones de forma. Los valores de la variable de interés en el interior de cada elemento ya no solo dependen de los nodales sino también del valor de la fuente elemental. De esta manera logra un algoritmo de igual orden que permite calcular presiones y velocidades en los mismos nodos, eliminando los efectos tipo checkerboard en las presiones, sin necesidad de utilizar grillas desplazadas.

Si bien el concepto ideado por Prakash es una muy valiosa contribución al método, la función de forma particular que propone adolece de importantes defectos, que la hacen sumamente inadecuada en

muchos casos. En este trabajo se presenta una nueva función interpolante, mucho mas general, que considera a la de Prakash como un caso particular. Se desarrollan además criterios para determinar de manera automática la función interpolante adecuada a utilizar en cada elemento.

EL METODO PARA LA ECUACION GENERAL DE TRANSPORTE

Obtencion del sistema matricial

Antes de analizar el método para las ecuaciones de Navier-Stokes describiremos su aplicación a la ecuación general de transporte de un escalar por convección y difusión en el caso bidimensional estacionario, siguiendo a Baliga y Patankar [2]. Este proceso responde a una ecuación del tipo

$$v \cdot j = S \quad (1)$$

donde el flujo total $j = \alpha \bar{u} v - \beta \nabla v$. Esta ecuación describe la distribución del escalar v , sujeto a convección por un campo de velocidades u y que difunde de acuerdo a la ley de Fick, siendo α y β los respectivos coeficientes de convección y difusión. El término S tiene en cuenta la producción de v y será llamado fuente.

El primer paso en la obtención de una aproximación algebraica del problema es discretizar el dominio Ω en elementos triangulares de 3 nodos y definir volúmenes de control alrededor de cada nodo, como se muestra en la Fig. 1. En dicha figura solo se han dibujado dos volúmenes de control, uno perteneciente a un nodo interior (P) y el otro a un nodo exterior (V).

El segundo paso consiste en escribir la Ec.(1) en forma integral y aplicar el teorema de la divergencia, obteniendo

$$\int_{\Gamma_1 \cap \Omega} j \cdot \bar{n} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1 \cap \Gamma} j \cdot \bar{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega_1} S \, d\Omega \quad (2)$$

En la (2) se ha separado el flujo a través de Γ_1 en dos partes para tener en cuenta las condiciones de borde en caso de que el volumen i tenga parte de su frontera coincidente con Γ . El sistema algebraico de ecuaciones se obtiene aplicando la Ec.(2) a cada volumen de control de la grilla. Para evaluar las integrales de (2) es necesario hacer algunas suposiciones acerca de la variación de α , β , \bar{u} , S y v sobre todo el dominio Ω . Los parámetros α , β y S se consideran constantes por elemento. Las velocidades \bar{u} se interpolan linealmente en cada elemento a partir de sus valores nodales. La función interpolante utilizada para la incógnita v es el ítem mas relevante del método y será tratada en detalle en el siguiente apartado. Por ahora indicaremos solamente que se usa dentro de cada elemento una interpolación del tipo

$$v(X, Y) = v_m \phi_m(X, Y) + S \psi(X, Y) \quad (3)$$

donde m es el índice de numeración local de los nodos del elemento en cuestión ($m=1,2,3$); v_m son los valores incógnita en los tres nodos del elemento y S es el valor constante de la fuente en el mismo. Las ϕ_m y

ϕ son funciones interpolantes definidas dentro del elemento. Las X e Y corresponden a un sistema de coordenadas local y distinto en cada elemento.

Como último paso en la derivación del sistema algebraico reemplazamos la función de forma dada en (3) en el flujo \bar{J} y evaluamos las integrales de la Ec.(2), despejando las incógnitas v_i (con $i=1,N$). La evaluación de las integrales de superficie y volumen se realiza elemento a elemento, ensamblando luego las contribuciones elementales para obtener el sistema global. La integración puede ser realizada en forma exacta o aproximada (por e.j. usando Simpson). Como resultado obtenemos un sistema matricial de orden N de la forma

$$A \cdot v = b \quad (4)$$

donde el vector nodal b contiene todas las contribuciones de las fuentes elementales. La resolución de este sistema, donde A es no-simétrica, entrega los valores de v_i para todos los nodos de la grilla.

Funciones interpolantes

Concentraremos nuestra atención ahora en la función interpolante utilizada para la incógnita. Un desarrollo aún mas detallado se puede encontrar en [6,10,11]. El objetivo es llegar a una función interpolante que contenga alguna información acerca de la ecuación que se está intentando resolver, en lugar de usar aproximaciones polinomiales como es usual en Elementos Finitos.

Consideremos el elemento P-Q-T mostrado en la Fig.2. La velocidad \bar{u}_{av} (de módulo u_{av}), promedio de las tres velocidades nodales, define una dirección privilegiada. Definamos entonces un sistema local de coordenadas X-Y con su eje X coincidente con la dirección de \bar{u}_{av} , rotado con respecto al sistema original x-y. Definamos también ΔX como la dimensión del elemento en dirección X, como se muestra en la Figura 2, y el Peclet del elemento como $Pe = u_{av} \alpha \Delta X / \beta$.

Supongamos ahora que simplificamos el problema, y consideramos α , β y S constantes; y $\bar{u} = \bar{u}_{av}$ sobre el elemento. En estas condiciones la ecuación (1) escrita en el sistema rotado X-Y toma la forma

$$\frac{Pe}{\Delta X} \frac{\partial v}{\partial X} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right) = \frac{S}{\beta} \quad (5)$$

Baliga y Patankar proponen para v una función interpolante del tipo

$$v(X, Y) = A \exp\left(\frac{Pe X}{\Delta X}\right) + B Y + C \quad (6)$$

donde A, B y C dependen entre otras cosas de los valores nodales de v, y se determinan pidiendo $v(X_n, Y_n) = v_n$. La función (6) es la solución general de la Ec.(5) homogénea en el caso unidimensional a la que se le ha agregado un interpolación lineal en Y para introducir un tercer parámetro a determinar, con lo cual pasa a ser una solución particular

de la Ec.(5). Esta función interpolante tiene en cuenta la naturaleza direccional del transporte de v , eliminando los problemas de soluciones oscilantes que tienen los esquemas centrados cuando se supera un cierto Peclet.

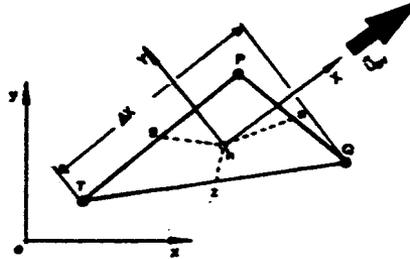


Fig.2: un elemento y su sistema rotado de coordenadas

Prakash [6] introduce una mejora a la función (6) agregando un término dependiente de la fuente

$$v(X,Y) = A \exp\left(\frac{Pe X}{\Delta X}\right) + B Y + C + \frac{S \Delta X}{\beta Pe} X \quad (7)$$

La función (7) es una solución particular de la Ec.(5) no-homogénea. Esta nueva función adquiere una importancia considerable en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, ya que permite obtener un método de igual orden, lo que significa que no se necesitan redes diferentes para el cálculo de velocidades y presiones. Esto no es posible con la función propuesta por Baliga y Patankar.

Debido a que la solución particular propuesta por Prakash como función interpolante no es única, hemos explorado [7,8,9,10,11] otras posibilidades. Proponemos entonces la siguiente función

$$v(X,Y) = A \exp\left(\frac{Pe X}{\Delta X}\right) + B Y + C + \frac{S}{\beta} \left[(1-\gamma) \frac{X \Delta X}{Pe} - \gamma \frac{Y^2}{2} \right] \quad (8)$$

donde el parámetro $0 \leq \gamma \leq 1$ puede ser ajustado para elegir una determinada función interpolante. Para todo valor de γ la (8) es una solución particular de la Ec.(5). El caso $\gamma=0$ corresponde a la función propuesta por Prakash. La función (8) puede ser puesta en la forma (3) eliminando las constantes auxiliares A, B y C.

Ya hemos demostrado en trabajos anteriores [7,8,9] el comportamiento de la (8) para problemas de convección-difusión. En este trabajo veremos las ventajas de nuestra propuesta con respecto a la de Prakash para el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, lo que trataremos en el siguiente apartado.

EL METODO PARA LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Ecuaciones de Momento

las Ecuaciones de Momento en el caso bidimensional pueden ser puestas en la forma (1) para cada componente de velocidad:

$$\nabla \cdot \underline{J}_u = S_u \quad (9-a)$$

$$\nabla \cdot \underline{J}_v = S_v \quad (9-b)$$

donde $\underline{J}_u = \rho \bar{u}u - \mu \bar{u}u$; $S_u = G_x - \partial p / \partial x$; $\underline{J}_v = \rho \bar{v}v - \mu \bar{v}v$; $S_v = G_y - \partial p / \partial y$.

En las (9) se ha utilizado la ecuación de continuidad para eliminar parte del gradiente simétrico de la velocidad. Lo dicho en el apartado anterior sobre las funciones de forma siguen siendo válido para las ecuaciones (9) simplemente reemplazando α , β y S por ρ , μ , S_u y S_v . Los términos G_x y G_y tienen en cuenta fuerzas volumétricas exteriores. Una de las hipótesis hechas en el desarrollo de las funciones de forma fue que dentro de cada elemento se consideraba S constante. Utilizando funciones interpolantes lineales $A_n(X,Y)$ para las presiones

$$p(X,Y) = p_n A_n(X,Y) \quad (10)$$

se obtienen gradientes de p constantes por elemento, con lo que se cumple la hipótesis mencionada.

Siguiendo lo hecho en la ecuación de transporte podemos escribir

$$\int_{\Gamma_1} (\underline{J}_u + p \underline{\bar{e}}_x) \cdot \bar{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega_1} G_x \, d\Omega \quad (11-a)$$

$$\int_{\Gamma_1} (\underline{J}_v + p \underline{\bar{e}}_y) \cdot \bar{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega_1} G_y \, d\Omega \quad (11-b)$$

donde los $\underline{\bar{e}}_x$ y $\underline{\bar{e}}_y$ son los versores normales del sistema cartesiano x - y . Debido a que el flujo j es ahora no lineal hace falta linealizar el término convectivo, considerando conocido de una iteración anterior el campo \bar{u}^k y tomando como incógnitas el campo de velocidades dado por sus componentes u^{k+1} y v^{k+1} .

Ecuación de Continuidad

Esta ecuación se escribe naturalmente en la forma de la (1) de la siguiente manera

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (12)$$

y en su versión integral aplicado a un volumen de control Ω

$$\int_{\Gamma_1} \bar{u} \cdot \bar{n} \, d\Gamma = 0 \quad (13)$$

En la anterior se utiliza para las dos componentes de la velocidad \bar{u} la función interpolante (3) que se usó en las ecuaciones de momento para u y v.

El sistema completo

Si en las Ec. (11) y (13) interpolamos u y v con las funciones (3) y p con las interpolantes lineales dadas en (10) (recordando que a través de las ψ las velocidades u y v dependen también de las presiones) y evaluamos las integrales sobre Γ_1 y Ω_1 con $i=1, M$ obtenemos un sistema algebraico linealizado de dimensión $3N \times 3N$ del tipo

$$\begin{bmatrix} A_{ux}^k & & A_{px}^k \\ & A_{vy}^k & A_{py}^k \\ C_u^k & C_v^k & C_p^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^{k+1} \\ v^{k+1} \\ p^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x^k \\ b_y^k \\ d^k \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde la matriz global es no-simétrica.

Debido al hecho de haber eliminado parte del gradiente simétrico de las velocidades en la derivación de estas ecuaciones resulta un sistema donde no hay influencia cruzada de u sobre v.

EL PARAMETRO γ EN LA FUNCIÓN INTERPOLANTE

Una idea intuitiva de su influencia

Vamos a tratar de clarificar el papel que juega γ en la función interpolante desde un punto de vista físico, dentro de lo posible. Como hemos expuesto anteriormente $\gamma=0$ corresponde al perfil propuesto por Prakash. Este perfil fue desarrollado a partir de un problema unidimensional, por lo que la fuente no afecta al perfil en la dirección normal al movimiento. En su desarrollo se ha supuesto que todo el gradiente de presiones está contrarrestado solamente por el cambio de momento del fluido, despreciando totalmente las fuerzas de corte.

Consideremos ahora el caso diametralmente opuesto. En un flujo tipo Couette, totalmente desarrollado, no hay variación de u y v en la dirección del movimiento. El efecto de la fuente (el gradiente de presiones) se manifiesta en la curvatura de u en la dirección perpendicular al movimiento (representativa de los esfuerzos de corte), lo cual no es contemplado por la interpolante de Prakash. En este flujo particular, una elección de $\gamma=1$ nos daría la solución exacta para cualquier discretización utilizada. Por esta razón llamaremos al perfil obtenido con $\gamma=1$ Perfil Couette.

De la experiencia obtenida en muchas corridas de diferentes casos utilizando distintos valores de γ podemos rescatar los siguientes comentarios:

- i) El Perfil Prakash da buenos resultados con flujos en recintos cerrados (p. ej. en cavidad cuadrada).
- ii) Es imposible, en lo que a nuestra experiencia respecta, utilizarlo para flujos abiertos en general, por ejemplo del tipo Couette, flujos en desarrollo en tubos, etc.
- iii) El Perfil Couette es muy adecuado para todos los flujos abiertos en los que el Prakash ni siquiera converge.
- iv) El Perfil Couette no es adecuado para flujos en recintos cerrados, o con recirculaciones, ya que produce oscilaciones no convergentes en el sistema no-lineal, salvo a números de Reynolds muy bajos.

De lo anterior se concluye que no hay un valor de γ óptimo que pueda ser asignado a todos los elementos del recinto. Distintas zonas del mismo pueden requerir distintos valores de γ . Debido a la incomodidad que significaría para el usuario tener que definir en cada elemento el valor de γ a utilizar hemos explorado la posibilidad de automatizar la estimación del mismo.

Es importante destacar lo siguiente: en zonas donde se producen expansiones del flujo, a números de Re tales que provoquen fuertes gradientes adversos de presión, ninguna combinación de los perfiles anteriores ha dado resultados satisfactorios (ver problema 2). La nueva función de forma extiende en mucho las posibilidades del método, pero todavía hay trabajo por delante en el desarrollo de funciones interpolantes para las ecuaciones de Navier-Stokes.

Un criterio para la evaluación automática de γ

Hemos desarrollado un criterio para evaluar en forma automática el parámetro γ , obteniendo en cada elemento e una estimación del valor de γ^* adecuado. Se ha seguido en su definición la filosofía de mantener la separación entre elementos, y estimar γ^* en cada uno en base solamente a la información obtenible en el mismo.

Supongamos que disponemos de un campo de velocidades, proveniente del paso de tiempo anterior en el caso transitorio o de la resolución del problema de Stokes usando Perfil Couette. Se trata de detectar en cada elemento, haciendo uso solamente de los valores nodales u_n y v_n ($n=1,3$) y una interpolación lineal de ellos, en que grado el flujo se está frenando o acelerando en la dirección del movimiento. En lugar de las componentes de \vec{u} en el sistema x - y (las u y v) se utilizan en estos criterios las componentes rotadas en el sistema local X - Y (denominadas U y V). Si se detecta una variación considerable de U en la dirección de X es probable que nos encontremos localmente en una situación adecuada al Perfil Prakash (según las conclusiones del apartado anterior). Si la variación en la dirección del movimiento es pequeña es probable que sea adecuado el Perfil Couette.

El criterio se basa en comparar las variaciones de U en X con las variaciones en Y , por medio de la siguiente fórmula:

$$\gamma^{\circ} = 1 - \frac{|\partial U/\partial X|}{\sqrt{(\partial U/\partial X)^2 + (a \partial U/\partial Y)^2}} \quad (16)$$

donde a es un coeficiente único para todos los elementos de la red que nos permite polarizar el criterio en la dirección que deseamos. Dado un campo de velocidades: si $a > 1$ los valores de γ° tenderán a tomar valores mas cercanos a 0 (perfiles próximos al *Prakash*); si $a < 1$ los γ° tenderán a valores cercanos a 1 (perfiles próximos al *Couette*). Este coeficiente a se utilizó para ajustar el criterio durante la etapa de desarrollo. Todos los casos de prueba fueron corridos con un coeficiente $a=25$ (muy polarizado hacia el perfil *Prakash*).

Con esta evaluación automática de γ se está introduciendo una nueva no-linealidad en el problema. Para evitar dificultades con la convergencia se congela el valor de γ en cada elemento luego de las primeras iteraciones no lineales, manteniendo entonces estos valores hasta la convergencia de las mismas. En el siguiente apartado mostraremos resultados para distintos casos y realizaremos un análisis del comportamiento del criterio propuesto.

RESULTADOS NUMERICOS

Problema 1: conveccion forzada en una cavidad cuadrada

Como primer problema de prueba analizaremos el conocido caso del flujo forzado en una cavidad de forma cuadrada, cuya tapa superior se mueve a una velocidad constante U_{sup} (ver Fig.3). Se utilizaron las dos redes que se muestran en las Fig.4-a y 4-b. La segunda ha sido densificada especialmente para tener en cuenta los vórtices de recirculación.

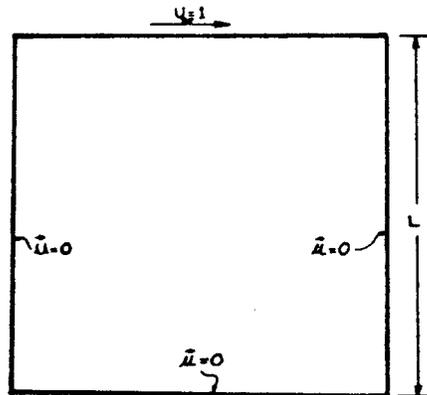


Fig.3: cavidad cuadrada

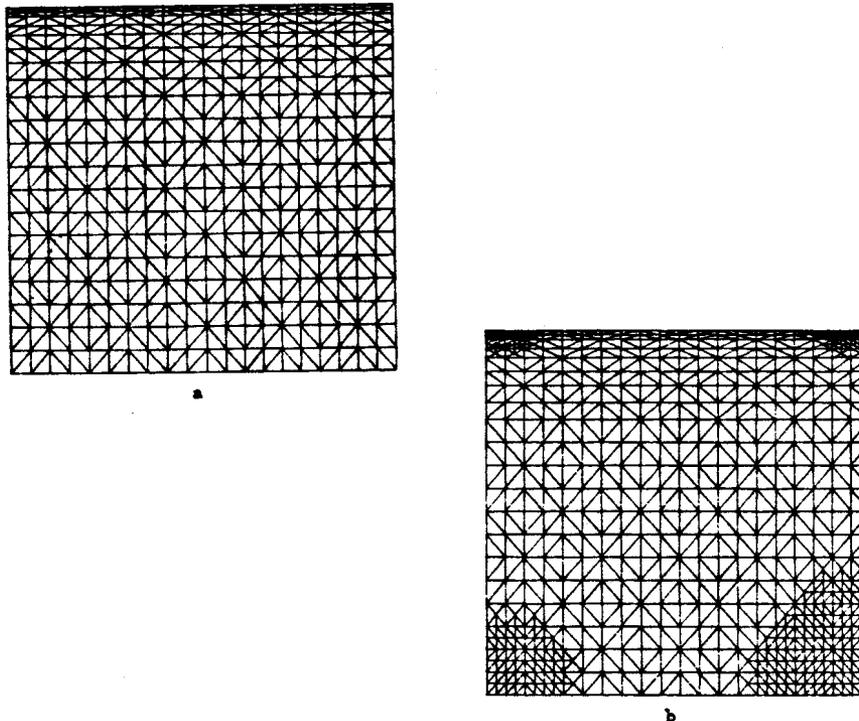


Fig.4: a) 441 nodos; b) 600 nodos

Se corrieron varios casos utilizando una homotopia basada en el número de Reynolds, partiendo del problema de Stokes y resolviendo para Re 100, 200 y 400. Se presentan los resultados mas significativos. Las líneas de corriente y vorticidad del caso Re 400 se pueden ver en la Fig.5. En el vórtice principal se han graficado 9 líneas de corriente con valores entre 0.01 y 0.09. El valor máximo calculado para la función corriente fue de 1.01. Sobre los vórtices secundarios se han graficado las líneas 0., $-1.0e-4$ y $-5.0e-4$.

En la Fig.6 se observa una comparación de las velocidades u en la línea central en el caso Re 400. En la figura se han graficado los resultados del bien conocido benchmark de Burgraff [12], los valores obtenidos para las dos redes con las funciones interpolantes de Prakash y los resultados que entrega nuestra función de forma con la red menos densificada. Se puede observar que, a pesar de encontrarnos en un caso de flujo cerrado en donde la función de Prakash es adecuada, los resultados de nuestra función se aproximan mas a los de Burgraff y a los obtenidos con la red mas densificada.

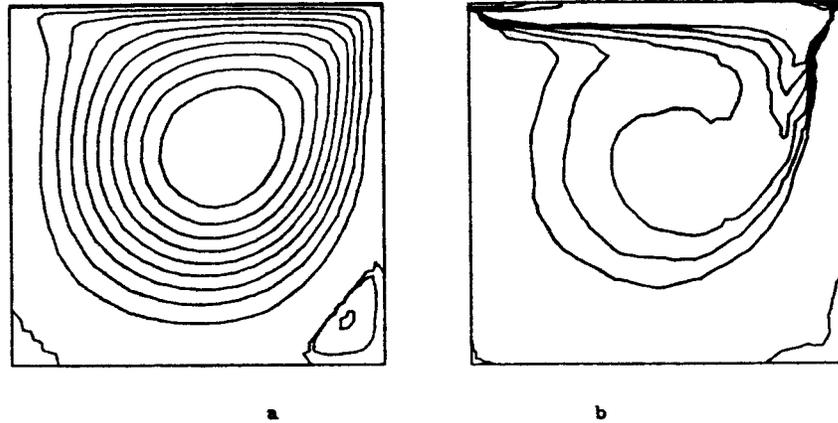


Fig.5: Re 400 - a) Función corriente, b) Función vorticidad

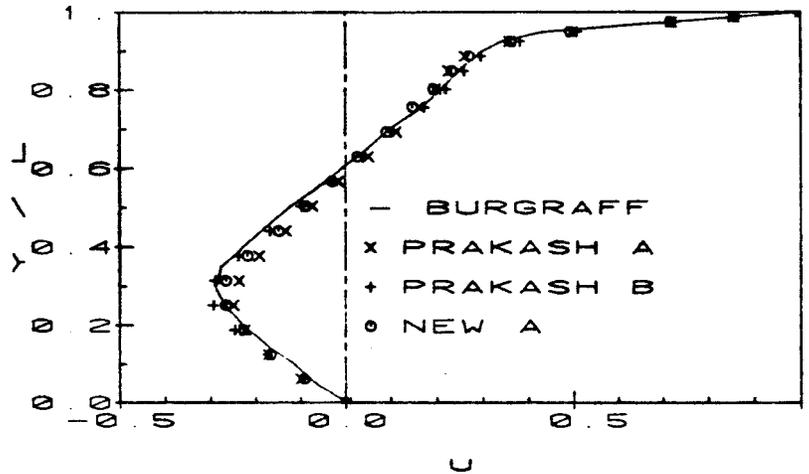


Fig.6: Comparación de velocidades en la línea central - Re 400

Problema 2: expansion subita

Se consideró el problema de un flujo completamente desarrollado entre placas paralelas que experimenta en forma abrupta una duplicación asimétrica de su altura, tal como se ve en la Fig.7. Se ha fijado un perfil parabólico de velocidades a la entrada. Las paredes tienen condición de velocidad nula. Se ha ubicado la salida lo suficientemente lejos ($L/H=10$) para que la aproximación de completamente desarrollado sea válida.

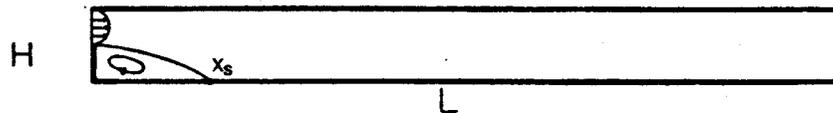


Fig.7: expansión súbita

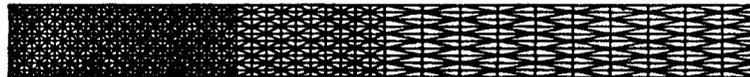


Fig.8: red utilizada

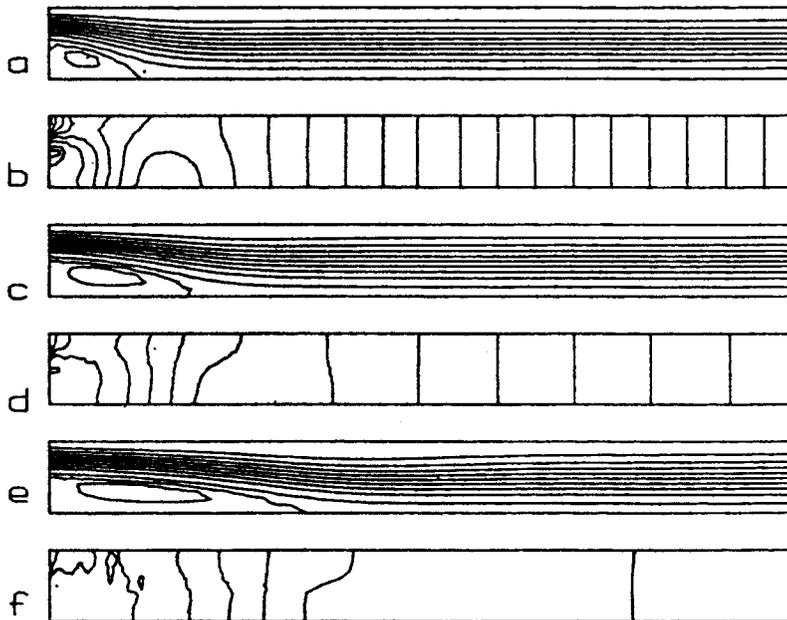


Fig.9: a) ϕ Re 100 ; b) p Re 100 ; c) ϕ Re 200 ; d) p Re 200
e) ϕ Re 400 ; f) p Re 400

Este es un problema particularmente exigente para los perfiles interpolantes ya que combina zonas de flujos de corte abiertos (aguas abajo), en donde es imposible utilizar el perfil tipo Prakash, y zonas de recirculación y de expansión (cerca de la entrada), en donde el perfil Couette solo es utilizable a bajos Re. Este hecho hace imposible la utilización de un único valor de γ para todo el dominio.

Se corrieron distintos casos, para Re 100, 200 y 400. Se colocó $U_{max}=1$ a la entrada; $\rho=1$ y $\mu=0.01, 0.005$ y 0.0025 . La red utilizada se puede ver en la Fig. 8. La misma tiene 561 nodos y 1000 elementos. En las Fig. 9-a a 9-f se observan las líneas de corriente (ψ) e isobaras (p) para los distintos casos. Se han graficado 11 líneas de corriente, entre $\psi_{max}=0$ y $\psi_{min}=-0.333$, en la zona del flujo principal. Se muestra además la línea con $\psi=0.015$ en el vórtice de recirculación. Las isobaras han sido graficadas para $p=0$ y valores de p en intervalos $\Delta p=\pm 0.02$.

Un resultado importante a considerar es la posición x_s del punto de estancamiento que marca el fin de la recirculación. En la Fig. 10 se comparan nuestros resultados con mediciones experimentales [14] y valores numéricos obtenidos con un método de elementos finitos en una red uniforme con 1071 nodos de velocidad y 2000 elementos [13].

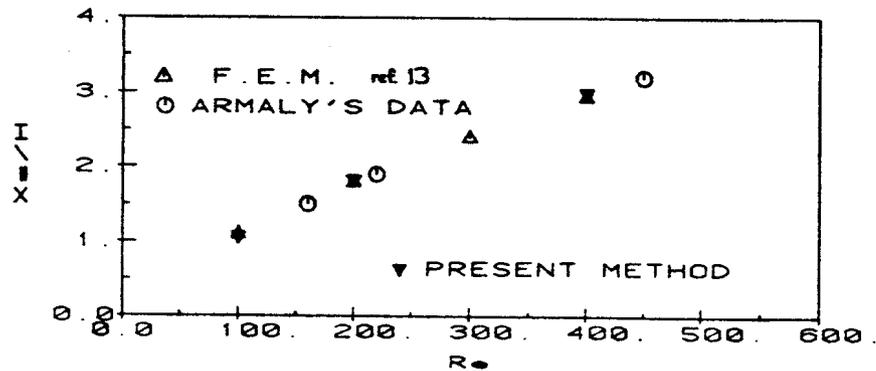


Fig. 10: posición x_s de estancamiento

A modo de ejemplo se muestra en la Fig. 11 la elección de γ por elemento para el caso Re 100 utilizando un coeficiente $a=25$. Por solo contar con dos colores para representar estos valores se han pintado de blanco los elementos en donde $\gamma < 0.5$ (tendencia a Prakash) y de negro los que tienen $\gamma > 0.5$ (tendencia a Couette). Se observa a la entrada una polarización hacia el perfil Prakash y en la zona desarrollada hacia el perfil Couette.



Fig. 11: elección de γ

Es importante notar las oscilaciones de presión que se observan en el caso Re 400 (Fig. 9 f) en la zona de la expansión. Fue difícil

hacer converger el problema a Re 400, y se hizo imposible trabajar a Re mayores. Es evidente que los gradientes adversos de presión no están siendo correctamente modelados por las funciones interpolantes actuales, y requieren desarrollos adicionales en este sentido.

Problema 3: perfil alar compuesto

Para ejemplificar un flujo exterior a cuerpos sólidos se muestra el caso de un perfil alar compuesto, con hipersustentador y flap, en un túnel de viento. En este caso no se intenta comparar los resultados con soluciones de otros autores ya que los objetivos principales son probar el programa en una red grande y mostrar la elección automática del γ por elemento.

En la Fig.12 se observa la forma de este perfil alar. La red utilizada se puede ver en la Fig.13. Las condiciones a la entrada son de velocidad vertical nula y velocidad horizontal unitaria. En los bordes superior e inferior se han colocado condiciones de slip, y a la salida condiciones de Neumann homogéneas.

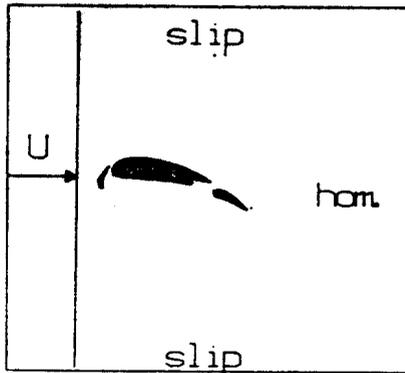


Fig.12: perfil alar

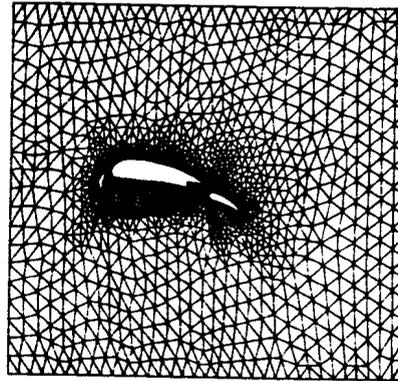


Fig.13: red utilizada

Se corrió el caso de Re 500 definido con el alto del túnel. En las Fig.14-a y 14-b se muestran las líneas de corriente y de presión. Es notable el pico de presión en el borde de ataque del alerón anterior, que es el punto de estancamiento más importante. Se observa también la diferencia de presiones entre las partes inferior y superior del ala.

En la figura 15 se muestra la elección de γ para este problema. Se nota una tendencia hacia Prakash salvo en las zonas cercanas a las superficies alares, en donde el flujo es mayormente del tipo de corte. Lamentablemente por solo contar con dos colores no se puede apreciar detalladamente la distribución espacial de γ .

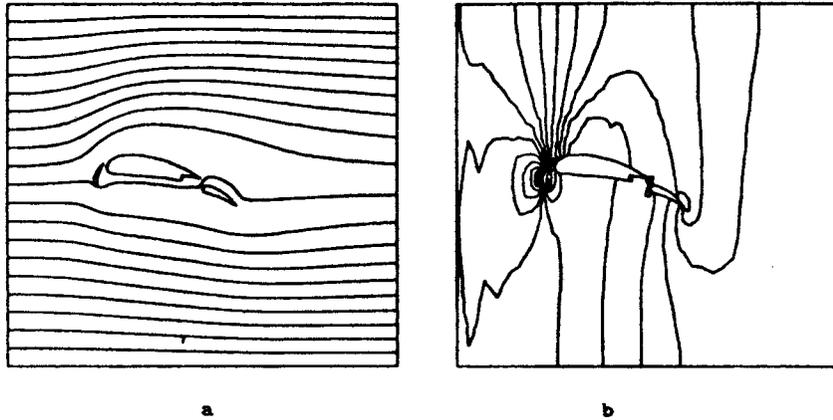


Fig.14: Re 500. a) líneas de corriente; b) presiones



Fig.15: elección de γ

CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una nueva función interpolante en el marco del Método de Volúmenes Finitos aplicado a la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. Esta nueva función es realmente una familia de funciones debido a la presencia de un parámetro ajustable γ que le otorga una gran flexibilidad. La propuesta original de Prakash queda incluida en la nueva definición como un caso particular.

La nueva función conserva la característica principal de la propuesta de Prakash que es la de dar por resultado un método de igual orden. Con nuestra propuesta se hace posible encarar distintos tipos de problemas de flujos: cerrados o abiertos; con o sin recirculaciones; interiores o exteriores. Esta generalidad no era posible con la función anterior. De esta manera, la nueva función de forma amplia considerablemente las posibilidades del método. Como desarrollo futuro queda todavía mejorar el comportamiento del método a Re moderadamente altos en presencia de fuertes gradientes adversos de presión.

REFERENCIAS

- [1] S.V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere, Washington D.C., 1980.
- [2] B.R. Baliga and S.V. Patankar, 'A new finite element formulation for convection-diffusion problems', *Numer. Heat Transfer*, 3, 393-410, 1980.
- [3] B.R. Baliga and S.V. Patankar, 'A control volume finite element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer', *Numer. Heat Transfer*, 6, 245-262, 1983.
- [4] B.R. Baliga, T.T. Pham and S.V. Patankar, 'Solution of some two-dimensional incompressible fluid flow and heat transfer problems using a control volume finite element method', *Numer. Heat Transfer*, 6, 263-282, 1983.
- [5] C. Prakash and S.V. Patankar, 'A control volume based finite element method for solving the Navier-Stokes equation using equal-order variable interpolation', *Numer. Heat Transfer*, 8, 259-280, 1985.
- [6] C. Prakash, 'An improved control volume finite element method for heat and mass transfer, and for fluid flow using equal-order velocity-pressure interpolation', *Numer. Heat Transfer*, 9, 253-276, 1986.
- [7] A. Larreteguy, J. Converti, 'Algoritmo para Resolver la Ecuación de Transporte por Volúmenes de Control', presentado en el Congreso Ibero-Latinoamericano MECOM'88, Noviembre de 1988, Carlos Paz, Córdoba, Argentina.
- [8] A. Larreteguy, J. Converti, V. Fukami, P. Carrica, 'Tratamiento del Término Temporal en la Ecuación de Difusión-Advección y Proposición de Algunas Mejoras al Método de Elementos Finitos por Volúmenes de Control', presentado en el Congreso ENIEF'89, Julio de 1989, Bariloche, Río Negro, Argentina.
- [9] A. Larreteguy, J. Converti, 'Improvements to the Finite Volume Method for Convection-Diffusion Problems', enviado a *Int. Jou. Num. Meth. Eng.*, Julio 1990.
- [10] J. Converti, A. Larreteguy, 'Introducción al Método de Volúmenes Finitos', conferencia realizada en el Congreso ENIEF'90, Noviembre 1990, Mar del Plata, Argentina.
- [11] P. Carrica, A. Larreteguy, J. Converti, 'Cálculo de Flujos Turbulentos por el Método de Elementos Finitos basados en Volúmenes de Control.', presentado en el Congreso ENIEF'90, Noviembre de 1990, Mar del Plata, Argentina.
- [12] O. Burgraff, *Analytical and Numerical Studies of Steady Separated Flows*, *J. of Fluid Mech.*, 24, p. 113 (1966).
- [13] E. Dary, G. Buscaglia, Comunicación Personal.
- [14] S. Thangam, D. Knight, 'Effect of stepheight on the separated flow past a backward facing step', *Phys. Fluids A* 1 (3), March 1989.