

FORMULAÇÃO VARIACIONAL DO PROBLEMA DE CONTATO
COM ATRITO; RESOLUÇÃO VIA REGULARIZAÇÃO

Eduardo A. Fancello

Programa de Engenharia Mecânica.
COPPE/Universidade Federal de Rio de Janeiro.
Rio de Janeiro - Brasil.

Raúl A. Feijóo

Laboratório Nacional de Computação Científica
LNCC/CNPq
Rio de Janeiro - Brasil

Nestor Zouain Pereira

Programa de Engenharia Mecânica.
COPPE/Universidade Federal de Rio de Janeiro.
Rio de Janeiro - Brasil.

RESUMO

Neste trabalho é discutida uma formulação variacional para problemas de contato com atrito em elasticidade infinitesimal, caracterizada pela continuidade das relações constitutivas que vinculam deslocamentos e reações na região de contato e a diferenciabilidade de seus respectivos potenciais.

Se faz uso do método de elementos finitos para a discretização espacial, desenvolvendo-se um elemento de contato. O problema não linear gerado é resolvido mediante técnicas de programação matemática (método Quasi Newton).

ABSTRACT

In this work a variational formulation for contact problems with friction is discussed. This formulation is characterized by the continuity of the constitutive relations between displacements and reactions at the contact zone and the differentiability of their respective potentials.

A contact element is developed, using the finite element method for the spatial discretization.

The nonlinear problem is solved by mathematical programming (Quasi-Newton method).

1. INTRODUÇÃO.

A transmissão de esforços através de vínculos unilaterais, fenômeno freqüente na mecânica, apresenta-se como um problema de modelagem e resolução não trivial. A dependência existente entre a superfície de contato e as forças aplicadas, conduz a uma forte não linearidade. Por outra parte, a inclusão do atrito aumenta as dificuldades pois traz a discussão questões como unicidade da solução, ainda não totalmente resolvidas.

Em [1] são descritas duas formas de colocação do problema: A primeira consiste no tratamento do vínculo mediante condições de contorno a serem respeitadas e que portanto limitam diretamente o espaço de procura da solução (problemas de Signorini, Duvaut-Lions). A segunda opção, que é a aqui utilizada, estabelece relações constitutivas sobre o vínculo ligando forças de superfície com deslocamentos desta. Neste trabalho as relações constitutivas são construídas de forma tal que seja possível relacionar sobre o vínculo um deslocamento dado a uma força sobre este em forma unívoca.

O comportamento do vínculo na direção normal e tangencial respondem a fenômenos físicos bem diferenciados e serão tratados independentemente: O comportamento na direção normal não inclui processos dissipativos e será formulado em termos de deslocamentos totais (sempre dentro da teoria de pequenos deslocamentos e deformações). Na direção tangencial, a dissipação produzida pelo atrito cria dependência entre a resposta e a história do carregamento; a relação constitutiva nesta direção será então descrita em termos de velocidade de deslocamentos.

Finalmente, a efeitos de resolução numérica, estas relações constitutivas em taxas serão discretizadas no tempo obtendo-se uma formulação incremental do problema em questão.

Esta forma de estruturar o problema e a utilização do método dos Elementos Finitos possibilita a implementação de *Elementos de Contato* onde as mencionadas relações constitutivas são uma característica inerente aos mesmos. O conjunto de equações e inequações é resolvido mediante o método de Quasi-Newton a nível de equilíbrio conjuntamente com a resolução do problema de complementaridade linear a nível de cada elemento de contato.

O estudo ficou restrito aos casos de elasticidade infinitesimal, mas como se verá a seguir, uma das vantagens desta formulação é a sua facilidade para incluir efeitos tais como comportamentos inelásticos, grandes deformações, etc.

A implementação numérica se limitou a estados planos, sendo que exemplos numéricos são resolvidos mostrando a potencialidade do método proposto.

2. CONTATO. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA.

2.1. Equação constitutiva normal.

Seja um corpo B ocupando uma região regular Ω limitada pelo contorno Γ no espaço euclidiano E . Esta região será denominada configuração de referência e chamaremos ponto material a cada ponto X do corpo B nesta configuração.

Consideramos o processo quase-estático no sentido que é suficientemente lento para desprezar forças dinâmicas, efeitos de impacto, etc, passando o tempo a ser um parâmetro que estabelece apenas a seqüência das configurações.

No problema que estudaremos, o corpo B (percussor), entrará em contato com outro corpo A (apoio). Sejam em B os contornos Γ_u (deslocamentos prescritos), Γ_r (forças prescritas) e Γ_c (superfície potencial de contato; contém a superfície efectiva de contato para todo o processo de deformação). O contorno Γ fica definido da seguinte forma:

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_r \cup \Gamma_c ; \quad \Gamma_u \cap \Gamma_r = \emptyset ; \quad \Gamma_u \cap \Gamma_c = \emptyset$$

Introduziremos algumas condições nas características de Γ_c com o objetivo de limitar o problema em estudo.

Esta superfície é suposta suficientemente plana para que a normal $n(x)$ sobre ela definida não varie em forma apreciável quando passamos de um ponto a outro. Exigimos também que a superfície de A localizada em frente a Γ_c seja tal que a normal saliente n_b de um ponto $b \in \Gamma_c$ encontre um ponto a na superfície de A cuja normal n_a seja praticamente colinear com n_b .

O fato de trabalhar com a teoria de pequenos deslocamentos e deformações permite assegurar que as normais não variarão sensivelmente durante o processo. Com estas premissas, podemos convir que dois pontos a, b pertencentes a corpos A e B respectivamente estarão relacionados por uma única normal $n(x)$, $x \in \Gamma_c$.

Seja

$$K_u = \left\{ u : u \in U ; u = \bar{u} \forall x \in \Gamma_u \right\}$$

onde U é o espaço vetorial de todas as configurações possíveis (entendemos por possíveis que os elementos destes espaços são compatíveis com as hipóteses cinemáticas do modelo e que as operações que faremos sobre eles tenham sentido), e K_u , subconjunto de U , contém todas as configurações compatíveis com os vínculos bilaterais.

Definiremos o escalar $u(x)$, $x \in \Gamma_c$ da seguinte forma:

$$\bar{u}_a = (u_a \cdot n)n \quad \bar{u}_b = (u_b \cdot n)n \quad (1)$$

$$u_n = (\bar{u}_b - \bar{u}_a) \cdot n \quad (2)$$

A cinemática de dois pontos em possível contato pode ser escrita:

$$s - u_n \geq 0 \quad (3)$$

$$r_n \leq 0 \quad (4)$$

$$r \cdot \bar{u}_n = 0 \quad (5)$$

onde a variável $s \geq 0$ representa uma "folga" entre os corpos, de valor suficientemente pequeno como para ser compatível com a teoria proposta. Observa-se que estas equações determinam uma relação constitutiva entre os pontos em questão representada pela curva a) da fig.2. Assim, dado um deslocamento, pode-se determinar a existência da reação mas sem o conhecimento do valor de ésta até não ser resolvido o problema de equilíbrio. Neste ponto, se propõe uma "regularização" a este tipo de relação introduzindo a possibilidade de penetração através de um módulo de rigidez elástica k_n (curva b) fig.2). Com isto, pretende-se simular a situação anterior (exata) tomando valores suficientemente altos de rigidez.

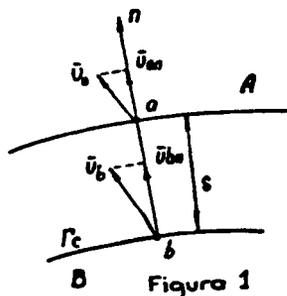


Figura 1

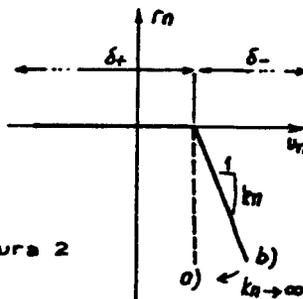


Figura 2

Suponhamos nosso corpo B apoiado sobre uma plataforma A elástica na qual permitiremos uma certa penetração com respeito à configuração inicial, e tomemos um ponto na superfície $\Gamma_c \in B$. Definimos:

$$s - u_n = \delta_+ - \delta_- \quad ; \quad \delta_+ \geq 0 \quad ; \quad \delta_- \geq 0 \quad (6)$$

$$\delta_+ \cdot \delta_- = 0 \quad (7)$$

A última equação coloca em evidência a impossibilidade que os escalares positivos δ_+ e δ_- , parte positiva e negativa de $s - u_n$, sejam simultaneamente diferentes de zero.

O valor δ_- representa a penetração corpo-apoio que permitirá estabelecer uma função para calcular r_n ; em particular:

$$r_n = -k_n \delta_- \leq 0 \quad (9)$$

Observemos que dado u_n , r_n fica determinado (fig.2). Esta característica induz à seguinte observação; se estamos analisando o equilíbrio de um corpo sobre uma fundação, a "penetração" ($\delta_- > 0$) pode interpretar-se como uma certa elasticidade desta última. No caso de se tratar do equilíbrio de dois corpos em contato entre si, um valor positivo de δ_- significa uma penetração efetiva entre ambos dado que definimos u_n mediante (1-4). Isto é teoricamente errado, mas, como notamos anteriormente, um valor suficientemente alto de k_n simula a situação exata com a vantagem de ter uma equação constitutiva tal que dado u_n , fica determinada a reação r_n .

Substituindo para eliminar δ_- reescrevemos o seguinte problema de complementaridade linear:

$$r_n = k_n (s - u_n - \delta_+) \leq 0 \quad ; \quad \delta_+ \geq 0 \quad (10)$$

$$r_n \delta_+ = 0 \quad (11)$$

Se tomamos δ_+ , k_n , s , u_n funções escalares sobre Γ_c e definimos:

$$C^* = \left\{ \delta_+ : \delta_+ \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma_c \right\}$$

o problema local de complementaridade linear pode ser expresso como segue:

$$\delta_+ \in C^* \quad (12)$$

$$r_n = k_n (s - u_n - \delta_+) \quad (13)$$

$$\int_{\Gamma_c} -r_n (\delta_+^* - \delta_+) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \delta_+^* \in C^* \quad (14)$$

Estas equações são as condições de otimalidade do seguinte problema variacional

$$\inf_{\delta_+ \in C^*} j\delta(u_n, \delta_+) \quad (15)$$

$$j\delta(u_n, \delta_+) = \int_{\Gamma_c} \left(\frac{1}{2} k_n \delta_+^2 - k_n (s - u_n) \delta_+ \right) d\Gamma \quad (16)$$

Observemos que $j\delta(u_n, \delta_+)$ é um funcional estritamente convexo e diferenciável na variável δ_+ . Logo, para cada $u_n \in K_u$ existe uma solução δ_+ que minimiza $j\delta(u_n, \delta_+)$ caracterizada pelas equações (12-14) ou localmente

pelas equações (10-11).

O anterior nos permite definir um novo funcional diferenciável dado por:

$$J\delta(u_n) = \inf_{\delta_n \in C^*} J\delta(u_n, \delta_n^*) \quad (17)$$

$$J\delta(u_n) = \begin{cases} -\int_{\Gamma_c} \frac{1}{2} k_n (s - u_n)^2 d\Gamma & \text{se } u \in Kln_u \\ 0 & \text{se } u \in K_u - Kln_u \end{cases} \quad (18)$$

onde

$$Kln_u = \left\{ u : u \in K_u ; u_n \leq s \forall x \in \Gamma_c ; \right\}$$

Fisicamente, $-J\delta$ representa a energia de deformação de uma camada elástica distribuída ao longo de Γ_c que trabalha somente em tração. A partir deste resultado, podemos construir o potencial que permite calcular a energia absorvida por uma camada elástica trabalhando somente à compressão a partir de uma configuração que considera a folga inicial s (fig.4):

$$-r_n \in \partial J_n(u_n) \text{ (estritamente } -r_n = \nabla J_n(u_n) \text{)} \quad (20)$$

$$J_n(u_n) = \inf_{\delta_n \in C^*} \left\{ \int_{\Gamma_c} \left(\frac{1}{2} k_n (s - u_n)^2 + \frac{1}{2} k_n \delta_n^2 - k_n (s - u_n) \delta_n^* \right) d\Gamma \right\} \quad (19)$$

O aspecto principal a se ressaltar é a diferenciabilidade deste potencial, que assegura a determinação unívoca da reação no vínculo para um determinado deslocamento normal u_n .

2.2. Contato com atrito. Equação constitutiva tangencial

Vamos convir que a superfície submetida a esforços de atrito é a própria superfície Γ_c descrita anteriormente. Tomando os pontos a, b pertencentes aos corpos A e B respectivamente, definimos:

$$\bar{u}_{a_t} = (1 - \text{non}) u_a ; \bar{u}_{b_t} = (1 - \text{non}) u_b ; \bar{u}_t = \bar{u}_{b_t} - \bar{u}_{a_t} \quad (21)$$

$$\bar{\tau} = (1 - \text{non}) T_n(21) \quad (22)$$

$$\bar{v}_t = \dot{\bar{u}}_t \quad (23)$$

onde a velocidade v pertence ao espaço V de todas as ações de movimento possíveis.

Consideremos o caso de atrito seco, onde o valor limite da reação tangencial é função da reação r_n e, conseqüentemente, existe uma relação $r_n \leq \tau$ tal que quando esta é satisfeita, o corpo está em condições de deslizar. Podemos entender esta relação como o limite de uma região $g(\bar{\tau}, r_n) \leq 0$ onde cada componente $g_j(\bar{\tau}, r_n)$, $j = 1..n$ é uma função convexa diferenciável que chamaremos "modo de deslizamento" (a desigualdade é entendida componente a componente).

Suponhamos $r_n \leq 0$ fixo e conhecido no ponto b . A função de deslizamento depende agora unicamente da variável $\bar{\tau}$.

$$g(\bar{\tau}) = \begin{bmatrix} g_1(\bar{\tau}) \\ g_n(\bar{\tau}) \end{bmatrix} \quad g_j(\bar{\tau}) \leq 0 ; j = 1..n$$

A interseção das regiões viáveis de cada restrição estabelece a zona admissível para $\bar{\tau}$.

deslizamento destas ligações.

Substituindo e reagrupando, obtemos a equação

$$\dot{\tau} = -k_t(v_t + g_t \cdot \dot{\beta}) \quad (32)$$

na qual o vetor $\dot{\beta}$ não é conhecido. Para estabelecê-lo nos valem os do conjunto de restrições (24-27) escritas para o caso plano:

$$g \leq 0 \quad ; \quad \dot{\beta} \geq 0 \quad ; \quad g \cdot \dot{\beta} = 0$$

$$\text{Se } g_j(\bar{\tau}) = 0 \rightarrow \dot{g}_j \leq 0 \quad ; \quad \dot{g}_j \cdot \dot{\beta}_j = 0$$

Estendendo estas condições a todo o contorno Γ_c utilizando uma formulação variacional obtemos:

$$B^* = \left\{ \dot{\beta} : \dot{\beta} \geq 0 \text{ em } \Gamma_c \right\} \quad ; \quad B_g = \left\{ \dot{\beta} : \dot{\beta} \in B^* ; \dot{\beta} \cdot g = 0 \text{ em } \Gamma_c \right\} \quad (33)$$

$$\dot{\beta} \in B_g \quad (34)$$

$$\int_{\Gamma_c} -\dot{g} \cdot (\dot{\beta}^* - \dot{\beta}) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \dot{\beta}^* \in B_g \quad (35)$$

Substituindo (30) e (32) em (35) escrevemos:

$$\int_{\Gamma_c} \left(k_t v_t g_t + k_t (g_t \otimes g_t) \dot{\beta} - \mu r_n e \right) \cdot (\dot{\beta}^* - \dot{\beta}) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \dot{\beta}^* \in B_g \quad (36)$$

esta equação é equivalente a achar $\dot{\beta} \in B_g$ tal que:

$$\inf_{\dot{\beta} \in B_g} \left\{ \int_{\Gamma_c} \left(\frac{1}{2} k_t (g_t \otimes g_t) \dot{\beta} \cdot \dot{\beta} + (k_t v_t g_t - \mu r_n e) \cdot \dot{\beta} \right) \right\} \quad (37)$$

A restrição imposta para $\dot{\beta}$ de pertencer a B_g pode ser retirada incluindo um termo de penalização no funcional, e assim trabalhar em um campo mais amplo.

$$\inf_{\dot{\beta} \in B^*} \left\{ \int_{\Gamma_c} \left(\frac{1}{2} k_t (g_t \otimes g_t) \dot{\beta} \cdot \dot{\beta} + k_t v_t g_t - \mu r_n e \right) \cdot \dot{\beta} \right\} d\Gamma + I(\dot{\beta}) \quad (38)$$

sendo $I(\dot{\beta})$ a indicatriz do convexo B_g : $I(\dot{\beta}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \dot{\beta} \in B_g \\ +\infty & \text{se } \dot{\beta} \in B^* - B_g \end{cases}$

Aproximaremos esta indicatriz mediante a função:

$$I_c(\dot{\beta}) = -\frac{1}{c} \int_{\Gamma_c} g \cdot \dot{\beta} d\Gamma \quad (39)$$

que no caso limite de $c \rightarrow 0^+$ fornece a propria função indicatriz. Desta forma $\dot{\beta}$ pode ser determinada resolvendo

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} \inf_{\dot{\beta} \in B^*} \left\{ \int_{\Gamma_c} \left(\frac{1}{2} k_t (g_t \otimes g_t) \dot{\beta} \cdot \dot{\beta} + (k_t v_t g_t - \mu r_n e - \frac{1}{c} g) \cdot \dot{\beta} \right) d\Gamma \right\} \quad (40)$$

Neste ponto faremos uma transformação no tratamento das equações escritas em função de taxas, para trabalhar com incrementos finitos no tempo. Utilizando a primeira aproximação de Euler:

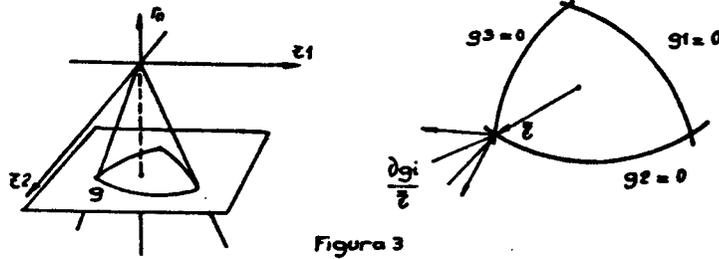


Figura 3

Quando um modo $g_j(\bar{\tau})$ toma o valor zero, se diz que o modo está ativo; neste caso, o deslizamento poderá efetuar-se com uma velocidade \bar{v}_t^s de direção dada pela derivada de g com respeito à variável $\bar{\tau}$ (direção da normal à curva no ponto). Se estamos em um vértice, ou seja, temos mais de um modo ativo simultaneamente, a velocidade relativa estará situada dentro do cone formado pelas normais aos modos ativos (fig.3)

$$g(\bar{\tau}) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\beta} \geq 0 \quad (24)$$

$$\bar{v}_t^s = - g_{\bar{\tau}}(\bar{\tau}) \beta \quad ; \quad g_{\bar{\tau}}(\bar{\tau}) = \frac{\partial g(\bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} \quad (25)$$

$$\dot{\beta} \cdot g = 0 \quad (26)$$

O tensor $g_{\bar{\tau}}(\bar{\tau})$ aplicado ao vetor $\dot{\beta}$ define \bar{v}_t^s através da combinação linear dos modos ativos. Quando um modo $g_j(\bar{\tau})$ está saturado (ativo), pode continuar neste estado ou passar a inatividade ($g_j(\bar{\tau}) < 0$); logo:

$$\text{Se } g_j(\bar{\tau}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{g}_j \leq 0 \quad ; \quad \dot{g}_j \dot{\beta}_j = 0 \quad (27)$$

Deve-se notar que o fato de se ter trabalhado com taxas de deslocamento e na expressão (27) com taxas de tensão, é coerente com o fenômeno de atrito pois este é dependente do processo de carga-deformação [3][4].

Por simplicidade restringiremos o problema a duas dimensões ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$), adotando para o cálculo das tensões tangenciais a lei de Coulomb. Neste caso, para o sistema local de coordenadas n, t , temos que:

$$\dot{\bar{\tau}} = \dot{\tau} t \quad ; \quad \dot{\bar{r}}_n = \dot{r}_n n \quad ; \quad \bar{v}_t^s = v_t t \quad (28)$$

$$\dot{\beta} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{Bmatrix} \quad ; \quad g(\bar{\tau}) = g(\tau) = \begin{Bmatrix} \tau + \mu r_n \\ -\tau + \mu r_n \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$g(\bar{\tau}) = \tau g_{\tau} + \mu r_n e \quad ; \quad g_{\tau} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad e = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Sob este enfoque, o campo de velocidades tangenciais pode ser decomposto como segue:

$$v_t = v_t^o + v_t^s \quad ; \quad v_t^o = - \frac{1}{k_t} \dot{\tau} \quad ; \quad v_t^s = - g_{\tau} \cdot \dot{\beta} \quad (31)$$

A primeira parcela, as vezes chamada velocidade de aderência, é atribuída à deformação elástica das asperezas dos corpos em contato [5], sendo proporcional a taxa de força tangencial atuando sobre a superfície e inversamente proporcional a um fator k_t que chamaremos rigidez tangencial equivalente. A segunda parte se associa a uma ruptura e consequente

$$v_t = \frac{\Delta u_t}{\Delta t} \quad ; \quad \dot{\beta} = \frac{\Delta \beta}{\Delta t} \quad ; \quad \dot{r}_n = \frac{\Delta r_n}{\Delta t}$$

Substituímos estas aproximações na expressão (40) obtendo:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{\Delta \beta \in B^*} \left\{ \int_{\Gamma_c} \left(\frac{1}{2} k_t (z_t \otimes z_t) \Delta \beta \cdot \Delta \beta + \right. \right. \\ \left. \left. + (k_t \Delta u_t z_t - \mu \Delta r_n e - \frac{\Delta t}{\epsilon} g) \cdot \Delta \beta \right) d\Gamma \right\}$$

Tomando $\epsilon = \Delta t$, temos que:

$$\inf_{\Delta \beta \in B^*} \left\{ \int_{\Gamma_c} \left(\frac{1}{2} k_t (z_t \otimes z_t) \Delta \beta \cdot \Delta \beta + (k_t \Delta u_t z_t - \mu \Delta r_n e - g) \cdot \Delta \beta \right) d\Gamma \right\} = \\ = \inf_{\Delta \beta \in B^*} \left\{ J\beta(\Delta u_t, \beta) \right\} = J\beta(\Delta u_t) \quad (41)$$

$$J\beta(\Delta u_t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} k_t \left(\Delta u_t + \frac{(\mu \Delta r_n + g_2)}{k_t} \right)^2 & \text{se } \Delta u_t \geq -\frac{(\mu \Delta r_n + g_2)}{k_t} \\ 0 & \text{se } \frac{(\mu \Delta r_n + g_1)}{k_t} \leq \Delta u_t \leq -\frac{(\mu \Delta r_n + g_2)}{k_t} \\ -\frac{1}{2} k_t \left(-\Delta u_t + \frac{(\mu \Delta r_n + g_1)}{k_t} \right)^2 & \text{se } \Delta u_t \leq \frac{(\mu \Delta r_n + g_1)}{k_t} \end{cases}$$

Novamente deve-se notar que $J\beta(\Delta u_t)$ é um funcional convexo, uma vez diferenciável. A condição de infimo de (41) é dada pela equação variacional

$$\int_{\Gamma_c} \left(k_t (\Delta u_t + z_t \cdot \Delta \beta) z_t - \mu \Delta r_n e - g \right) \cdot (\Delta \beta^\circ - \Delta \beta) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \Delta \beta^\circ \in B^* \quad (42)$$

Da mesma forma que na equação constitutiva da reação normal, podemos escrever uma função potencial $J_t(\Delta u_t)$ (fig.4) tal que:

$$- \tau \in \partial J_t(\Delta u_t) \\ J_t(\Delta u_t) = \inf_{\Delta \beta \in B^*} \left\{ \int_{\Gamma_c} \frac{1}{2} k_t (\Delta u_t)^2 d\Gamma + \left(\frac{1}{2} k_t (z_t \otimes z_t) \Delta \beta \cdot \Delta \beta + \right. \right. \\ \left. \left. + (k_t \Delta u_t z_t - \mu \Delta r_n e - g) \cdot \Delta \beta \right) d\Gamma \right\} \quad (43)$$

Voltando à equação variacional (42), e considerando que:

$$\Delta \tau = - k_t (\Delta u_t + z_t \cdot \Delta \beta)$$

$$g(\tau + \Delta \tau, r_n + \Delta r_n) = g + \Delta \tau z_t + \mu \Delta r_n e$$

escrevemos a relação constitutiva para os esforços tangenciais em forma variacional; dado g , Δr_n e Δu_t , calcular $\Delta \mathcal{E}$, $\Delta \tau$, tal que:

$$\Delta \beta \in B^* \quad \Delta \tau = - k_t (\Delta u_t + z_t \cdot \Delta \beta) \quad (44)$$

$$\int_{\Gamma_c} - g(\tau + \Delta \tau, r_n + \Delta r_n) \cdot (\Delta \beta^\circ - \Delta \beta) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \Delta \beta^\circ \in B^* \quad (45)$$

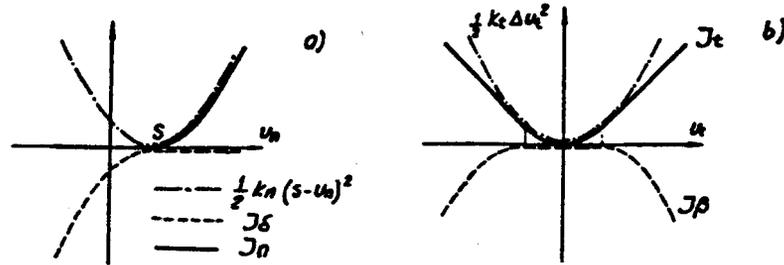


Figura 4

3. EQUILÍBRIO DO SISTEMA

Nos problemas de contato sem atrito (problema de Signorini) e problema de atrito com forças normais prescritas (Duvaut-Lions), os potenciais obtidos $J_n(\Delta u_n)$ e $J_t(\Delta u_t)$ permitem escrever o equilíbrio como um problema de mínimo (formulação cinemática):

$$\Pi(\Delta u) = \inf_{\Delta u} \Pi(\Delta u^{\circ})$$

sendo

$$\Pi(\Delta u^{\circ}) = J(D\Delta u) - L(\Delta u) - J_n(\Delta u)$$

ou equivalentemente

$$\Pi(\Delta u^{\circ}) = J(D\Delta u) - L(\Delta u) - J_t(\Delta u)$$

onde $J(D\Delta u)$ e $L(\Delta u)$ são os potenciais que determinam trabalho das forças internas (em B) e forças externas (em B e Γ_r) respectivamente. $J_n(\Delta u_n)$ e $J_t(\Delta u_t)$ representam o trabalho das forças normais e tangenciais de contato, não lineares com respeito a Δu . Nestes casos, devido às características de convexidade destes potenciais é possível demonstrar (sob certas condições) unicidade e existência de solução.

No problema de contato com atrito a força normal, parâmetro considerado fixo e conhecido na formulação da relação constitutiva tangencial, varia com o deslocamento. Não obstante, a velocidade tangencial continua sendo função só da derivada parcial de g com respeito às tensões tangenciais, pois consideramos uma lei de deslizamento não associativa. Assim, as expressões formuladas para a restrição sobre as tensões tangenciais continuam sendo válidas para todo $r_n(x) \leq 0$, embora o equilíbrio não possa agora expressar-se como um problema de mínimo e sim como um sistema de equações não lineares.

Resumindo: o problema de equilíbrio levando em conta condições de contorno de contato pode ser escrito através das seguintes equações:

$$\Delta u \in K_u$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Dc(\Delta u) \cdot c(v - \Delta u) \, d\Omega &= \int_{\Omega} \Delta b \cdot (v - \Delta u) \, d\Omega + \int_{\Gamma_f} \Delta f \cdot (v - \Delta u) \, d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_c} \Delta r_n (v_n - \Delta u_n) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \Delta \tau (v_t - \Delta u_t) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (46)$$

onde

$$\Delta r_n = -k_n (\Delta u_n + \Delta \delta_n) \quad ; \quad \Delta \tau = -k_t (\Delta u_t + g_t \cdot \Delta \beta) \quad (47)$$

$$\int_{\Gamma_c} r_n^{t+\Delta t} (\delta_n^0 - \delta_n^{t+\Delta t}) \leq 0 \quad \forall \delta_n^0 \in C^* \quad (48)$$

$$\int_{\Gamma_c} -g(\tau^t + \Delta \tau \cdot r_n^t + \Delta r_n) \cdot (\Delta \beta^0 - \Delta \beta) d\Gamma \geq 0 \quad \forall \Delta \beta^0 \in B^* \quad (49)$$

$$r_n^{t+\Delta t} = r_n^t + \Delta r_n \quad ; \quad \delta_n^{t+\Delta t} = \delta_n^t + \Delta \delta_n \quad (50)$$

A expressão (46) consiste na equação de equilíbrio (princípio das potências virtuais discretizado no tempo) onde D é o tensor de quarta ordem [6], e o tensor de deformação de Green, b e f são as forças de corpo e forças de superfície respectivamente. Os dois últimos termos da equação (46) correspondem ao trabalho das reações de contato, dependentes do valor de u através do problema de complementaridade linear dado pelas equações (47-50).

4. DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Utilizaremos o Método de Elementos Finitos na procura da solução numérica, e a introdução das características inerentes ao problema em questão será feita mediante um elemento de contato.

Lembremos que tínhamos associado cada par de pontos em possível contato a uma única normal n; esta propriedade permitirá a construção do elemento mediante a definição geométrica do contorno Γ_c (pertencente ao corpo B) e da folga inicial ($s \geq 0$), sendo isto suficiente para "gerar" artificialmente a superfície de contato do corpo A.

O elemento então estará formado por "P" pares de nós associados aos parâmetros nas funções de interpolação seguintes :

$$x_{\Gamma_c} = \sum_{l=1}^P \chi^l(\xi) x^l \quad ; \quad y_{\Gamma_c} = \sum_{l=1}^P \chi^l(\xi) y^l \quad ; \quad s = \sum_{l=1}^P \bar{\chi}^l(\xi) s^l \quad (51)$$

onde ξ é uma coordenada curvilínea sobre Γ_c (fig.5) e χ são as funções de interpolação (por definição de s, temos que $\bar{\chi}^l \geq 0$). O contorno pertencente a A, oposto a Γ_c , está definido por:

$$x_{\Gamma_A} = x_{\Gamma_c} + s n_x \quad ; \quad y_{\Gamma_A} = y_{\Gamma_c} + s n_y \quad (52)$$

onde n_x, n_y são as componentes do vetor normal ao contorno Γ_c .

No caso da variável u, o tipo de interpolação elementar é a tradicionalmente usada em elementos finitos.

$$u_b = \sum_{l=1}^P \sum_{i=1}^{N_{gl}} \phi_i^l u_b^l \quad ; \quad u_a = \sum_{l=1}^P \sum_{i=1}^{N_{gl}} \phi_i^l u_a^l \quad (53)$$

que, parametrizadas sobre o contorno de contato e utilizando uma matriz de projeção, podem ser escritas:

¹ A folga inicial é uma quantidade independente da configuração real dos corpos. Pode-se tomar uma folga diferente de zero, mesmo que os contornos de contato ocupem o mesmo lugar físico.

$$u_n(\xi) = N \cdot R(\xi) U \quad ; \quad u_t(\xi) = N \cdot R^*(\xi) U \quad (54)$$

Desta forma, podemos criar uma família de elementos de contato que diferam no número de pares de nós e no tipo de interpoladores utilizados. Nestes elementos, dado o deslocamento u , é conhecido o valor da distribuição de forças de reação mediante as equações (47-50). Para isto, procede-se à integração numérica, resolvendo o problema de complementaridade linear nos pontos de integração. Assim, os dois últimos somandos da equação de equilíbrio são calculados elemento a elemento.

O elemento mais simples desta família é o elemento unidimensional ou "mola de contato". Formado unicamente por dois nós e seu correspondente referencial local (t,n) , traz grandes vantagens no que diz respeito à implementação e versatilidade na sua aplicação.

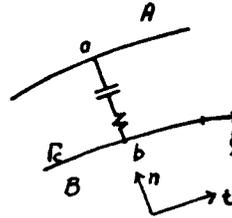


Figura 5

Sustituindo (47) em (46) obtemos:

$$\int_{\Omega} Dc(\Delta u) \cdot c(v) \, d\Omega + \int_{\Gamma_c} k_n \Delta u_n v_n \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} k_t \Delta u_t v_t \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} k_n \Delta \delta_n v_n \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} k_t (g_r \cdot \Delta \beta) v_t \, d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta b \cdot v \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} \Delta f \cdot v \, d\Gamma = 0 \quad \forall v \in Var_u \quad (55)$$

$$Var_u = \left\{ u : u \in U ; u = 0 \quad \forall x \in \Gamma_u \right\}$$

Utilizando as funções de interpolação e integrando, temos que o equilíbrio do problema de contato com atrito em forma discreta se escreve agora:

Determinar $U^{t+\Delta t} = U + \Delta U$, $U^{t-\Delta t} = \bar{U}$ em Γ_u , tal que:

$$\Psi(\Delta U) = \left(K + K_n + K_t \right) \Delta U + F\delta + F\beta - F = 0 \quad (56)$$

Os valores K e F são a matriz de rigidez e o vetor de carga tradicional de uma análise linear elástica e $(K_n \Delta U + F\delta)$ e $(K_t \Delta U + F\beta)$ são as forças de contato normais e tangenciais respectivamente. As forças $F\delta$ e $F\beta$ correspondem à parte não linear das forças de contato (quarta e quinta parcela da equação (55)). Quando se utiliza o elemento de contato unidimensional, o cálculo local da complementaridade linear determina diretamente a força de contato no ponto. Assim, a forma que estas relações de complementaridade adotam para cada elemento é:

$$\left\{ F\delta^* - F\delta^* - [K_u \delta]^T U^{t+\Delta t} \right\} \leq 0$$

$$\left\{ F\delta^* - F\delta^* - [K_u \delta]^T U^{t+\Delta t} \right\} \cdot D^{t-\Delta t} = 0$$

$$\left\{ [c_g^*] + [K_u \beta_t]^T \Delta U + [K\beta^*] \Delta B + [K\beta\delta^*] \Delta D + [K_u \beta_n]^T \Delta U \right\} \geq 0$$

$$\left\{ \dots \right\} \cdot \Delta B = 0 \quad (57-59)$$

Abrindo estas expressões ($s\alpha = \text{sen } \alpha$; $c\alpha = \text{cos } \alpha$):

$$K_t = k_t \begin{bmatrix} c\alpha^2 & s\alpha & c\alpha & -c\alpha^2 & -s\alpha & c\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & s\alpha^2 & -s\alpha & c\alpha & -s\alpha^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & c\alpha^2 & s\alpha & c\alpha \\ \text{sim} & \dots & \dots & \dots & s\alpha^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & s\alpha^2 \end{bmatrix} ; \quad Ku\beta_t = k_t \begin{bmatrix} c\alpha & -c\alpha \\ s\alpha & -s\alpha \\ -c\alpha & c\alpha \\ -s\alpha & s\alpha \end{bmatrix}$$

$$K_n = k_n \begin{bmatrix} s\alpha^2 & -s\alpha & c\alpha & -s\alpha^2 & s\alpha & c\alpha \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & c\alpha^2 & s\alpha & c\alpha & -c\alpha^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & s\alpha^2 & -s\alpha & c\alpha \\ \text{sim} & \dots & \dots & \dots & c\alpha^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c\alpha^2 \end{bmatrix} ; \quad Ku\delta = k_n \begin{bmatrix} -s\alpha \\ c\alpha \\ s\alpha \\ -c\alpha \end{bmatrix}$$

$$K\delta^e = k_n \quad ; \quad Fs^e = -k_n s \quad ; \quad Ku\beta_n^T = \mu k_n \begin{bmatrix} -s\alpha & c\alpha & s\alpha & -c\alpha \\ -s\alpha & c\alpha & s\alpha & -c\alpha \end{bmatrix}$$

$$K\beta\delta^e = \mu k_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad K\beta^e = k_t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_G^e = \left\{ k_n \begin{bmatrix} c\alpha & s\alpha & -c\alpha & -s\alpha \\ -c\alpha & -s\alpha & c\alpha & s\alpha \end{bmatrix} U + k_t \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} B + \right. \\ \left. + \mu k_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (D - S) + \mu k_n \begin{bmatrix} -s\alpha & c\alpha & s\alpha & -c\alpha \\ -s\alpha & c\alpha & s\alpha & -c\alpha \end{bmatrix} U \right\}$$

onde α é o ângulo de giro do sistema local (t,n) com respeito ao global (x,y).

5. RESOLUÇÃO NUMÉRICA

O conjunto de equações anteriores ($\psi = 0$) é um sistema não linear em Δu ; as variáveis ΔD e ΔB dependem não linearmente do incremento de deslocamentos através da solução do problema de complementaridade (57-59), que, pela característica de ser não acoplado, é resolvido a nível elementar. Para a solução deste sistema, foi escolhido o método Quasi-Newton, em especial a atualização BFGS. Este método define a nova direção de procura ρ mediante a aplicação da matriz H ao valor atual do vetor ψ . Esta matriz H é inicializada com a inversa da matriz de rigidez ($K + \alpha K_n + \phi K_t$) e é atualizada pela técnica BFGS, [7][8]. Os valores α e ϕ são escalares entre 0 e 1, sendo que nos resultados numéricos aqui apresentados se adotou $\alpha=1$, $\phi=0$.

O algoritmo consta das seguintes partes:

PASSO 1. Inicialização.

$$k = 0, \quad \Delta U = \Delta U^0, \quad H = H^0 \\ \psi = \psi(\Delta U) \\ \text{se } |\psi| \leq \epsilon \text{ pare} \\ \rho = -H^0 \psi$$

PASSO 2. Cálculo da nova aproximação $\overline{\Delta U}$ mediante a procura linear: determinar s tal que

$$|\rho \cdot \Psi(\Delta U + s\rho)| \leq c_L |\rho \cdot \Psi(\Delta U)|$$

$$d = s \cdot \rho$$

$$\overline{\Delta U} = \Delta U + d$$

$$\overline{\Psi} = \Psi(\overline{\Delta U})$$

$$\text{se } |\overline{\Psi}| \leq c \text{ pare}$$

PASSO 3. Avaliação dos vetores v e w relacionados ao BFGS.

$$\gamma \cdot d = (\overline{\Psi} - \Psi) \cdot d$$

$$w = \frac{d}{\gamma \cdot d}$$

$$v = \left(1 + \sqrt{-s(\gamma \cdot d)/(\Psi \cdot d)} \right) \Psi - \overline{\Psi}$$

Salvar em memória secundária: v , w como v^k e w^k .

PASSO 4. Cálculo da nova direção de procura $\overline{\rho} = -H \overline{\Psi}$ onde

$$H = \left(\prod_{j=0, k} (1 + w^j \cdot v^j) \right) H^0 \left(\prod_{j=0, k} (1 + v^j \cdot w^j) \right)$$

$$\overline{\rho} = \overline{\Psi}$$

Para $j = k, (k-1), \dots, 1, 0$ faça:

(recupere v^j, w^j como v, w

$$\overline{\rho} = \overline{\rho} + (w \cdot \overline{\rho}) v$$

$$\overline{\rho} = -H^0 \overline{\Psi}$$

Para $j = 0, 1, \dots, (k-1), k$ faça

(recupere v^j, w^j como v, w

$$\overline{\rho} = \overline{\rho} + (v \cdot \overline{\rho}) w$$

PASSO 5. Atualização de variáveis

$$k = k + 1, \Delta U = \overline{\Delta U}, \rho = \overline{\rho}, \Psi = \overline{\Psi}$$

voltar a PASSO 2.

Quando se escreve $\Psi = \Psi(\Delta U)$ na sequencia de passos descrita, pretende-se denotar o cálculo de (56). Como já foi dito, este cálculo envolve uma parte linear (elementos do domínio e forças externas) e uma parte não linear associada aos elementos de contato (calculada elemento a elemento).

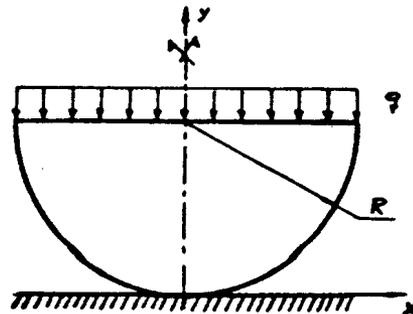
6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

6.1 Semicilindro sobre superfície rígida

Trata-se de um semicilindro circular, longo, apoiado sobre uma superfície rígida horizontal, suportando um carregamento uniformemente distribuído sobre a face superior. Considera-se um material isotrópico homogêneo, sendo a hipótese de trabalho um estado plano de deformações.

Utilizou-se uma malha com 214 elementos lineares de tres nós e 20 elementos de contato.

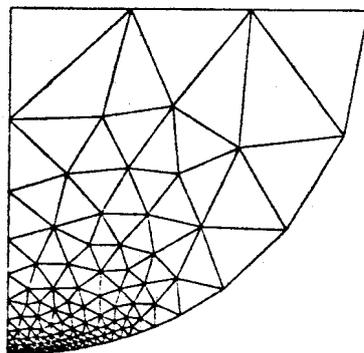
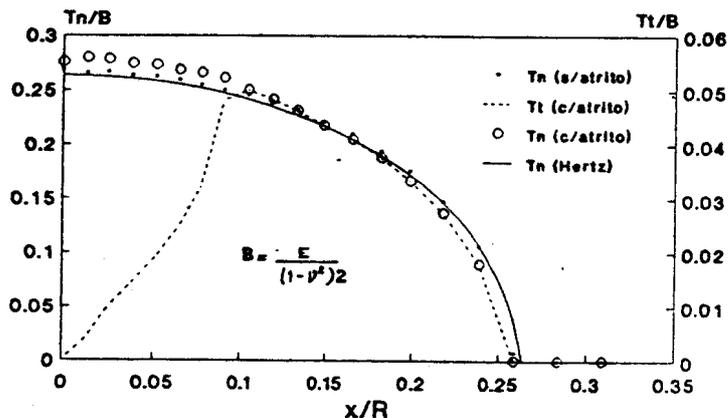
Foram obtidos valores de tensão normal para a condição de contato sem atrito e valores de tensão normal e



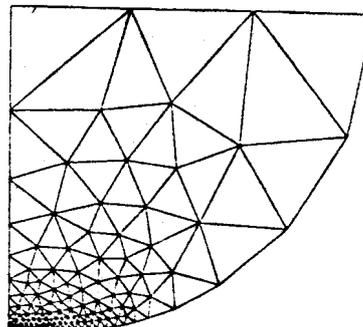
tangencial para a condição de contato com atrito ($\mu = 0.2$). Estes resultados são comparados com a solução analítica de Hertz [22] no seguinte diagrama.

$E = 1000$; $R = 8$; $\nu = 0.3$; $q = 30$

Semi-cilindro Elastico (est.pl.def.) Condição de contorno: Contato



Malha original



Malha deformada

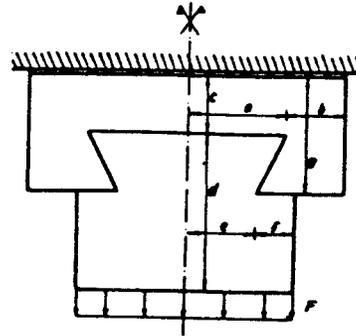
6.2. Encaixe macho-fêmea

Temos, neste exemplo, o problema gerado pelo encaixe de duas placas, macho e fêmea, mostradas na figura. Como se observa, o corpo fêmea tem os deslocamentos verticais irredidos sobre a superfície superior, enquanto o corpo macho está submetido, na face inferior, a um carregamento uniformemente distribuído F. As características do material e a geometria são as seguintes: $E = 240 \text{ daN/mm}^2$, $\nu = 0.38$, $\mu = 0.2$, Espessura = 6.4 mm. $F = 0.02656 \text{ daN/mm}^2$ (corresponde a uma força tot. = 17 N).

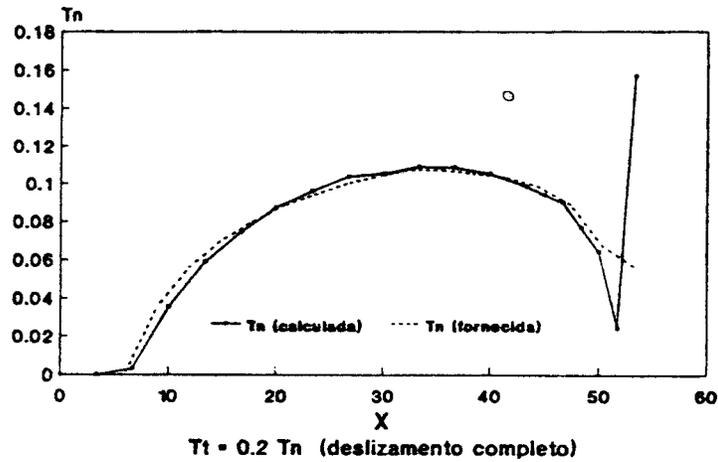
Em virtude da pouca espessura da estrutura, trabalha-se com a hipótese de estado plano de tensões. O problema foi modelado com uma malha de 623 elementos triangulares lineares e 21 elementos de contato situados na face

oblíqua de ambos os corpos. Os deslocamentos e tensões nodais estão apresentados na tabela a seguir. O exemplo foi tomado de [9] onde as constantes do material são as do plexiglass, utilizado para ensaios fotoelásticos. Os resultados numéricos fornecidos e os calculados neste trabalho são comparados no gráfico.

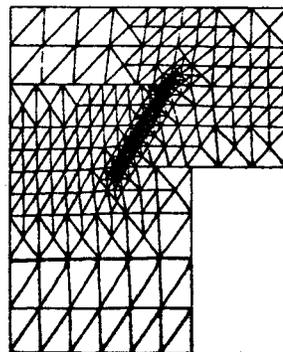
a = 87 mm e = 60 mm
b = 65 mm f = 40 mm
c = 43 mm g = 89 mm
d = 148 mm



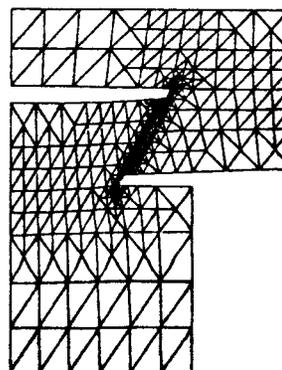
Encaixe macho-femea



Malha original



Malha deformada



7. CONCLUSÕES

Foi apresentada neste trabalho uma formulação para o problema de contato com atrito, caracterizada pela diferenciabilidade dos funcionais que modelam o mesmo. Este é o motivo pelo qual se fala de regularização do problema, possibilitando um tratamento não convencional das restrições.

A solução numérica é encontrada resolvendo-se um sistema não linear de equações, utilizando para isto o método de programação não-linear Quasi-Newton.

Observa-se o importante fato que, neste esquema, pode-se calcular a resposta de cada elemento em forma independente, pois o problema de complementaridade linear está desacoplado. A primeira vantagem que esta forma de trabalhar acarreta refere-se à independência entre o método utilizado para resolver o problema não linear e o tipo de problema propriamente dito; não há, em princípio, diferença alguma entre resolver um problema de contato com atrito e um problema elastoplástico, desde que se conheçam os esforços induzidos para um determinado campo de deslocamentos.

Outra vantagem do desacoplamento do problema de complementaridade linear é a redução da memória direta necessária para a solução do mesmo. Note-se que esta característica de desacoplamento seria de grande utilidade no eventual caso de se dispor de um processador em paralelo.

O elemento de contato implementado tem-se mostrado suficientemente eficiente para igualar com boa aproximação a outras soluções numéricas.

É oportuno ressaltar que do ponto de vista de um usuário de "software" de análise estrutural, o fato de se dispor de um elemento de contato resulta numa simplificação na hora de modelar o problema.

No que se refere ao método de resolução, o procedimento utilizado demonstrou ser efetivo, sendo seu principal inconveniente o mal condicionamento gerado quando valores muito altos de rigidez do elemento em questão são adotados.

Deve-se observar que cada iteração do Quasi-Newton envolve, como cálculo mais complicado, o produto entre duas matrizes, isto é, o custo computacional é relativamente baixo.

A inclusão do atrito produz algumas perturbações na convergência do método, o que induz a supor que uma alternativa de trabalho seria iterar entre dois subproblemas de convergência assegurada como são os de Signorini e Duvaut-Lions, pretendendo-se obter a solução global ao final do processo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] FEIJÓO, R.A., BARBOSA, H.J.C., ZOUAIN N.P., "Numerical formulation for contact problems with friction", *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, Special issue on "Numerical Methods in mechanics of contact involving friction", Vol.7, Nro 1, pp.129-144, 1988.
- [2] CÉA, J., *Optimisation. théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, 1981.
- [3] FEIJÓO, R.A., ZOUAIN N.P., "Variational Formulations for rates and increments in plasticity", *International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, España, 1987.
- [4] FEIJÓO, R.A., ZOUAIN N.P., *II Curso de Mec. Teórica e Ap. Módulo II: Princípios variacionais em mecânica*, LNCC/CNPq, 1982.
- [5] CURNIER, A., "A theory of friction", *Int. J. Solids Structures*, Vol 20, Nro 7, pp 637-647, 1984.
- [6] GREEN, A.E., ZERNA, W., *Theoretical elasticity*, Oxford University Press, 1960.
- [7] LUENBERGER, D.G., *Linear and Nonlinear Programming*, Stanford University, USA, 1973.
- [8] DENNIS, J.E.Jr., MORÉ J.J., "Quasi-Newton methods, motivation and theory", *Slam Review*, Vol.19, Nro.1, pp.46-88, 1977.
- [9] RAOUS, M., CHABRAND, P., LEBON, F., "Numerical methods for frictional contact", *Journal de Mécanique théorique et appliquée*.
- [10] GURTIN, M.E., *An introduction to continuum mechanics*, Academic Press,

- University of Southern California, USA, 1981.
- [11] ODEN, J.T., *Applied functional analysis*, The University of Texas, N.Jersey, USA,(1979).
 - [12] PANAGIOTOPOULOS, P.D., *Inequality problems in mechanics and applications*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, (1985).
 - [13] MICHALOWSKI, R., MROZ, Z., "Associated and non-associated sliding rules in contact friction", *Archives of Mechanics*, Vol 30, Nro 3, pp 259-276, 1978.
 - [14] PATER, A.D. de., KALKER, J.J., *The mechanics of the contact between deformable bodies*, Delft University Press, 1975.
 - [15] RAOUS, M., "Contacts unilatéraux avec frottement en viscoélasticité", (Ed.G. del Piero, F.Maceri) *CISM Courses and Lectures*, Nro 288, Springer-Verlag Wien-New York, 1982.
 - [16] BARBOSA, H.J.C., *Algoritmos Numéricos para Problemas de Contato em Elasticidade*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Rio de Janeiro, COPPE, 1986.
 - [17] PANAGIOTOPOULOS, P.D., LAZARDIS, L.L., "Boundary minimum principles for the unilateral contact problems" *Int.J.Solids Structures*, Vol.23, Nro.11 pp. 1465-1484, 1987.
 - [18] FEIJÓO, R.A., "Formulación y resolución vía programación Matemática del problema de contacto elastoplástico con fricción", *IX Congreso Brasileiro de E.M.*, Vol.1, pp.15, 1987.
 - [19] ROMANO, G., SACCO, E., "Convex problems in structural mechanics" (Ed.G. del Piero, F.Maceri) *CISM Courses and Lectures*, Nro 304, pp.279-297, Springer-Verlag-Wien-New York, 1982.
 - [20] FREDRIKSSON, B., "Finite element Solution of Surface nonlinearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems", *Computers and Structures*, Vol.6, pp 281- 290, 1986.
 - [21] TIMOSHENKO, S., GOODIER, J.N., *Teoría de la elasticidad*, Ed.Urmo, Bilbao, España, 1951.
 - [22] GOUVEA, J.P.de, *Um sistema para desenvolvimento de programas baseado no método dos elementos finitos*, Tese de Doutorado, PUC, Rio de Janeiro, 1986.
 - [23] FANCELLO, E.A., *Formulação variacional do problema de contato com atrito; resolução via regularização*, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

