

MODELO DE PROPAGACION DE OLEAJE CON  
DIFRACCION E INTERACCION CON LA CORRIENTE

Miguel A. Cavaliere  
Laboratorio de Hidráulica Aplicada (LHA)  
INCyTH

Angel N. Menéndez  
Laboratorio de Hidráulica Aplicada (LHA)  
INCyTH

RESUMEN

Se presentan los fundamentos matemáticos y la discretización numérica de un modelo de propagación de olas, el cual incluye los efectos de refracción y difracción en forma combinada y la interacción de las olas con las corrientes. La ecuación diferencial, de tipo elíptico, es simplificada por medio de la aproximación parabólica. Se presentan resultados de pruebas, los cuales se comparan con valores medidos, soluciones analíticas y otras soluciones numéricas. Se estudian los alcances del modelo en problemas que se apartan de las hipótesis de la aproximación efectuada. Se describe una aplicación del modelo al estudio de la propagación de olas en un río, las cuales son producidas por los dispositivos de erogación de un embalse

ABSTRACT

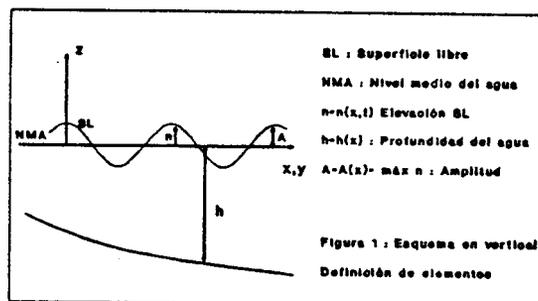
The mathematical basis and the numerical discretization of a wave propagation model are presented. It includes the combined effect of refraction and diffraction and takes into account wave-current interaction. The elliptic differential equation is simplified using the parabolic approximation. Results of tests are presented and compared with experimental values, analytical solutions and with other numerical solutions. The model behaviour is studied in problems where some of the model hypothesis are not satisfied. A case study is presented in which waves generated by a dam spillway are propagated downstream.

## INTRODUCCION

El conocimiento del clima de olas en zonas costeras es de suma importancia en la práctica ingenieril (construcción y mantenimiento de puertos, obras de defensa costera, etc). En general, se distinguen dos aspectos que se estudian en forma separada. Por un lado la generación de las olas por el viento en las zonas profundas del mar y por el otro su propagación hacia la costa. Al propagarse, la disminución de profundidad transforma el oleaje cambiando la dirección y altura de las olas a través de procesos de refracción y bajío. Si la batimetría es irregular el efecto de difracción también se torna importante, debiendo resolverse en forma conjunta con la refracción. Además, si existe una corriente de base sobre la que se propagan las olas es necesario tener en cuenta el efecto de la misma sobre el oleaje.

## ECUACION DE OLAS

La formulación matemática del problema se basa en la teoría lineal de olas de pequeña amplitud de tipo armónico. La solución del problema se describe a través de un potencial de velocidades  $\phi$  que satisface la ecuación de Laplace. Esto resulta de suponer que el fluido es ideal y su movimiento irrotacional. En el problema físico, el desarrollo de la vorticidad debido al oleaje se encuentra restringido a una pequeña capa cercana al fondo, por lo cual la hipótesis de irrotacionalidad es aceptable.



En la fig. 1 se define el sistema de coordenadas empleado y se presenta un corte vertical del problema donde se indican la profundidad  $h$  medida desde el nivel medio del agua (NMA), la sobrelevación instantánea  $n$  definida como la diferencia entre el nivel de la superficie libre y el nivel medio y la amplitud  $A$  del oleaje. Para el caso en que el fondo es horizontal, y en ausencia de corrientes, la solución general, en notación compleja, es de la forma [1]

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{\cosh [K (h+z)]}{\cosh (Kh)} \bar{\phi}(x,y) e^{-i\omega t} \quad (1)$$

donde  $\omega$  es la pulsación del oleaje,  $t$  el tiempo,  $\bar{\phi}$  es el potencial plano reducido al NMA que satisface la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \bar{\phi} + K^2 \bar{\phi} = 0 \quad (2)$$

y el factor de modulación vertical de amplitud  $K$  se obtiene a partir de la relación de dispersión

$$\omega^2 = g K \tanh (K h) \quad (3)$$

siendo

$g$  : aceleración de la gravedad

La amplitud del oleaje está relacionada con el potencial plano reducido a través de la fórmula

$$A = \frac{\omega}{g} |\bar{\phi}| \quad (4)$$

Cuando el fondo no es horizontal y existen corrientes, en la medida que la variación espacial de la profundidad y de las corrientes sobre distancias del orden de la longitud de onda sea pequeña, es posible plantear para el potencial  $\phi$  una forma como la de la Ec. (1). Despreciando efectos disipativos, Booij [2] ha desarrollado, partiendo de una formulación variacional, una ecuación de olas que contempla los efectos combinados de refracción y difracción causados por la variación de la profundidad, incluyendo a las corrientes. De hecho, se asume que el campo de velocidades es conocido, despreciándose el efecto del oleaje sobre las corrientes. Para el caso de un oleaje monocromático y en estado permanente, resulta la siguiente ecuación de tipo elíptico :

$$i\omega \left[ \underline{U} \cdot \nabla \bar{\phi} + \bar{\nabla} \cdot (\underline{U} \bar{\phi}) \right] + \left[ \underline{U} \cdot \bar{\nabla} \right] \bar{\nabla} \cdot (\underline{U} \bar{\phi}) - \bar{\nabla} \cdot (\underline{\alpha} \bar{\nabla} \bar{\phi}) + (\sigma^2 - \omega^2 - K^2 \alpha) \bar{\phi} = 0 \quad (4)$$

donde  $K$  se obtiene ahora de la ecuación de dispersión

$$\sigma^2 = g K \tanh (K h) \quad (5)$$

La pulsación relativa a la corriente  $\sigma$  está relacionada con  $\omega$ , la pulsación absoluta del oleaje, a través de la siguiente relación (efecto Doppler) :

$$\sigma = \omega - \underline{k} \cdot \underline{U} \quad (6)$$

siendo  $\underline{k}$  el vector número de onda ( $\underline{k} = \nabla S$ , donde  $S$  es la fase del potencial  $\Phi$ ) y  $\underline{U}$  la velocidad media sobre la vertical de la corriente (de componentes  $U$  y  $V$  según  $x$  e  $y$  respectivamente).

El coeficiente  $\alpha$  de la Ec. (4) resulta igual al producto de las celeridades de fase y de grupo relativas a la corriente, y se puede expresar como :

$$\alpha = g \frac{\frac{\sinh(2\mathfrak{K}h)}{4} + \frac{\mathfrak{K}h}{2}}{\mathfrak{K} \left[ \cosh(\mathfrak{K}h) \right]^2} \quad (7)$$

La primer ecuación de olas que contempló en forma conjunta el fenómeno de refracción y difracción combinadas fue presentada por Berkhoff [3], y es un caso particular de la Ec. (4) cuando  $\underline{U} = 0$ , resultando :

$$\nabla \cdot \left[ \alpha \nabla \Phi \right] + \mathfrak{K}^2 \alpha \Phi = 0 \quad (8)$$

#### LIMITACIONES PRACTICAS DEL MODELO MATEMATICO

La obtención de soluciones numéricas a partir de la Ec. (4) no resulta una tarea sencilla cuando el dominio de cálculo es extenso, en relación a la longitud de onda promedio en la región. Una de las opciones de discretización más directas, teniendo en cuenta el carácter elíptico de dicha ecuación, es el método de los elementos finitos. En el LHA se ha desarrollado el programa DIFRAC [4], orientado al estudio de la agitación en puertos, que resuelve la Ec. (8) utilizando dicho tipo de técnicas. Teniendo en cuenta que se requieren aproximadamente 10 nodos por longitud de onda para alcanzar una buena precisión en los resultados, la experiencia acumulada en cuanto a requerimientos de memoria y tiempo de cálculo determina que es razonable, en los equipos usualmente disponibles en nuestro medio, trabajar con dominios del orden de hasta 10 longitudes de onda de lado.

Una alternativa para resolver dominios mayores fue propuesta por Radder [5], quien utilizó la aproximación parabólica para aplicar la Ec. (8) a problemas en zonas costeras (ver más abajo). De esta forma se logra transformar un problema, originalmente de naturaleza elíptica, en otro de tipo parabólico. Dicho de otra forma, se lo convierte en un problema de valores iniciales, siendo la onda incidente la condición inicial. Si para discretizar un dominio cuadrado se utilizan  $N$  nodos por lado, resolver el problema de tipo elíptico

involucra un sistema lineal de orden  $N^2$ , mientras que para el caso parabólico se trata de  $N$  sistemas de orden  $N$ . De esta forma es posible encarar estudios de propagación de olas sobre distancias del orden de 10 a 100 longitudes de onda.

Para distancias mayores, aún resultan indispensables los modelos de refracción pura, ya sean los basados en el método de los rayos [6] (que surge de aplicar el método de las características), o los que utilizan una formulación directa [7].

#### APROXIMACION PARABOLICA

El método más riguroso para parabolizar se basa en el hecho de que la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] + \gamma \varphi = 0 \quad (9)$$

puede partirse en forma exacta en una onda progresiva y una regresiva (producto de reflexiones y "scattering" inverso)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} &= i \gamma \varphi^+ \\ \frac{\partial \varphi^-}{\partial y} &= -i \gamma \varphi^- \end{aligned} \right\} \varphi^+ + \varphi^- = \varphi \quad (10)$$

El procedimiento para parabolizar consiste, entonces, en transformar una ecuación dada en una forma lo más cercana posible a la de la Ec. (9), lo cual no siempre puede hacerse en forma exacta. Por ejemplo, para aplicar el procedimiento a la ecuación de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K^2 \psi = 0 \quad (11)$$

se propone que  $\varphi = \alpha \psi$ , eligiendo  $\alpha$  y  $\gamma$  tales que las Ecs. (11) y (9) sean equivalentes. Resulta que  $\gamma = \alpha$ , siendo  $\alpha$  el siguiente operador pseudodiferencial

$$\alpha = \left\{ K^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\}^{\frac{1}{4}} \quad (12)$$

Teniendo en cuenta que  $\varphi^+ = \alpha \psi^+$ , y reemplazando en la primera de las Ecs (10), resulta

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ K^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\}^{\frac{1}{4}} \psi^+ = i \left\{ K^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\}^{\frac{3}{4}} \psi^+ \quad (13)$$

y expresando los operadores con los dos primeros términos de su desarrollo en serie de potencias se obtiene la aproximación parabólica buscada

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ k^{\frac{1}{2}} \psi^* + p_1 k^{\frac{3}{2}} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right\} = i k^{\frac{3}{2}} \psi^* + i p_2 k^{\frac{5}{2}} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \quad (14)$$

siendo  $p_1 = 0.25$  y  $p_2 = 0.75$ .

La Ec. (14) plantea un problema de tipo parabólico para la onda progresiva  $\psi^*$ , sin tener en cuenta la parte regresiva, habiendo desaparecido, entonces, las derivadas de segundo orden respecto de  $y$  (permanecen en cambio, derivadas de primer orden). La aproximación efectuada es válida en la medida que

$$\left| \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right| \ll |k^2 \psi^*| \quad (15)$$

Para problemas con corrientes moderadas resulta razonable, aunque no necesario para el desarrollo que sigue, que en la ecuación de olas con corrientes, Ec. (4), se desprecien los términos con  $\nabla \cdot \underline{U}$  y  $\underline{U}^2$  resultando

$$i \omega \underline{U} \cdot \nabla \bar{\xi} - \nabla \cdot (a \nabla \bar{\xi}) + (\sigma^2 - \omega^2 - \mathcal{X}^2 a) \bar{\xi} = 0 \quad (16)$$

Si se define el operador diferencial  $M$  como

$$M \equiv \left( \sigma^2 - \omega^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ a \frac{\partial}{\partial x} \right] + 2 i \omega U \frac{\partial}{\partial x} \quad (17)$$

la aproximación parabólica de la Ec. (16) resulta

$$\left( \frac{i \omega V}{a} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ (a\mathcal{X})^{\frac{1}{2}} \bar{\xi} + \frac{p_1}{\mathcal{X}} (a\mathcal{X})^{-\frac{1}{2}} M \bar{\xi} \right\} = i \mathcal{X} (a\mathcal{X})^{-\frac{1}{2}} \bar{\xi} + i p_2 (a\mathcal{X})^{-\frac{1}{2}} M \bar{\xi} \quad (18)$$

Esta ecuación diferencial se usa cuando la onda regresiva no es importante y el oleaje tiene una dirección privilegiada de propagación (que se considera coincidente con la dirección  $y$ ), en cuyo caso es válido considerar que

$$|M \bar{\xi}| \ll |\mathcal{X}^2 \bar{\xi}| \quad (19)$$

#### CONDICIONES INICIALES Y DE CONTORNO

Para resolver el problema planteado por la Ec (18) sobre un dominio espacial rectangular  $\mathcal{D}$  abierto en la dirección  $y$ , (fig. 2), se requiere de condiciones

iniciales y de contorno. Se entiende, en este caso, por condición inicial al potencial

$$\bar{\phi}_0(\infty) = \bar{\phi}(\alpha, y=y_0) \quad \forall x \in \mathbb{D} \quad (20)$$

que representa al oleaje incidente.

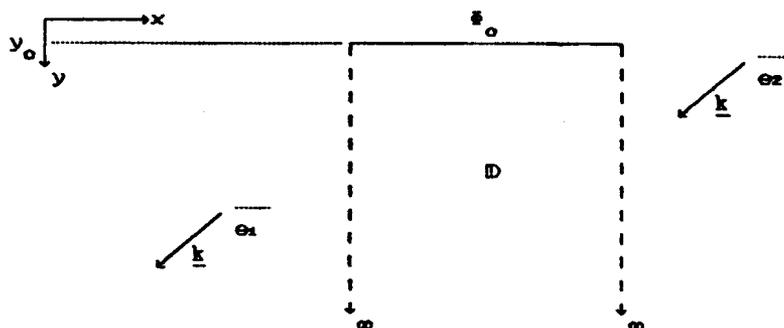


Fig. 2 : Dominio de cálculo

Desde el punto de vista ingenieril es necesario que los contornos del dominio de cálculo ( $x = \text{cte.}$ ) cumplan diversas funciones, por ejemplo, simular los efectos que sobre el oleaje producen distintos tipos de estructuras o accidentes geográficos (escolleras, playas, etc.) ó delimitar una zona de interés (contorno matemático). Estos objetivos se pueden cumplir en forma aproximada, con condiciones de tipo Neumann :

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} = i\alpha k \cos\theta \bar{\phi} \quad (21)$$

donde  $k$  es el módulo del vector número de ondas del oleaje (el cual coincide con  $k$  cuando la onda es localmente plana),  $\theta_1$  y  $\theta_2$  los ángulos que el mismo forma con el eje  $x$  en los bordes correspondientes, y  $\alpha$  un coeficiente (se lo toma real) que varía entre 0 y 1.

Estructuras alineadas con el eje  $y$  se pueden representar en forma directa asignando a  $\alpha$  un valor que cuantifique el porcentaje de energía absorbida por la misma, que depende fundamentalmente de sus características constructivas. El valor  $\alpha = 0$  representa reflexión total. En el caso en que exista absorción se necesita conocer el ángulo de incidencia sobre el borde, pues de lo contrario se producen reflexiones indeseadas. Para el caso de incidencia aproximadamente normal se pueden utilizar diversas aproximaciones que no requieren del conocimiento de  $\theta$ .

Para delimitar el dominio de cálculo se puede definir un contorno matemático transparente,  $\alpha = 0$ , en

una región donde se pueda considerar que la batimetría sea regular y sólo depende de  $y$ , en cuyo caso es posible calcular el ángulo en función de la profundidad [8].

#### DISCRETIZACION DEL PROBLEMA

El potencial  $\Phi$  puede expresarse en función de la amplitud  $X$  y de la fase  $S$  de la siguiente manera

$$\Phi(x, y) = X(x, y) e^{iS(x, y)} \quad (22)$$

En el caso de una onda propagándose según la dirección  $y$  sobre un fondo horizontal y considerando nula la fase inicial, se tiene que  $S = X_0 y$ , donde  $X_0$  se obtiene de la relación de dispersión a partir de la profundidad. Ahora, si, en general, se define a

$$\Phi_1 = \Phi e^{-iX_0 y} \quad (23)$$

donde  $X_0$  se define a partir de la profundidad local representativa en la dirección  $y$ , la derivada parcial de  $\Phi_1$  respecto de  $y$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = \left[ \frac{\partial A}{\partial y} + iA \left( \frac{\partial S}{\partial y} - X_0 \right) \right] e^{i(S - X_0 y)} \quad (24)$$

Entonces, dado que la diferencia entre  $S$  y  $X_0 y$  es pequeña (si se cumplen las hipótesis efectuadas al parabolizar), la variación de  $\Phi_1$  con respecto a  $y$  es casi tan suave como la de su amplitud. Desde el punto de vista numérico, discretizar una variable con variaciones más suaves implica reducir el error de truncamiento. Por esta razón, en las ecuaciones a resolver se utilizó la sustitución indicada en la Ec (23) y se efectuó la discretización sobre la nueva variable. En los resultados de ensayos numéricos realizados para el caso de fondo plano trabajando con  $\Phi$ , o sea  $X_0 = 0$ , se obtiene que la amplitud es constante pero la distancia entre líneas de fase se aparta en un 3 % de la longitud de onda  $\lambda = 2\pi/X$  usando un paso  $\Delta y = \lambda/10$  mientras que este error es nulo cuando se utiliza el valor de  $X_0$  antes sugerido.

La discretización del problema se efectuó utilizando diferencias finitas centradas en la dirección  $x$  incluyendo las condiciones de borde y el esquema de Crank-Nicolson para avanzar en la dirección  $y$ . Las ecuaciones obtenidas son de la forma

$$e^{-iX_0 \Delta y} \left\{ \Phi_{j-1}^{i+1} O + \Phi_{j-1}^{i+1} P + \Phi_{j-1}^{i+1} Q \right\} = \left\{ \Phi_{j-1}^i O_0 + \Phi_{j-1}^i P_0 + \Phi_{j-1}^i Q_0 \right\} \quad (25)$$

donde  $O, P, Q$  son funciones de  $\Delta x, \Delta y, X, V, \alpha, \omega$  y  $U$ .

La molécula de cálculo se muestra en la fig. 3. La aplicación reiterada de la Ec.(25) permite, a partir de los potenciales de la fila  $i$  construir un sistema de ecuaciones de matriz de coeficientes tridiagonal para obtener los potenciales de la fila  $i+1$

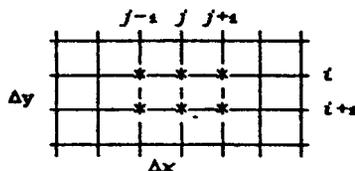


Fig 3 : Molécula de cálculo

#### PRUEBAS DEL MODELO IMPLEMENTADO

En esta etapa se efectuaron pruebas del modelo para situaciones sin corrientes [9].

La primer prueba es prácticamente un estándar para este tipo de modelos. Se trata de un problema de refracción y difracción combinada, debido a una fuerte variación batimétrica. Esta es una protuberancia de forma elíptica sobre un fondo plano tal como se muestra en la fig. 4. Esta configuración fue ensayada en un modelo físico [10] efectuándose mediciones de amplitud y fase del oleaje, lo cual permite verificar los resultados obtenidos numéricamente. En la fig. 5 se observan líneas de isoamplitud relativa obtenidas a partir de mediciones efectuadas en laboratorio (fig 5.a) y de valores calculados numéricamente (figs 5.b y 5.c), presentándose también resultados obtenidos por otros autores con modelos similares [11]. La fig 6 muestra la amplitud relativa sobre un corte del dominio. Se observa con claridad que el acuerdo en general es bueno; sin embargo se aprecian discrepancias que se deben al carácter lineal del modelo utilizado tal como lo confirmaron Kirby y Dalrymple [12] al considerar efectos no lineales.

La segunda prueba consiste en un problema de difracción pura provocada por la presencia de un obstáculo. Se trata de un espigón semi-infinito totalmente reflejante, atacado por un frente de olas de orientación arbitraria, que se propaga sobre un fondo plano. Este problema tiene solución analítica [13], la cual se expresa en términos de las integrales de Fresnel, que pueden evaluarse numéricamente en base a un desarrollo sobre las funciones de Bessel de primera y segunda especie [14]. Al difractarse, la dirección de propagación del frente de olas puede alejarse sustancialmente de la dirección privilegiada de propagación, con lo cual se violenta una hipótesis básica de la aproximación parabólica. El objetivo de esta prueba

es el de cuantificar el error cometido y obtener criterios prácticos en cuanto a la confiabilidad de los resultados obtenidos.

En una primer serie de ensayos se ubicó al espigón en forma longitudinal al dominio de cálculo, o sea paralelo a la dirección  $y$ , y se varió el ángulo  $\theta$  entre la normal al frente y la dirección del espigón. En la fig. 7 se presentan las líneas de isoamplitud relativa obtenidas a partir de los resultados numéricos y de la solución analítica para  $\theta = 20^\circ$  y  $45^\circ$ . En el primer caso, y también para valores menores de  $\theta$ , se observa que el acuerdo es bueno. Al aumentar  $\theta$  la precisión de los resultados es menor pudiéndose considerar que el segundo caso presentado representa el límite hasta el cual son aceptables los resultados desde el punto de vista ingenieril.

En la segunda serie de ensayos, el espigón se ubicó en forma transversal, o sea paralelo a la dirección  $x$ , y se tomó  $\theta = 90^\circ$ . Esto genera una situación mucho más desfavorable para la aplicación del modelo pues frente al espigón, las olas se propagan en forma normal a la dirección privilegiada por la aproximación parabólica. Además, sobre el espigón se impuso, adoptando un criterio heurístico, la condición de impermeabilidad

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \quad (26)$$

que nuevamente viola en forma local la hipótesis de parabolización. En la fig 8 se presentan las líneas de isoamplitud relativa, donde se observa una zona de desacuerdo frente al espigón, la cual puede delimitarse con una línea que parta desde la punta del espigón y forme un ángulo de aprox.  $30^\circ$  con el mismo. En la fig. 9 se presentan las amplitudes relativas sobre un corte transversal ubicado a 4 longitudes de onda del espigón, se observa que fuera de la zona mencionada el acuerdo es satisfactorio. En la fig. 10 se presentan las líneas de fase que describen un clásico patrón de difracción, la pequeña discrepancia que se aprecia en la figura se debe al error de truncamiento que se manifiesta en la longitud de onda,  $\lambda$ , produciendo un desfase acumulativo entre los frentes de onda.

#### ENSAYOS NUMERICOS

El problema ingenieril que motivó este desarrollo fue el estudio de la propagación en un río de las olas producidas por la operación de los vertederos ubicados en el centro de una presa construida sobre el mismo. En particular, interesa la determinación de la amplitud del oleaje y su dirección en la zona próxima a las márgenes del río. Estos datos resultan importantes para estudiar el proceso de erosión de las márgenes del Río Uruguay aguas abajo de la presa de Salto Grande.

Se presentan los resultados de un ensayo numérico en el cual se caracterizó el problema descripto. La fig.11 muestra a través de un corte transversal la cota de fondo utilizada en el ensayo. Se adoptó una condición de simetría en el eje del río y una condición de borde similar a la del espigón transversal permitió simular la presa, no considerándose en esta etapa los efectos de las corrientes. Para el ensayo numérico se utilizó un oleaje de 7 segundos de periodo, pasos de discretización espacial  $\Delta x = \Delta y = 5$  m. En la fig. 12 se presentan las líneas de isoamplitud relativa y en la fig. 13 las líneas de fase.

#### CONCLUSIONES

La metodología utilizada en el modelo presentado constituye una alternativa válida para el estudio de la propagación de olas teniendo en cuenta los efectos de refracción y difracción en forma combinada en regiones relativamente extensas. Las pruebas efectuadas muestran que la distorsión de los resultados en aquellas zonas donde no se cumplen las hipótesis de la aproximación parabólica no contamina el resto de la solución, lo cual proporciona una mayor flexibilidad para la utilización del modelo.

#### REFERENCIAS

- [1] Berkhoff, J.C.W., "Mathematical models for simple harmonic linear water waves - Wave diffraction and refraction", Publication N°163, Delft hydraulics laboratory, April 1976
- [2] Booij, N., "Gravity waves on water with non-uniform depth and current", Report N°81-1, Delft University of Technology, 1982
- [3] Berkhoff, J.C.W., "Computation of combined refraction-diffraction", Proc. 13th. Conf. on Coastal Engineering, Vancouver, Julio 1972
- [4] Vionnet, C.; Menéndez, A. "Difracción-refracción combinadas en ondas de agua. Cálculo utilizando elementos finitos híbridos, incluyendo bordes absorbentes y disipación por fricción". Enief'87.
- [5] Radder, A.C. "On the parabolic equation method for water-wave propagation, J. Fluid Mech. 95, pág. 159-176, 1979
- [6] Vionnet, C. "REFRAC. Un modelo matemático para el cálculo de la refracción y el bajío de una onda monocromática", Informe LHA-INCyTH 064-06-88, Julio 1988

- [7] Zyserman, J.A., "REFRACKY. Un modelo matemático de refracción de olas con corrientes", Informe interno LHA-INCyTH , Junio 1990
- [8] Kirby, J.T., "Open boundary condition in parabolic equation method", J of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering, ASCE, Vol 112 N°3, Mayo 1986
- [9] Cavaliere, M.A.; Menéndez, A.N., "Modelo de propagación de olas basado en la aproximación parabólica", Informe LHA-INCyTH en preparación
- [10] Berkhoff, J.C.W., "Report W 154-VIII", Delft hydraulics laboratory, 1982
- [11] Berkhoff, J.C.W.; Booij N.; Radder, A.C., "Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves", Coastal Engineering 6, pág 255-279, Elsevier Publishers, Amsterdam, 1982
- [12] Kirby, J.T.; Dalrymple, R.A., "Verification of a parabolic equation for propagation of weakly-nonlinear waves", Coastal Engineering 8, pág 219-232, Elsevier Publishers, Amsterdam, 1984
- [13] Penny, W.G.; Price, A.T., "The diffraction theory of sea waves and the shelter afforded by breakwaters", Philos. Transactions of Royal Society of London, Series A244, March 1952
- [14] Abramowitz, M.; Stegun, I.A., "Handbook of mathematical functions", Applied Mathematics Series, N°55, National Bureau of Standards, Washington, 1972

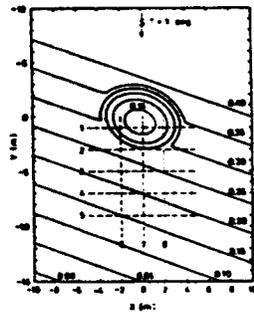


Fig. 4 : Configuración del problema

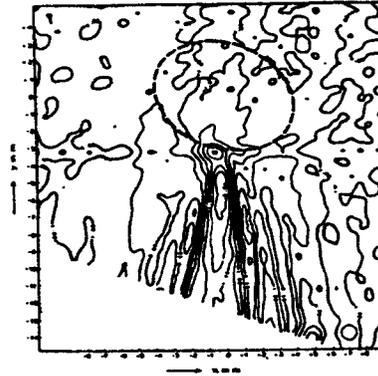


Fig. 5.a : mediciones en laboratorio

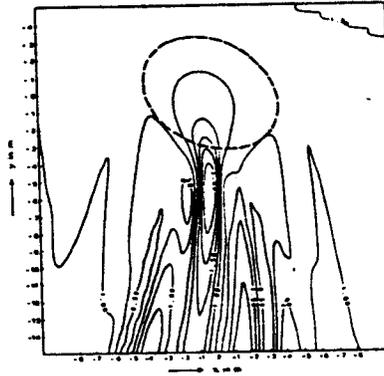


Fig. 5.b : resultados de Berkhoff y otros

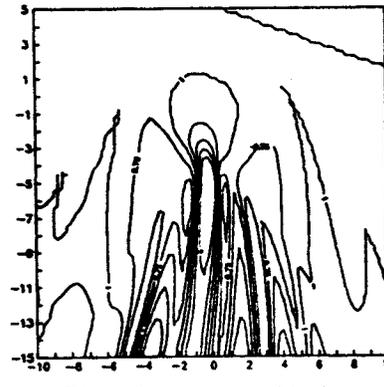


Fig. 5.c : resultados de este modelo

Fig. 5 : Líneas de isoamplitud relativa

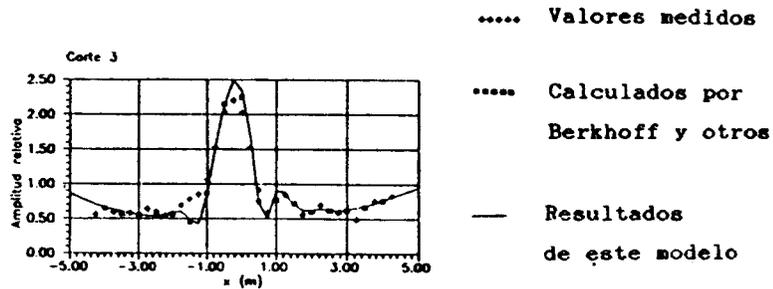


Fig. 6 : Amplitudes relativas según un corte transversal

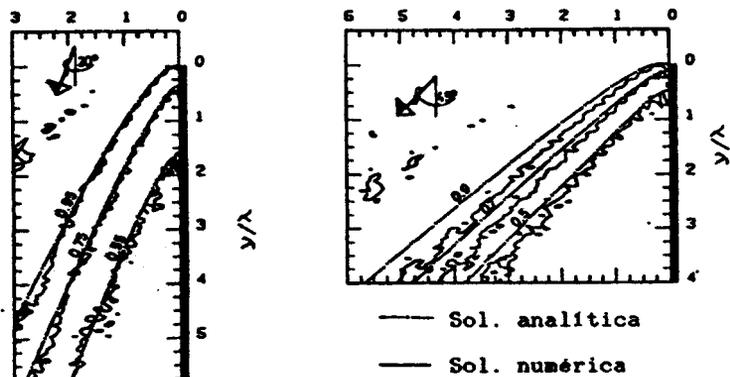


Fig. 7 : Espigón semi-infinito longitudinal  
Líneas de isoamplitud relativa

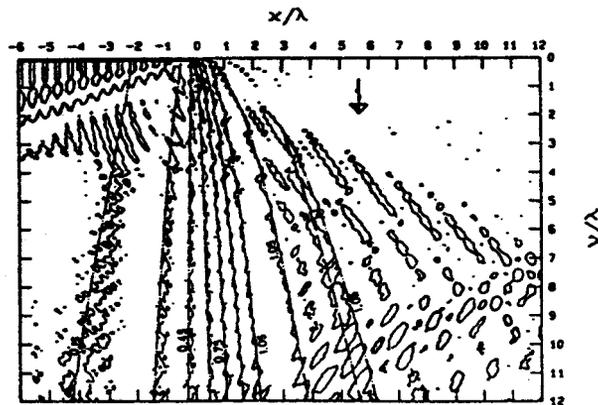


Fig. 8 : Espigón semi-infinito transversal  
Líneas de isoamplitud relativa

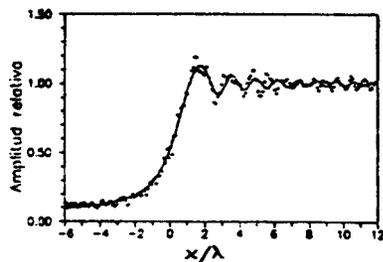


Fig. 9 : Amplitudes relativas según corte en  $y/\lambda = 4$

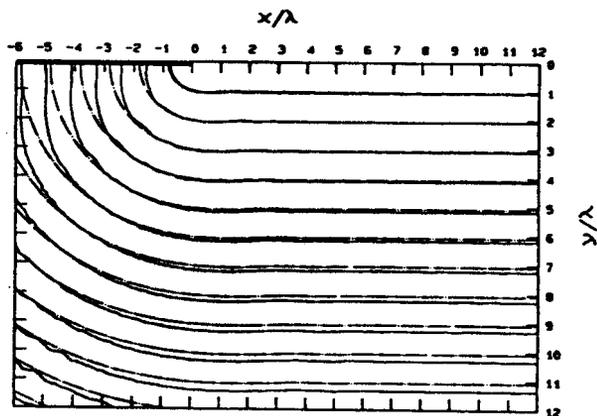


Fig. 10 : Espigón semi-infinito transversal  
Líneas de fase

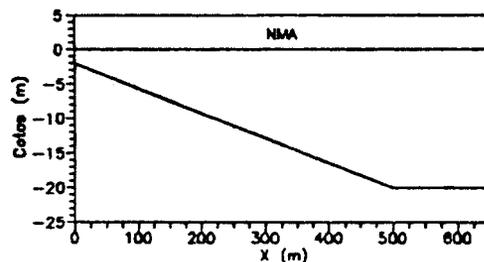


Fig 11 : Variación transversal de la cota de fondo

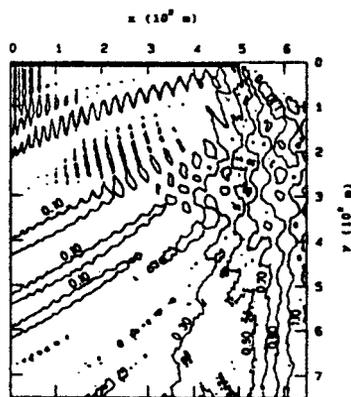


Fig 12 : Ensayo numérico con fondo variable  
Líneas de isoclasividad relativa

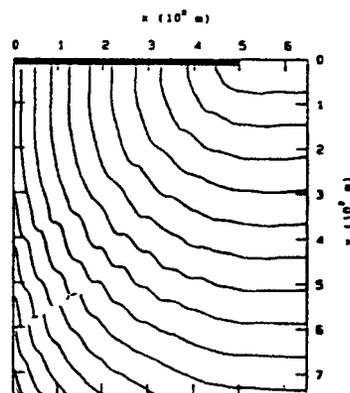


Fig 13 : Ensayo numérico con fondo variable  
Líneas de fase

