

UM MÉTODO PARA ANÁLISE MODAL, POR ELEMENTOS FINITOS,  
DE MONTAGENS POR UNIÕES APARAFUSADAS

Adyles Arato Jr  
João Antonio Pereira

Núcleo de Apoio Computacional.  
Departamento de Engenharia Mecânica.  
FEIS - UNESP.  
Ilha Solteira, SP - Brasil.

RESUMO

Uma metodologia que permite a modelagem de estruturas montadas por uniões aparafusadas é apresentada. A região de contato entre as peças é modelada por elementos finitos especiais, denominados elementos aspereza, que permitem a avaliação da rigidez da montagem levando em conta a força de aperto aplicada pelos parafusos, e a combinação do material e grau de acabamento superficial de cada peça na região de contato. A análise modal é realizada utilizando-se as matrizes de rigidez e de massa obtidas por essa modelagem.

ABSTRACT

A method for the finite element modelling of bolted joints is presented. A special finite element "roughness" is used to model the contact between the joint components. This element allows an estimate of the stiffness of the assembly, including the effect of the tightening force and the surface characteristics in the contact region. A modal analysis is shown employing both the stiffness and mass matrices evaluated by means of the model.

## INTRODUÇÃO

Juntas aparafusadas são largamente utilizadas na fabricação mecânica principalmente por serem desmontáveis e atenderem a elevados níveis de exigência quanto a precisão e tolerância de montagem.

Ainda que até o presente momento a VDI 2230, "Cálculos Sistemáticos em Juntas Rigidamente Fixadas por Parafusos", ref. [1], é um trabalho de referência no dimensionamento e análise de uniões aparafusadas, o aumento dos requisitos de segurança, confiabilidade e leveza dos equipamentos, têm motivado um grande número de estudos visando aprofundar criticamente o conhecimento na área, ref. [2,3,4,5], principalmente para análise do comportamento estático e dinâmico da montagem. Estes trabalhos têm demonstrado que os procedimentos adotados pela VDI 2230 não são adequados para avaliações precisas da rigidez.

Com o objetivo de melhorar os resultados da avaliação da rigidez das uniões aparafusadas, as pesquisas se desenvolveram basicamente sob dois enfoques: aplicação do método de elementos finitos e determinação de fatores de correção para a formulação da VDI 2230 para cada aplicação pretendida. Até o momento, ref. [5,6,7], o método de elementos finitos tem apresentado os melhores resultados. A principal razão da maior precisão do método de elementos finitos, é que ele torna possível se levar em conta a rigidez do plano de contato entre as peças e, simultaneamente, de todo o conjunto da montagem.

A título de ilustração, toma-se o caso da montagem biela-capo de biela mostrada na figura 1.

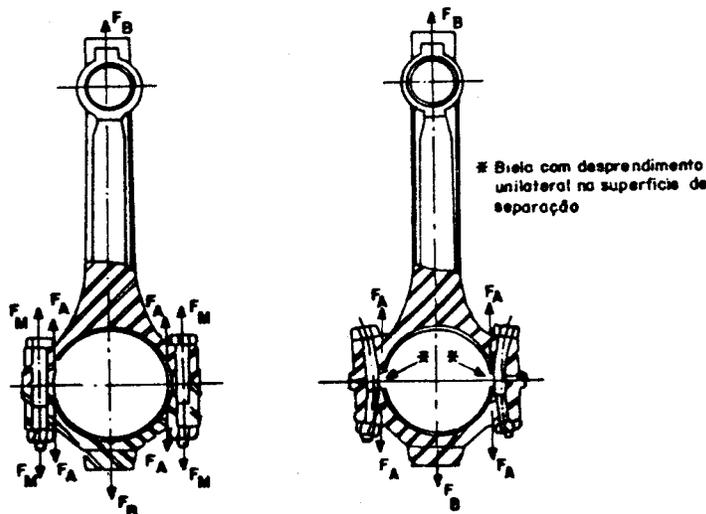


Figura 1 - Exemplo de um conjunto biela-capo de biela

As forças efetivamente conhecidas são:  $F_M$ , força de fixação aplicada pelos parafusos, e  $F_B$ , força agindo sobre a montagem. A aplicação de elementos finitos permite a modelagem do conjunto como um todo, obtendo-se a sua matriz de rigidez global com a qual se pode avaliar o deslocamento de cada ponto e verificar, por exemplo, se ocorreu ou não desprendimento unilateral do plano de contato, que caracteriza a falha da montagem. Se, em complementação, é montada a matriz de massa, pode ser realizada uma avaliação de suas frequências naturais e modos próprios de vibrar.

#### RIGIDEZ DE UNIÕES APARAFUSADAS

Atualmente é aceito, ref. [8], para efeito de projeto e dimensionamento, a modelagem baseada na VDI 2230 segundo a qual uma união aparafusada se comporta como uma associação de conjuntos parafuso-alojamento, cada um modelado da forma apresentada na figura 2, onde:

$$D_e = D_i + 2.L_e$$

$D_i$  = diâmetro do furo

$D_c$  = diâmetro do anel de encosto do parafuso

$L_e = L_A$  se  $L_A \geq L_B$  ; ou  $L_e = L_B$  se  $L_A < L_B$

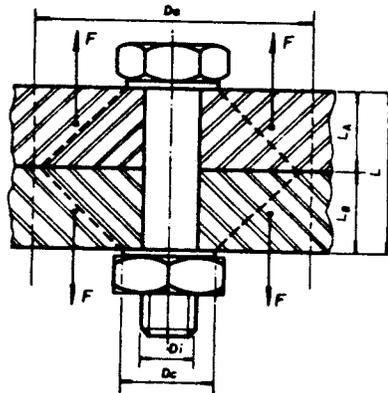


Figura 2 - Modelagem do entorno de um parafuso

Para a determinação da rigidez, é considerado que o carregamento externo  $F$  vai provocar um alongamento total no conjunto  $d_t$  resultante de uma distensão do parafuso  $d_p$  e uma compressão das peças  $d_c$ , onde:

$$d_t = |d_p| + |d_e|$$

Denotando-se a rigidez total do conjunto por  $K_j$ , fica:

$$d_t = \frac{F}{K_j}$$

$$K_j = K_p + K_e$$

onde:

$$K_p = \frac{\pi \cdot D_i^2 \cdot E_p}{4 \cdot L}$$

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K_A} + \frac{1}{K_B}$$

$$K_A = \frac{\pi \cdot E_A \cdot D_i}{\ln \left\{ \frac{(2 \cdot L_A + D_c - D_i) \cdot (D_c + D_i)}{(2 \cdot L_A + D_c + D_i) \cdot (D_c - D_i)} \right\}}$$

$$K_B = \frac{\pi \cdot E_B \cdot D_i}{\ln \left\{ \frac{(2 \cdot L_B + D_c - D_i) \cdot (D_c + D_i)}{(2 \cdot L_B + D_c + D_i) \cdot (D_c - D_i)} \right\}}$$

Com relação a esta análise, deve-se salientar que:

- a) O plano de contato entre as peças foi considerado rígido, desprezando-se a deformação devida a tensão de contato.
- b) As relações para  $K_A$  e  $K_B$  foram obtidas como se cada parte do entorno da união se comportasse como um cilindro elástico sobre base rígida, sujeito a um carregamento distribuído sobre uma área anelar em seu topo. Este carregamento é a força de aperto do parafuso.
- c) A análise responde parcialmente ao problema do comportamento do conjunto parafuso-alojamento, deixando em aberto o problema da montagem.

### O MÉTODO PARA ANÁLISE DE UNIÕES APARAFUSADAS POR ELEMENTOS FINITOS

Considerando que o método de elementos finitos é voltado para a análise de peças e estruturas com geometria complexa, sujeitas a qualquer tipo de carregamento, a solução dos problemas associados a análise das uniões aparafusadas será obtida com a formulação e implementação de um elemento finito que permita a modelagem do plano de contato entre as peças, representando adequadamente a sua rigidez em composição com a rigidez do parafuso, ref. [6,9].

Para efeito de descrição da modelagem, considere-se o caso do conjunto parafuso-alojamento apresentado na figura 2. O primeiro passo da modelagem é considerar a força de aperto aplicada pelo parafuso como um carregamento uniformemente distribuído,  $W_p$ , na região de ancoragem do parafuso sobre as peças, Figura 3, calculada por:

$$W_p = \frac{4 \cdot F_p}{\pi \cdot (D_c^2 - D_i^2)}$$

onde:

$F_p$  = Força de aperto aplicada pelo parafuso

$D_c$  = Diâmetro externo da ancoragem do parafuso

$D_i$  = Diâmetro do furo

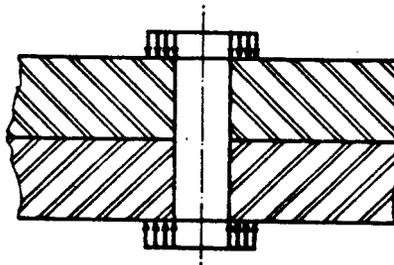


Figura 3 - Modelagem da força de fixação aplicada pelo parafuso.

O segundo passo consiste em se traçar uma malha de elementos finitos do sistema, figura 4, observando-se os detalhes:

- a) Cada uma das peças fixadas são modeladas por malhas independentes, com a restrição de que na região de contato os nós de cada malha sejam coincidentes.
- b) Sob a região de ancoragem do parafuso, a malha seja mais refinada de forma a se poder representar convenientemente o carregamento relativo a força de aperto.

Neste ponto, a carga distribuída relativa a força de aperto, é repassada por um conjunto de forças concentradas,  $Fv_i$ , calculadas por:

$$Fv_i = W_p \cdot A_i$$

onde:  $A_i$  = área de influência do nó i.

O terceiro passo consiste na definição de elementos finitos binodais especiais, interligando as malhas referentes a cada peça através dos nós coincidentes da região de contato, figura 4. Estes elementos especiais, denominados de elementos asperezas, é que são responsáveis pela descrição do comportamento do plano de contato em conjugação com a força tensora aplicada pelo parafuso.

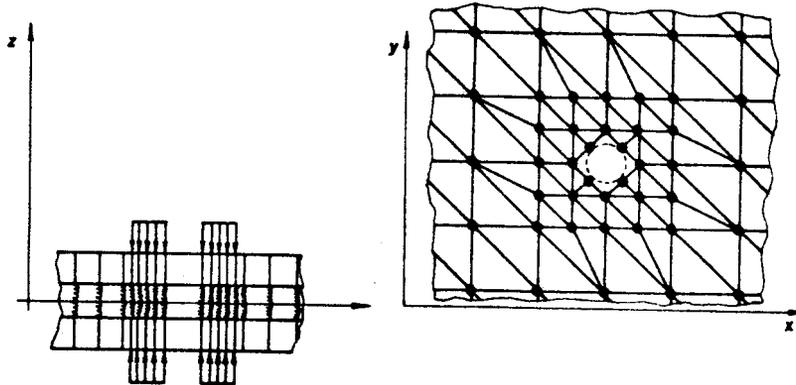


Figura 4 - Modelagem por elementos finitos do conjunto parafuso-alojamento.

#### FORMULAÇÃO DO ELEMENTO ASPEREZA

A formulação detalhada do elemento aspereza, é apresentada na referência [10]. As bases iniciais, bem como uma revisão detalhada da teoria utilizada estão apresentadas nas referências [2, 10 e 11]. De uma forma sucinta, o elemento aspereza na sua versão atual, é formulado como um elemento binodal de comprimento nulo e 6 graus de

liberdade tal que:

- a) Não possui rigidez a tração ou torção.
- b) Possui rigidez a compressão variável, em função da deformação atuante, segundo a relação:

$$K_{n_i} = \frac{A_i \cdot |\lambda_{n_i}|}{C^2}$$

onde:

$A_i$  = área de influência do elemento i

$\lambda_{n_i}$  = deslocamento relativo entre os nós definidores do elemento i:

$C$  = parâmetro definidor do grau de acabamento e tipo de materiais das superfícies em contato.

- c) A sua rigidez tangencial é determinada por:

$$K_{s_i} = \frac{A_i \cdot |\lambda_{n_i}|}{C^2 \cdot (1 + \mu)}$$

onde:

$\mu$  = coeficiente de Poisson para o material

Considerando o esquema apresentado na figura 5, a matriz de rigidez do elemento aspreza i, em coordenadas locais, fica:

$$\begin{bmatrix} K_n & 0 & 0 & -K_n & 0 & 0 \\ 0 & K_s & 0 & 0 & -K_s & 0 \\ 0 & 0 & K_s & 0 & 0 & -K_s \\ -K_n & 0 & 0 & K_n & 0 & 0 \\ 0 & -K_s & 0 & 0 & K_s & 0 \\ 0 & 0 & -K_s & 0 & 0 & K_s \end{bmatrix}$$

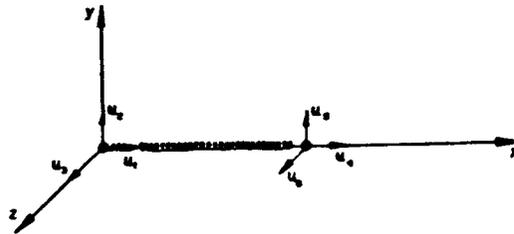


Figura 5 - Elemento aspreza no sistema de coordenadas local

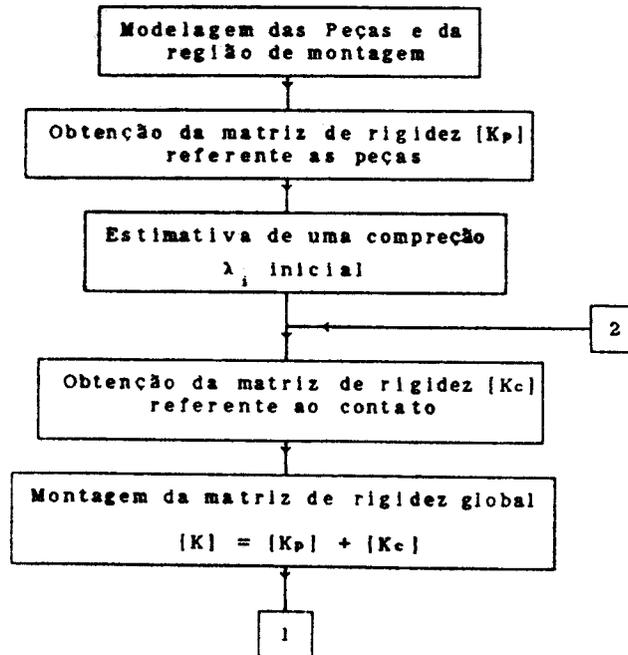
### PROGRAMA DESENVOLVIDO

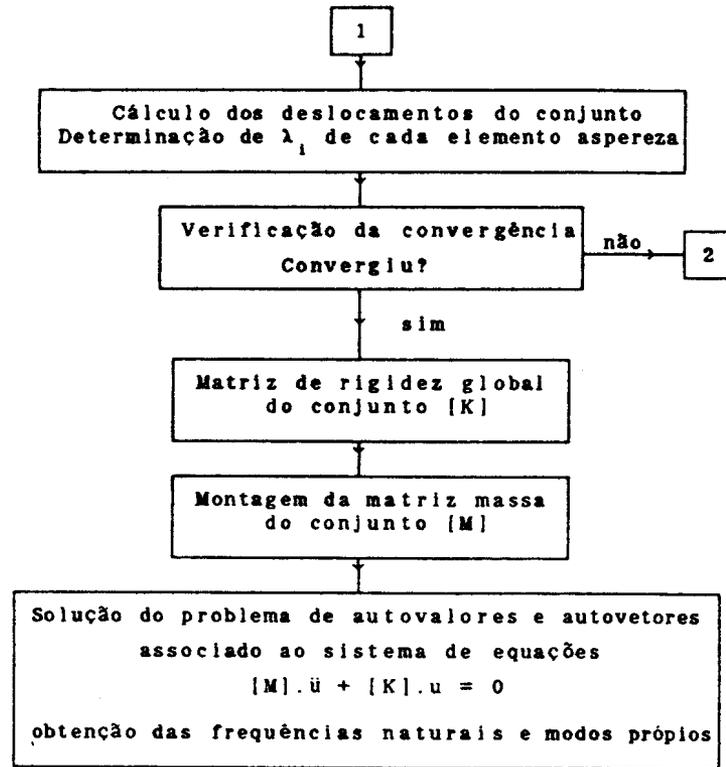
A avaliação das frequências naturais e seus modos próprios com a aplicação do método de elementos finitos, consiste na sua utilização para a obtenção da matriz de rigidez  $[K]$  e da matriz de massas  $[M]$  da estrutura modelada, e na solução do problema de autovalores e autovetores associado ao sistema de equações:

$$[M].\ddot{u} + [K].u = 0$$

Considerando-se a modelagem proposta para uniões aparafusadas, a matriz  $[M]$  é obtida diretamente pela utilização dos elementos finitos que modelam as peças unidas. No caso da matriz  $[K]$ , como o elemento aspreza tem matriz de rigidez calculada de forma dependente com seu estado de deslocamento, a sua obtenção é um processo iterativo onde à cada iteração é efetuada uma redefinição da matriz de rigidez desses elementos em função do deslocamento relativo entre seus nós. A matriz é considerada obtida quando a diferença entre os deslocamentos relativos calculados na iteração atual e os obtidos na iteração anterior for menor que 5%.

A estrutura geral do programa fica:





Observando-se a estrutura montada, pode-se verificar que o processo iterativo se restringe unicamente a obtenção da matriz de rigidez do contato,  $[K_c]$ , e que a obtenção da matriz de rigidez,  $[K_p]$ , e da matriz massa,  $[M]$ , das peças é realizada uma única vez.

#### EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Com a finalidade de verificar o comportamento dos resultados, e demonstrar o emprego da metodologia proposta, foi construído um modelo experimental que consiste de uma tira de aço com 280 mm de comprimento, 36 mm de largura e 3 mm de espessura. Essa tira foi montada por aparafusamento sobre uma superfície rígida, figura 6, de modo a ficar com 250 mm em balanço. Para essa montagem, o modelo de elementos finitos é o apresentado na figura 7, onde a tira de aço foi modelada por elementos placa triangular com 6 graus de liberdade por nó, e a força de aperto do parafuso foi substituída por uma carga distribuída aplicadas sobre os nós indicados. As condições de contorno são: os nós pertencentes a placa têm a rotação em torno do eixo global Z restringida e os nós inferiores dos elementos asprezas têm todos os deslocamentos e rotações restringidas por pertencerem a superfície

rígida.

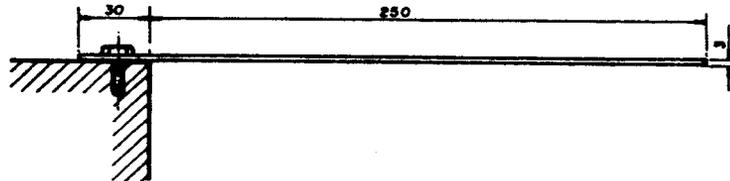


Figura 6 - Tira de aço em balanço, fixada por parafuso

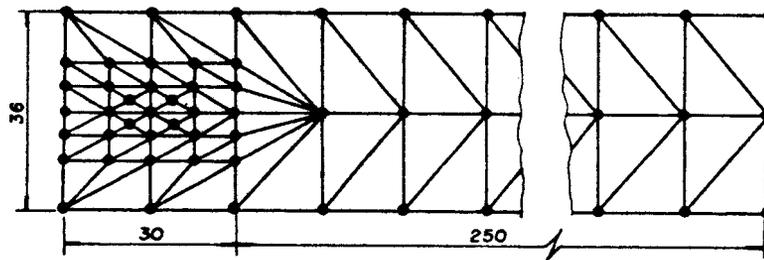


Figura 7 - Modelagem, por elementos finitos, da tira de aço.

Considerando-se o aço com módulo de elasticidade de 210 MPa, coeficiente de Poisson 0,3, massa específica de 7800 Kg/m<sup>3</sup>, e levando em conta que para a combinação de superfícies e grau de acabamento envolvidos o parâmetro C é 0,3, foram calculadas as três primeiras frequências naturais e modos próprios de vibrar do sistema, obtendo-se os resultados apresentados na tabela 1 e figura 8.

Na tabela 1 são apresentadas também as frequências calculadas considerando-se a tira engastada a partir do início do balanço, que

seria o procedimento se não se dispusesse dos elementos asperezas. Para efeito de comparação, foram ainda calculadas as frequências considerando-se a viga engastada na sua extremidade inicial, balanço de 280 mm.

Tabela I - Frequências naturais calculadas para o sistema apresentado na figura 6, utilizando elementos finitos.

Método	Frequências Naturais (Hz)		
	1ª	2ª	3ª
Modelagem com elementos aspereza, balanço 250mm	41,6	254,4	381,5
Modelagem sem elementos aspereza, balanço 250mm	43,2	262,2	431,6
Modelagem sem elementos aspereza, balanço 280mm	33,7	207,3	341,0

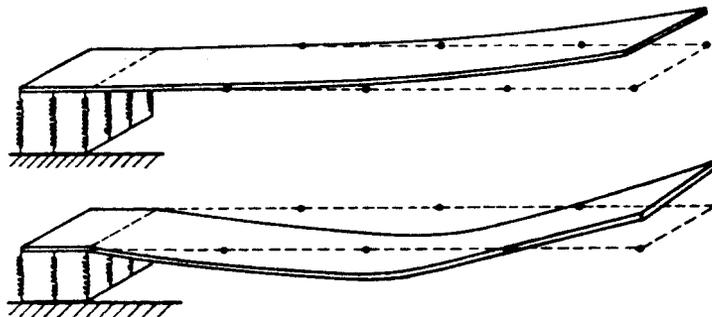


Figura 8 - Modos próprios de vibrar do sistema da figura 6.

Observando-se a tabela 1, verifica-se que com a utilização do elemento aspereza as frequências naturais calculadas são menores do que as obtidas com o modelamento sem este recurso. Verifica-se ainda que estas frequências são maiores que as calculadas para a situação extrema, balanço de 280 mm.

## COMENTÁRIOS FINAIS

Foi apresentado um elemento finito que permite a modelagem mais realista de montagens por parafusos, ou seja, as peças podem ser tratadas como elementos separados e mantidas em contato por uma força tensora. Em complementação, este elemento permite se considerar a flexibilidade do plano de contato entre as peças.

Foi estabelecida uma metodologia que permite a obtenção da matriz de rigidez global [K] do conjunto, levando em conta os efeitos da união aparafusada. Esta matriz foi utilizada na montagem das equações do movimento do conjunto, permitindo o cálculo das frequências naturais e modos próprios de vibrar do conjunto.

Os resultados obtidos, quando comparados com os resultados sem a utilização dos elementos aspereza, se mostraram consistentes com o comportamento esperado.

## AGRADECIMENTOS

A FAPESP - Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo apoio financeiro na montagem do NACDEM (Núcleo de Apoio Computacional do Departamento de Engenharia Mecânica - FEIS/UNESP).

A FUNDUNESP - Fundação para o Desenvolvimento da UNESP, pelo apoio financeiro para a apresentação deste trabalho.

## BIBLIOGRAFIA

- [01] VDI - RICHTLINE 2230. "Systematische Berechnung Schraubenverbindungen", 10/77.
- [02] BURDERKIN, M.; BACK, N.; COWLEY, A., "Analysis on the Local Deformations in Machine Joints", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 21, n° 1 (1979).
- [03] SAWA, T.; MARUYAMA, K.; EDAMOTO, K., "On Characteristics of a Bolted Joint with a Tap Bolt", Bolletin of the JSME, V. 24, n° 197 (1981).
- [04] CIOTO, R., "Estágio Atual do Desenvolvimento da Tecnologia de Juntas Rigidamente Aparafusadas", I Seminário Brasileiro da Tecnologia da Fixação, Sorocaba 08/98, publicação ITF 1/87.
- [05] NAGUYEN, V. Ph., "Bolted Connections: Formula for Calculation of the Flexibility of Clamped Parts", Fasteners, 4 (1989).
- [06] ARATO Jr., A.; NASCIMENTO, L.P.; LOPES Jr., V., "Algoritmo para Análise, por Elementos Finitos, de Uniões Parafusadas" relatório CNPq, ref. 406147/86/EM (1988).
- [07] SATO, A., "Problemas de Juntas na Aplicação Aeroespacial", II Seminário Brasileiro da Tecnologia de Fixação, São Paulo 11/87, publicação ITF 01/88.

- [08] BICKFORD, J.H., "An Introduction to the Design and Behavior of Bolted Joints", New York: Marcel Dekker, 1981.
- [09] ARATO Jr., A.; BACK, N., "Análise de Deformações de Uniões Parafusadas pelo Método de Elementos Finitos", VI COBEM - Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro 12/81.
- [10] ARATO Jr. A., "Distribuição de Pressão e de Deformação em Uniões Parafusadas", dissertação de Mestrado, UFSC, 12/79.
- [11] BACK, N.; BURDEKIN, M.; COWLEY, A., "Pressure Distribution and Deformations of Machined Components in Contact", Int. Journal of Mechanical Science, V. 15 (1973).

