

LEYES DE CONSERVACION E INTEGRALES INDEPENDIENTES DEL CAMINO EN MECANICA DE LA FRACTURA

Edgardo Taroco
Lab. Nac. Computação Científica, LNCC/CNPq
Rua Lauro Müller 455, 22290, RJ, BRASIL

RESUMEN

Las ventajas de emplear principios variacionales invariantes en mecánica de los sólidos para obtener el tensor momento energía e integrales independientes del camino es ejemplificado para el caso de estado plano. En presencia de defectos, la fuerza de Irwing en el vértice de una fisura asociada al decrecimiento de energía potencial, está dada por la integral de línea J de gran interés en mecánica de la fractura. Esta formulación es extendida en forma sistemática a la teoría de placas y cáscaras, y son deducidos los correspondientes tensores momento energía e integrales independientes del camino J para placas y cáscaras con fisuras.

ABSTRACT

The application to solid mechanics of the invariant variational principles to obtain the energy momentum tensor and path independent integrals is advocated and illustrated by the example of plane state. In the presence of defects, the Irwing's crack extension force associated to the energy release rate equals the J path independent integral, which proved to be of great interest in fracture mechanics. In a systematic way this formulation is extended to plates and shells theory and the appropriate energy momentum tensor and the J path independent integral for cracked plates and shells is derived.

INTRODUCCIÓN

La integral independiente del camino J introducida por Rice en 1968 [1] para analizar propagación de fisuras de láminas planas sometidas a cargas en su contorno contribuyó significativamente al desarrollo de la mecánica de la fractura. Esta integral permitió evaluar la fuerza asociada a la propagación de una fisura mediante el cálculo de una integral de línea sobre un camino que rodea el vértice de la mencionada fisura.

El gran atractivo de aplicación de la integral J consiste en que el conocimiento del estado tensional del cuerpo con una fisura de longitud dada, es suficiente para la determinación del decrecimiento de energía potencial, sin necesidad de realizar un segundo análisis de tensiones con una fisura de longitud mayor que la inicial. Si tenemos en cuenta además que la integral J es independiente del camino podemos efectuar el cálculo sobre caminos alejados del vértice de la fisura donde los campos que intervienen pueden ser determinados con mayor precisión tanto en análisis teóricos como experimentales.

Posteriormente trabajos de Knowles y Sterberg [2], Chen y Shield [3] ponen en evidencia la relación existente entre la integral J y el concepto de fuerza en singularidades asociadas a defectos, introducida por Eshelby [4] en el análisis de cuerpos elásticos. La versión tridimensional de la integral J puede ser encontrada en trabajos del mencionado autor [5, 6], el cual establece también que en ausencia de defectos las integrales en contornos cerrados se anulan conduciendo a leyes de conservación. En los últimos años las integrales independientes del camino y las leyes de conservación han despertado gran interés por parte de investigadores tanto en aspectos teóricos básicos [7, 8] como en múltiples aplicaciones en diversos campos de la física y en especial en mecánica [9, 10, 11].

Hoy día el trabajo pionero de Rice puede ser visto dentro de un contexto más general. Empleando el principio de mínima energía potencial, conjuntamente con el principio variacional de invariancia a una traslación rígida del dominio analizado, se arriba a la expresión del tensor momento energía [12, 13]. De esta forma queda en evidencia que la propiedad de independencia del camino de la integral J es una consecuencia de que el flujo del tensor momento energía sobre el contorno de regiones que no contienen singularidades o defectos, resulta nulo.

El enfoque anterior permite extender la integral J a otros casos de interés, procediendo en forma sistemática, o sea admitiendo invariancia de la energía potencial almacenada cuando imponemos al dominio traslaciones arbitrarias.

En esta presentación analizamos en primer término el caso de láminas planas sometidas a cargas en el contorno, establecemos la ley de conservación a una traslación rígida de manera de obtener el tensor momento energía y a la integral independiente del camino J cuando admitimos la existencia de una fisura pasante en la lámina.

Posteriormente siguiendo una secuencia similar a la anterior extendemos nuestro análisis para el caso de placas y cáscaras, estableciendo las correspondientes integrales J generalizadas para ambos casos.

1. ESTADOS PLANOS

Consideramos una lámina de espesor constante representada por la región

bidimensional Ω de contorno $\partial\Omega$ y normal exterior n .

Admitimos que no existen cargas en el dominio Ω y que las únicas fuerzas externas a la lámina están aplicadas en su contorno $\partial\Omega$.

Designamos con $u(x)$ al desplazamiento de un punto cualquiera $u: x \in \Omega \rightarrow \mathcal{V}$ (donde \mathcal{V} es el espacio vectorial asociado al plano que contiene a Ω) y escogemos una relación lineal para la deformación dada por la parte simétrica del gradiente de u , o sea $\epsilon = (\nabla u)^s$.

En cuanto al comportamiento del material, supondremos la existencia de un potencial función de la deformación $\phi = \phi(\epsilon)$, conocido como energía de deformación específica:

$$\phi: \epsilon \in \text{Sim} \rightarrow R$$

con Sim designamos el espacio de tensores simétricos del plano.

Dada al función $\phi(\epsilon)$, la relación constitutiva se obtiene mediante derivación de ϕ :

$$\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} = \phi_{\epsilon}$$

σ tensor de tensiones ($\sigma \in \text{Sim}$).

En el caso de elasticidad lineal isotrópica $\phi(\epsilon)$ está dada por:

$$\phi(\epsilon) = \mu \epsilon \cdot \epsilon + \frac{\lambda}{2} (\epsilon \cdot I)^2$$

λ, μ constantes de Lamé, $\epsilon \cdot I$ producto escalar de los tensores deformación e identidad en el plano.

El funcional energía, que representa la energía potencial almacenada en la lámina al ser sometida a cargas t en su contorno, está dado por la expresión:

$$\pi(u) = \int_{\Omega} \phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} t \cdot u d\partial\Omega \quad u \in \text{Kin} \cdot u$$

donde $\text{Kin} \cdot u$ es el espacio de funciones admisibles del funcional π .

1.1. Equilibrio de la lámina

El equilibrio de las tensiones σ con las fuerzas aplicadas a la lámina está dado por la condición de nulidad de la primera variación del funcional energía para cualquier desplazamiento virtual δu o sea:

$$\delta \pi = \int_{\Omega} \delta \phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} t \cdot \delta u d\partial\Omega = 0 \quad \forall \delta u \in \text{Var} \cdot u$$

donde $\text{Var} \cdot u$ es el espacio de variaciones admisibles de u , (coincidente en este caso con $\text{Kin} \cdot u$).

Teniendo en cuenta la relación constitutiva $\sigma = \phi_{\epsilon}$, la relación cinemática $\epsilon = (\nabla u)^s$ y la simetría del tensor σ , la variación de la energía ϕ resulta:

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} \cdot \delta \epsilon = \sigma \cdot (\nabla \delta u)^s = \sigma \cdot \nabla \delta u$$

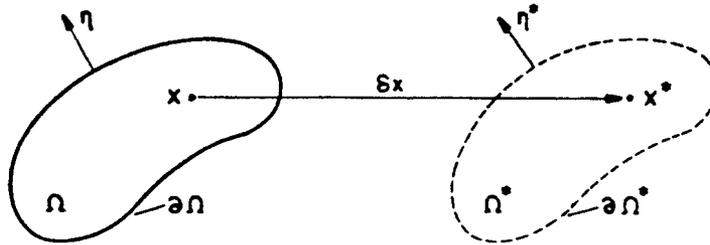


Figura 1

Recordando la relación tensorial:

$$\sigma \cdot \nabla \delta u = \operatorname{div}(\sigma^T \delta u) - \operatorname{div} \sigma \cdot \delta u$$

y mediante la aplicación del teorema de la divergencia, la variación $\delta \pi$ puede ser reescrita en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \delta \pi &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma^T \delta u) d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \cdot \delta u d\Omega - \int_{\partial \Omega} t \cdot \delta u d\partial \Omega = \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \cdot \delta u d\Omega + \int_{\partial \Omega} (\sigma n - t) \cdot \delta u d\partial \Omega = 0 \end{aligned}$$

De la expresión anterior se deducen las correspondientes condiciones de equilibrio local:

$$\operatorname{div} \sigma = 0, \quad \sigma n = t$$

en el dominio Ω y contorno $\partial \Omega$ respectivamente.

1.2. Ley de Conservación

Al efectuar la variación del funcional energía para estudiar el equilibrio de la lámina, admitimos que el dominio Ω estaba fijo, lo que nos permitió introducir la operación variación dentro del símbolo integral, variando directamente los correspondientes integrandos.

A seguir analizaremos la variación de la energía potencial almacenada en la lámina en un contexto más general, admitiremos que el dominio Ω varía.

Mediante una traslación conocida que denominaremos δx cada punto x pasa a una nueva posición x^* y el dominio Ω de contorno $\partial \Omega$ a un nuevo dominio Ω^* de contorno $\partial \Omega^*$, como muestra la figura 1 [14, 15].

$$x \rightarrow x^* = x + \delta x \quad \Omega \rightarrow \Omega^* = \Omega + \delta \Omega$$

Una función definida en Ω , por ejemplo el desplazamiento $u(x)$, pasa a ser una nueva función $u^*(x^*)$ en el dominio Ω^* y a la diferencia de ambas en puntos correspondientes x y x^* la designaremos como variación total y la siguiente notación será empleada:

$$\widehat{\delta}u = u^*(x^*) - u(x)$$

En cuanto a la energía potencial almacenada en la lámina π , pasamos a un nuevo funcional π^* del dominio Ω^* y su diferencia resultará la variación total de π o sea $\widehat{\delta}\pi = \pi^* - \pi$.

Lo anterior conduce a que reescribamos el funcional energía en la siguiente forma:

$$\pi(u_\Omega, \Omega) = \int_{\Omega} \phi(u_\Omega) d\Omega - \int_{\partial\Omega} t \cdot u_\Omega d\partial\Omega$$

enfatiizando que π es función implícita y explícita del dominio Ω , fijando Ω tendremos el correspondiente funcional π para ese dominio Ω .

Para efectuar la variación total de π , variamos primero con respecto a u dejando Ω fijo y posteriormente variamos con respecto a Ω [15].

Analizando por separado cada uno de los sumandos del funcional energía se tiene que la variación total de la energía de deformación [14] está dada por:

$$\widehat{\delta}U(u_\Omega, \Omega) = \widehat{\delta} \int_{\Omega} \phi d\Omega = \int_{\Omega} \delta\phi d\Omega + \int_{\partial\Omega} \phi \delta x \cdot n d\partial\Omega$$

Si admitimos que el contorno $\partial\Omega$ se traslada un δx constante y que la fuerza externa aplicada a $\partial\Omega$ acompaña constantemente esa traslación, la variación total puede ser introducida dentro de la integral y la variación total del trabajo de las fuerzas externas resulta:

$$\widehat{\delta}V = \widehat{\delta} \int_{\partial\Omega} t \cdot u d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} t \cdot \widehat{\delta}u d\partial\Omega$$

Como la variación total $\widehat{\delta}u$ esta dada por

$$\widehat{\delta}u = \delta u + (\nabla u) \delta x$$

la expresión de $\widehat{\delta}V$ puede ser reescrita en la siguiente forma:

$$\widehat{\delta}V = \int_{\partial\Omega} [t \cdot \delta u + t \cdot (\nabla u) \delta x] d\partial\Omega$$

Introduciendo los resultados obtenidos para $\widehat{\delta}U$ y $\widehat{\delta}V$ en la expresión de $\widehat{\delta}\pi$:

$$\widehat{\delta}\pi = \widehat{\delta}U - \widehat{\delta}V$$

se sigue que:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}\pi &= \int_{\Omega} \delta\phi d\Omega - \int_{\partial\Omega} t \cdot \delta u d\partial\Omega + \int_{\partial\Omega} [\phi \delta x \cdot n - t \cdot (\nabla u) \delta x] d\partial\Omega = \\ &= \delta\pi + \int_{\partial\Omega} [\phi n - (\nabla u)^T t] \cdot \delta x d\partial\Omega \end{aligned}$$

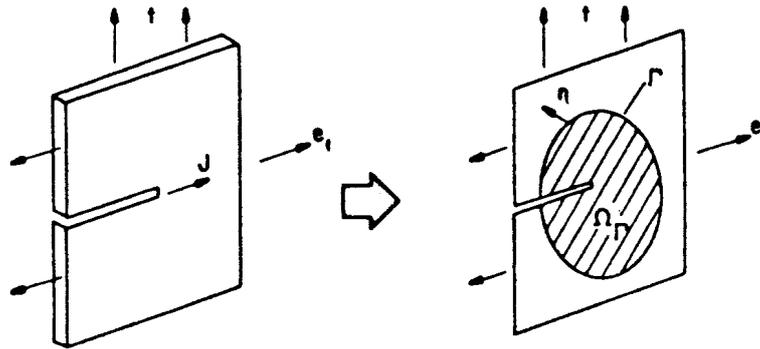


Figura 2

Recordando que la lámina está en equilibrio con las cargas aplicadas ($\delta\pi = 0$ y en el contorno $\partial\Omega$, $\sigma n = t$), la variación total $\widehat{\delta\pi}$ se reduce a:

$$\widehat{\delta\pi} = \int_{\partial\Omega} [\phi I - (\nabla u)^T \sigma] n \cdot \delta x \, d\partial\Omega$$

Como δx no depende de x , $\widehat{\delta\pi}$ puede reescribirse en la siguiente forma:

$$\widehat{\delta\pi} = \delta x \cdot \int_{\partial\Omega} \Sigma n \, d\partial\Omega$$

donde $\Sigma = \phi I - (\nabla u)^T \sigma$ es conocido como tensor momento energía [12, 13].

La expresión anterior nos permite concluir que la invariancia de la energía potencial almacenada en el dominio Ω de la lámina, a una traslación constante arbitraria δx , implica la nulidad del flujo del tensor momento energía en el contorno cerrado $\partial\Omega$ de una región sin singularidades.

1.3. Integral Independiente del Camino J

Analizaremos a seguir la lámina plana con una fisura pasante indicada en la figura 2. Designaremos con Ω_Γ el subdominio de contorno compuesto por la unión de $\Gamma \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_f \cup \Gamma_-$, Γ es una curva alrededor del extremo de la fisura, Γ_+ , Γ_- representan la parte superior e inferior de la fisura y Γ_f el extremo de la misma mostrados en la figura 3.

Admitimos que la fisura está libre de tensiones y que las únicas cargas exteriores son aplicadas en el contorno Γ .

Determinado el estado de tensiones de la lámina, sustituimos la parte exterior a Ω_Γ por el esfuerzo t que es transmitido a lo largo de Γ .

Estudiaremos la variación total de la energía potencial almacenada en el dominio Ω_r cuando mediante una traslación conocida δx pasamos a una nueva posición Ω_r^* , como muestra la figura 3.

Si la lámina fisurada está en equilibrio con las cargas aplicadas en el contorno Γ , la variación total de π cuando Ω_r pasa a Ω_r^* está dada por:

$$\begin{aligned}\widehat{\delta\pi} &= -\delta a \left\{ \int_{\Gamma} [\phi I - (\nabla u)^T \sigma] n \, d\Gamma \right\} \cdot e_1 = \\ &= -\delta a \left(\int_{\Gamma} \Sigma n \, d\Gamma \right) \cdot e_1\end{aligned}$$

Nótese que la proyección del flujo del tensor Σ en los contornos Γ_+ y Γ_- que coinciden con la parte superior e inferior de la fisura, resulta nula:

$$\left\{ \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} [\phi I - (\nabla u)^T \sigma] n \, d\Gamma \right\} \cdot e_1 = 0$$

el primer sumando $\phi I n \cdot e_1$ se anula debido a que n y e_1 son ortogonales, en cuanto al segundo sumando $\sigma n \cdot (\nabla u) e_1$ admitimos que la fisura estaba libre de tensiones por tanto $\sigma n = 0$.

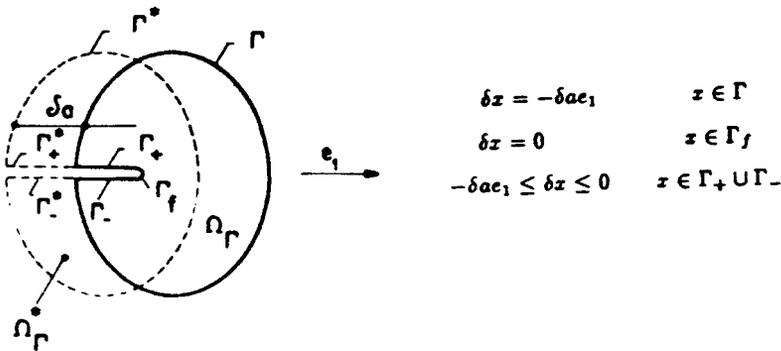


Figura 3

Dividiendo por $-\delta a$, la expresión de $\widehat{\delta\pi}$ puede reescribirse en la siguiente forma:

$$-\frac{\widehat{\delta\pi}}{\delta a} = \left(\int_{\Gamma} \Sigma n \, d\Gamma \right) \cdot e_1 = J$$

La relación anterior nos permite concluir que el decrecimiento de energía potencial $-\widehat{\delta\pi}$ correspondiente al aumento δa de la fisura está dado por la proyección según e_1 del flujo del tensor momento energía a lo largo del contorno Γ

Esta proyección del flujo no es otra cosa que la integral independiente del camino introducida por Rice [1] y representa la fuerza concentrada en el extremo de la fisura correspondiente al incremento virtual δa de la misma.

2. PLACAS EN FLEXIÓN

Las teorías que frecuentemente se emplean para analizar placas en flexión se basan en la introducción de hipótesis de carácter cinemático que permiten integrar en la dirección del espesor reduciendo el problema inicialmente tridimensional a uno bidimensional [16].

En este trabajo hemos escogido el modelo simplificado que lleva en cuenta las distorsiones transversales de la placa, conocido en la literatura como teoría de Reissner-Mindlin [17, 18].

Además de su simplicidad, puesto que las deformaciones generalizadas son derivadas primeras de los desplazamientos, este modelo ofrece el atractivo adicional de que cuando es aplicado a placas con fisuras pasantes los esfuerzos resultantes aproximan mejor el estado tridimensional próximo al extremo de la fisura.

Designando con $w(x)$ al desplazamiento normal al plano medio de la placa y con $\theta(x)$ a la función vectorial que representa el giro de la fibra inicialmente normal al plano medio:

$$w : x \in \Omega \rightarrow \mathcal{R} \quad \theta : x \in \Omega \rightarrow \mathcal{V}$$

\mathcal{V} es el espacio vectorial asociado al plano medio de la placa.

Las deformaciones generalizadas para este modelo están dadas por:

$$\kappa = (\nabla\theta)^s; \quad \gamma = \nabla w - \theta$$

donde κ es la variación del giro de la fibra inicialmente normal al plano medio, conocida comúnmente como deformación de flexión y γ es la deformación cisallante o distorsión de la fibra normal al plano medio.

Admitiendo la existencia de un potencial de las deformaciones generalizadas κ, γ , que resulta de integrar la energía de deformación específica de la placa en la dirección del espesor:

$$\phi : (\kappa \in \text{Sim}, \gamma \in \mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{R}$$

las ecuaciones constitutivas en tensiones y deformaciones generalizadas se obtienen mediante derivación del potencial ϕ con respecto a sus argumentos:

$$M = \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} = \phi_{\kappa}; \quad Q = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} = \phi_{\gamma}$$

donde M es el tensor de momentos flectores y Q es el vector de esfuerzos cortantes.

El funcional energía correspondiente al dominio Ω de contorno $\partial\Omega$, está dado por:

$$\pi(w, \theta) = \int_{\Omega} \phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (m \cdot \theta + q w) d\partial\Omega$$

$$(w, \theta) \in \text{Kin}(w, \theta)$$

donde $\text{Kin}(w, \theta)$ representa el espacio de funciones $w(x), \theta(x)$ admisibles, m vector momento y q fuerza en la dirección normal al plano medio, prescritos en $\partial\Omega$ y compatibles con la teoría que estamos presentando.

2.1. Equilibrio de la placa

El equilibrio de las tensiones generalizadas M, Q con las fuerzas externas m, q es satisfecho cuando la primera variación de la energía potencial almacenada en la placa se anula para cualquier desplazamiento virtual $\delta w, \delta\theta$, o sea:

$$\delta\pi(w, \theta) = \int_{\Omega} \delta\phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (m \cdot \delta\theta + q \delta w) d\Gamma = 0 \quad \forall (\delta w, \delta\theta) \in \text{Var}(w, \theta).$$

Nótese que con las condiciones de contorno que estamos admitiendo, el espacio de variaciones admisibles $\text{Var}(w, \theta)$ coincide con el espacio de funciones cinemáticamente admisibles $\text{Kin}(w, \theta)$.

Teniendo en cuenta las ecuaciones constitutivas $M = \phi_{,\alpha}$; $Q = \phi_{,\gamma}$, las relaciones cinemáticas $\kappa = (\nabla\theta)^{\alpha}$; $\gamma = \nabla w - \theta$ y la simetría del tensor M , la variación del potencial ϕ puede ser expresado como:

$$\begin{aligned} \delta\phi(\alpha, \gamma) &= \frac{\partial\phi}{\partial\kappa} \cdot \delta\kappa + \frac{\partial\phi}{\partial\gamma} \cdot \delta\gamma = M \cdot \delta\kappa + Q \cdot \delta\gamma = \\ &= M \cdot \nabla\delta\theta + Q \cdot \nabla\delta w - Q \cdot \delta\theta \end{aligned}$$

Recordando las relaciones tensoriales:

$$\begin{aligned} M \cdot \nabla\delta\theta &= \text{div}(M\delta\theta) - \text{div} M \cdot \delta\theta \\ Q \cdot \nabla\delta w &= \text{div}(\delta w Q) - \delta w \text{div} Q \end{aligned}$$

integrando por partes y reagrupando términos se obtiene la siguiente expresión para la variación de la energía potencial π de la placa:

$$\begin{aligned} \delta\pi &= - \int_{\Omega} [(\text{div} M + Q) \cdot \delta\theta + (\text{div} Q)\delta w] \, d\Omega \\ &+ \int_{\partial\Omega} [(Mn - m) \cdot \delta\theta + (Q \cdot n - q)\delta w] \, d\partial\Omega \end{aligned}$$

La condición de nulidad de la expresión anterior nos permite arribar a las correspondientes ecuaciones de Euler y condiciones de contorno de una placa sometida a fuerzas prescritas m y q en su contorno:

$$\begin{aligned} \text{div} M + Q &= 0; & \text{div} Q &= 0 & \text{en } x \in \Omega \\ Mn - m &= 0; & Q \cdot n - q &= 0 & \text{en } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

2.2. Ley de Conservación

A continuación analizaremos la variación de la energía potencial almacenada en la placa cuando el dominio es trasladado constantemente en una dirección arbitraria como indica la figura 1.

Reescribimos el correspondiente funcional energía enfatizando que π es función implícita y explícita de Ω :

$$\pi(w_\Omega, \theta_\Omega, \Omega) = \int_{\Omega} \phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (m \cdot \theta + q w) \, d\partial\Omega$$

Procediendo en forma similar al caso de estado plano determinaremos la variación total de π analizando por separado cada uno de los sumandos [19].

La variación total de la energía de deformación resulta:

$$\hat{\delta}U = \hat{\delta} \int_{\Omega} \phi \, d\Omega = \int_{\Omega} \delta\phi \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \phi \delta x \cdot n \, d\partial\Omega$$

Admitiendo que las cargas externas m y q se trasladan en forma constante conjuntamente con el contorno $\partial\Omega$, la variación total del trabajo de las mencionadas cargas conduce a:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}V &= \hat{\delta} \int_{\partial\Omega} (m \cdot \theta + q w) \, d\Gamma = \int_{\partial\Omega} (m \cdot \hat{\delta}\theta + q \hat{\delta}w) \, d\Gamma = \\ &= \int_{\partial\Omega} [m \cdot \delta\theta + m \cdot (\nabla\theta)\delta x + q\delta w + q\nabla w \cdot \delta x] \, d\Gamma \end{aligned}$$

Los resultados anteriores permiten obtener la siguiente expresión para la variación total del funcional energía:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}\pi &= \hat{\delta}U - \hat{\delta}V = \int_{\Omega} \delta\phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (m \cdot \delta\theta + q\delta w) \, d\Gamma + \\ &+ \left\{ \int_{\partial\Omega} (\phi n - (\nabla\theta)^T m - q\nabla w) \, d\partial\Omega \right\} \cdot \delta x \end{aligned}$$

La condición de equilibrio de la placa con el sistema de cargas aplicadas m y q implica que:

$$\delta\pi = \int_{\Omega} \delta\phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (m \cdot \delta\theta + q\delta w) \, d\partial\Omega = 0$$

y que en el contorno $Mn = m$, $Qn = q$.

Introduciendo estas relaciones en la variación total de π y recordando la definición de producto tensorial de vectores $(Q \cdot n)\nabla w = (\nabla w \otimes Q)n$ obtenemos la siguiente expresión para $\hat{\delta}\pi$:

$$\hat{\delta}\pi = \left\{ \int_{\partial\Omega} [\phi I - (\nabla\theta)^T M - \nabla w \otimes Q] n \, d\partial\Omega \right\} \cdot \delta x$$

De esta forma conseguimos extender el concepto de tensor momento energía a la teoría de placas propuesta por Reissner.

Designando con Σ^p al tensor momento energía:

$$\Sigma^p = \phi I - (\nabla\theta)^T M - \nabla w \otimes Q$$

la variación total $\widehat{\delta}\pi$ puede reescribirse en la siguiente forma:

$$\widehat{\delta}\pi = \delta x \cdot \int_{\partial\Omega} \Sigma^p n \, d\Gamma$$

Al igual que en el caso de estado plano, la invariancia de π a una traslación constante arbitraria δx , implica la nulidad del flujo del tensor momento energía a lo largo del contorno cerrado $\partial\Omega$.

2.3. Integral Independiente del Camino J^p

Consideremos ahora que la placa en estudio tiene una fisura recta que se extiende en todo el espesor. Supongamos además que las cargas externas compatibles con el modelo de placas que estamos presentando son aplicadas en el contorno y que los bordes de la fisura están libres de esfuerzos, vease figura 4 [20, 21].

Separemos el subdominio $\Omega_f \subset \Omega$ que contiene el extremo de la fisura y cuyo contorno esta dado por la unión de $\Gamma \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_f \cup \Gamma_-$ como indica la figura 3.

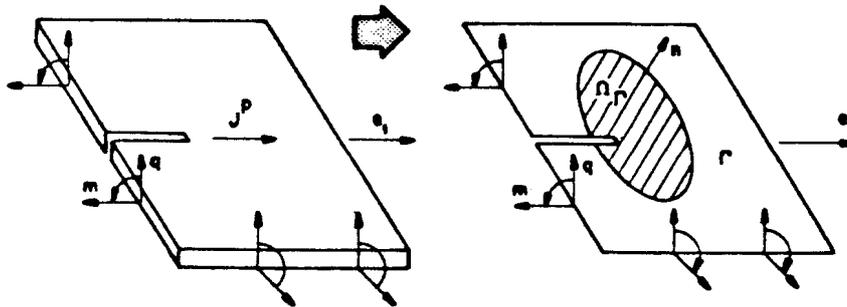


Figura 4

Conocido el estado de tensiones y deformaciones de la placa, sustituimos la parte exterior a Ω_f por los esfuerzos m y q que ella transmite a la parte interior a través de Γ .

Analizaremos la variación total de la energía potencial almacenada en la placa cuando el dominio Ω_f experimenta la variación indicada en la figura 3. El extremo de la fisura Γ_f permanece fijo y Γ se traslada $-\delta s$ en la dirección e_1 .

En cuanto a las cargas externas el dominio Ω_Γ está sometido al sistema de cargas m, q en el contorno Γ y libre de esfuerzos en la unión de $\Gamma_+ \cup \Gamma_f \cup \Gamma_-$:

$$\begin{aligned} m &= Mn; & q &= Q \cdot n & x &\in \Gamma \\ m &= 0; & q &= 0 & x &\in \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_f \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que Ω_Γ está en equilibrio, la variación total de la energía potencial almacenada en Ω_Γ resulta, al igual que en el caso anterior una integral a lo largo de Γ :

$$\begin{aligned} \widehat{\delta\pi} &= -\delta a \left\{ \int_\Gamma (\phi I - (\nabla\theta)^T M - \nabla w \otimes Q) n \, d\Gamma \right\} \cdot e_1 \\ &= -\delta a \left(\int_\Gamma \Sigma^p n \, d\Gamma \right) \cdot e_1 \end{aligned}$$

Designando con:

$$J^p = \left(\int_\Gamma \Sigma^p n \, d\Gamma \right) \cdot e_1$$

concluimos que el decrecimiento de energía potencial almacenado en Ω_Γ , cuando la fisura aumenta la longitud δa está dado por la proyección en la dirección de e_1 del flujo del tensor momento energía alrededor del contorno Γ o sea que:

$$-\frac{\widehat{\delta\pi}}{\delta a} = J^p$$

La integral J^p generaliza la integral de Ríce al caso de placas en flexión [19, 21] y representa a la vez la fuerza concentrada en el extremo de la fisura correspondiente al incremento δa de la misma.

3. CASCARAS CILINDRICAS

En el análisis de cáscaras se puede seguir un camino similar al caso de placas en flexión con la dificultad adicional de que la reducción sobre el plano medio pasa a ser sobre la superficie media de la cáscara [16, 22, 23].

Para transformar la cinemática de la cáscara a su superficie media escogemos la base intrínseca compuesta por el plano tangente \mathcal{V}_i y la correspondiente normal N en el punto x que estamos considerando. como indica la figura 5

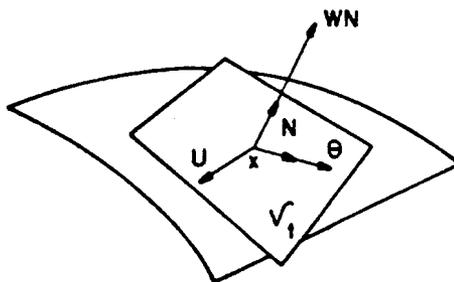


Figura 5

Designamos con $u(x)$ al desplazamiento tangencial a la superficie media de la cáscara, con $w(x)$ al desplazamiento en la dirección de la normal N y con $\theta(x)$ al giro de la fibra inicialmente coincidente con la normal N :

$$u : x \in \Omega \rightarrow \mathcal{V}_t; \quad w : x \in \Omega \rightarrow \mathcal{R}; \quad \theta : x \in \Omega \rightarrow \mathcal{V}_t$$

Imponiendo la condición de que las fibras normales a la superficie media en cualquier punto x permanecen rectas y sin deformarse, cuando la cáscara pasa de una configuración a otra, se obtienen las siguientes ecuaciones cinemáticas que relacionan las deformaciones generalizadas con los desplazamientos u, w y el giro θ :

$$\begin{aligned} \epsilon &= (\nabla u)^s + w \nabla N \\ \gamma &= \theta - (\nabla N)u + \nabla w \\ \kappa &= (\nabla \theta)^s \end{aligned}$$

donde: ϵ deformación de membrana es un tensor simétrico en el plano tangente a la superficie media, $\epsilon : \mathcal{V}_t \rightarrow \mathcal{V}_t$; γ distorsión de la fibra inicialmente normal a la superficie media es un vector del plano tangente, $\gamma \in \mathcal{V}_t$; κ deformación de flexión o variación del giro de la fibra inicialmente normal a la superficie media es un tensor simétrico en el plano tangente, $\kappa : \mathcal{V}_t \rightarrow \mathcal{V}_t$; ∇N gradiente superficial del vector normal unitario N , ∇w gradiente superficial de w , $(\nabla u)^s, (\nabla \theta)^s$ parte simétrica de los gradientes superficiales de los vectores u y θ proyectados sobre el plano tangente.

Admitiendo que la energía de deformación específica de la cáscara puede ser reducida a la superficie media y expresarse como una función potencial de las deformaciones generalizadas:

$$\phi : (\epsilon, \gamma, \kappa) \rightarrow \mathcal{R}$$

las ecuaciones constitutivas en tensiones y deformaciones generalizadas se obtienen mediante derivación del potencial ϕ con respecto a sus argumentos:

$$T = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} = \phi_\epsilon; \quad Q = \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} = \phi_\gamma; \quad M = \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} = \phi_\kappa$$

donde: T es el tensor de esfuerzos de membrana $T : \mathcal{V}_t \rightarrow \mathcal{V}_t$, Q es el vector de esfuerzos cortantes transversales, $Q \in \mathcal{V}_t$ y M es el tensor de momentos, $M : \mathcal{V}_t \rightarrow \mathcal{V}_t$.

El funcional de energía correspondiente a este modelo para un sistema de fuerzas externas t, q, m aplicadas en el contorno de la superficie media compatibles con la teoría de cáscaras que estamos presentando, resulta:

$$\pi(u, w, \theta) = \int_{\Omega} \phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (t \cdot u + qw + m \cdot \theta) d\partial\Omega$$

$$(u, w, \theta) \in \text{Kin}(u, w, \theta)$$

donde con $\text{Kin}(u, w, \theta)$ representamos al espacio de desplazamiento tangente, desplazamiento normal y giro admisibles del funcional π .

3.1. Equilibrio de la Cáscara

El equilibrio de la cáscara con el sistema de cargas aplicadas en su contorno t, q, m es verificado cuando se anula la primera variación de la energía potencial o sea:

$$\delta\pi = \int_{\Omega} \delta\phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (t \cdot \delta u + q\delta w + m \cdot \delta\theta) d\partial\Omega = 0$$

para $\forall(\delta u, \delta w, \delta\theta) \in \text{Var} \cdot (u, w, \theta)$

Analizaremos previamente la variación $\delta\phi$ dada por:

$$\delta\phi(\varepsilon, \gamma, \kappa) = \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon} \cdot \delta\varepsilon + \frac{\partial\phi}{\partial\gamma} \cdot \delta\gamma + \frac{\partial\phi}{\partial\kappa} \cdot \delta\kappa$$

Teniendo en cuenta:

- i) las relaciones constitutivas $T = \phi_\varepsilon$; $Q = \phi_\gamma$; $M = \phi_\kappa$,
- ii) las relaciones cinemáticas

$$\varepsilon = (\nabla u)^s + w \nabla N$$

$$\gamma = \theta - (\nabla N)u + \nabla w$$

$$\kappa = (\nabla \theta)^s$$

- iii) y la simetría de los tensores T y M .

Se arriba a la siguiente expresión de $\delta\phi$:

$$\delta\phi = T \cdot (\nabla \delta u + \delta w \nabla N) + Q \cdot [\delta\theta - (\nabla N)\delta u + \nabla \delta w] + M \cdot \nabla \delta\theta$$

Recordando las relaciones tensoriales:

$$T \cdot \nabla \delta u = \text{div}(T\delta u) - \text{div}T \cdot \delta u$$

$$M \cdot \nabla \delta\theta = \text{div}(M\delta\theta) - \text{div}M \cdot \delta\theta$$

$$Q \cdot \nabla \delta w = \text{div}(Q\delta w) - \text{div}Q \cdot \delta w$$

la variación $\delta\phi$ puede reescribirse en la siguiente forma:

$$\delta\phi = \text{div}(T\delta u) + \text{div}(M\delta\theta) + \text{div}(Q\delta w) \\ - [\text{div}T + (\nabla N)Q] \cdot \delta u - (\text{div}M - Q) \cdot \delta\theta - (\text{div}Q - T \cdot \nabla N)\delta w$$

Introduciendo este resultado en la expresión de la variación del funcional energía, mediante la aplicación del teorema de la divergencia y reordenando términos se sigue que:

$$\delta\pi = - \int_{\Omega} \{ [\text{div}T + (\nabla N)Q] \cdot \delta u + (\text{div}M - Q) \cdot \delta\theta + (\text{div}Q - T \cdot \nabla N)\delta w \} d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega} \{ (Tn - t) \cdot \delta u + (Q \cdot n - q)\delta w + (Mn - m) \cdot \delta\theta \} d\partial\Omega$$

De la condición de nulidad de $\delta\pi$ es posible obtener:

las ecuaciones de equilibrio:

$$\text{div}T + (\nabla N)Q = 0; \quad \text{div}M - Q = 0; \quad \text{div}Q - T \cdot \nabla N = 0 \quad (x \in \Omega)$$

y las condiciones de contorno:

$$Tn = t; \quad Q \cdot n = q; \quad Mn = m \quad (x \in \partial\Omega)$$

3.2. Ley de Conservación

En los casos analizados anteriormente, tanto en estados planos como en flexión de placas, cuando estudiamos la variación total de la energía potencial desplazamos el dominio Ω una cantidad constante arbitraria hasta una nueva posición Ω^* sobre el plano que contiene a Ω . En el caso de cáscaras cilíndricas el dominio Ω será trasladado sobre la superficie media de la cáscara. La mencionada transformación estará compuesta por una traslación en la dirección longitudinal mas una traslación circunferencial igual para todos los puntos del dominio Ω .

De acuerdo a la figura 6, si se define la superficie media de la cáscara mediante coordenadas curvilíneas x, s la transformación del dominio Ω sobre la superficie proviene de la traslación del dominio Ω_0 en el plano x, s .

Plano x, s

$$\Omega_0 \rightarrow \Omega_0^*$$

$$x_0 \rightarrow x_0^* = x_0 + \delta x_0$$

Superficie media Cáscara

$$\Omega \rightarrow \Omega^*$$

$$x \rightarrow x^* = x + \delta x$$

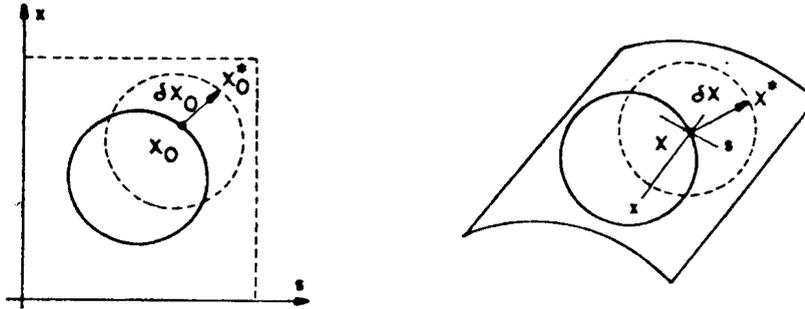


Figura 6

La transformación del dominio sobre la superficie media de la cáscara implica que el funcional energía sea función del mencionado dominio Ω , o sea:

$$\pi(u_\Omega, w_\Omega, \theta_\Omega, \Omega) = \int_\Omega \phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (t \cdot u + qw + m \cdot \theta) \, d\partial\Omega$$

Para determinar la variación total de π estudiamos por separado cada uno de los sumandos.

La variación total de la energía de deformación resulta:

$$\widehat{\delta}U = \widehat{\delta} \int_\Omega \phi \, d\Omega = \int_\Omega \delta\phi \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \phi \, \delta x \cdot n \, d\partial\Omega$$

En cuanto a la variación total del trabajo de las fuerzas externas, admitiendo que las cargas se trasladan junto con el dominio, se tiene que:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}V &= \widehat{\delta} \int_{\partial\Omega} (t \cdot u + qw + m \cdot \theta) \, d\partial\Omega = \\ &= \int_{\partial\Omega} (t \cdot \widehat{\delta}u + q\widehat{\delta}w + m \cdot \widehat{\delta}\theta) \, d\partial\Omega = \\ &= \int_{\partial\Omega} [t \cdot \delta u + t \cdot (\nabla u) \delta x + q \delta w + q \nabla w \cdot \delta x + m \cdot \delta \theta + m \cdot (\nabla \theta) \delta x] \, d\partial\Omega \end{aligned}$$

De las expresiones anteriores y teniendo en cuenta que δx no depende de x , se sigue que la variación total de π está dada por:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta\pi} &= \widehat{\delta U} - \widehat{\delta V} = \int_{\Omega} \delta\phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (t \cdot \delta u + q \, \delta w + m \cdot \delta\theta) \, d\delta \\ &+ \left\{ \int_{\partial\Omega} [\phi n - (\nabla u)^T t - q \, \nabla w - (\nabla\theta)^T m] \, d\delta\Omega \right\} \cdot \delta x \end{aligned}$$

Como la condición de equilibrio de la cáscara implica que la primera variación de π sea nula:

$$\delta\pi = \int_{\Omega} \delta\phi \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} (t \cdot \delta u + q \, \delta w + m \cdot \delta\theta) \, d\delta\Omega = 0$$

y que las condiciones de contorno $Tn = t$; $Q \cdot n = q$; $Mn = m$ sean satisfechas, la variación total $\widehat{\delta\pi}$ resulta:

$$\widehat{\delta\pi} = \left\{ \int_{\partial\Omega} [\phi I - (\nabla u)^T T - \nabla w \otimes Q - (\nabla\theta)^T M] n \, d\delta\Omega \right\} \cdot \delta x$$

Denominando tensor momento energía de cáscaras a:

$$\Sigma^c = \phi I - (\nabla u)^T T - \nabla w \otimes Q - (\nabla\theta)^T M$$

la variación total $\widehat{\delta\pi}$ puede reescribirse en la siguiente forma:

$$\widehat{\delta\pi} = \delta x \cdot \int_{\partial\Omega} \Sigma^c n \, d\delta\Omega$$

La expresión anterior nos permite concluir que la invariancia de la energía potencial almacenada en el dominio Ω para toda transformación resultante de una traslación, es equivalente a la condición de nulidad del flujo del correspondiente tensor momento energía a lo largo del contorno $\partial\Omega$.

3.3. Integral Independiente del Camino J^c

Estudiaremos a seguir el problema de una cáscara cilíndrica con una fisura en la dirección circunferencial que se extiende en todo su espesor [20, 24]. Admitiremos que los bordes de la fisura están libres de esfuerzos y que las cargas compatibles con el modelo de cáscara que estamos presentando son aplicadas en el contorno $\partial\Omega$, vease figura 7.

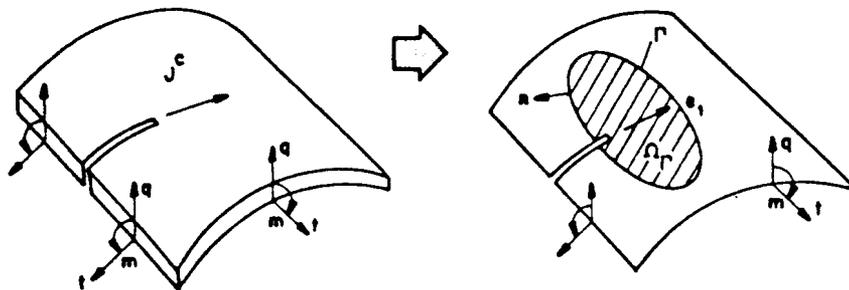


Figura 7

Analizaremos el subdominio Ω_Γ de contorno dado por la unión de $\Gamma \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_f \cup \Gamma_-$ presentado en la figura 3. Substituyendo la parte exterior a Ω_Γ por los esfuerzos t, q y m transmitidos a la parte interior en el contorno Γ , determinaremos la variación total de la energía potencial almacenada en Ω_Γ cuando pasamos a una nueva posición Ω_Γ^* . Es de hacer notar que la variación del dominio indicado en la figura 3 representa una translación sobre la superficie media de la cáscara.

Las cargas externas aplicadas en el contorno Γ , están dadas por:

$$\begin{aligned} t &= Tn; & q &= Q \cdot n; & m &= Mn \text{ en } x \in \Gamma \\ t &= q = m = 0 & & & & \text{en } x \in \Gamma_+ \cup \Gamma_f \cup \Gamma_- \end{aligned}$$

Si el dominio Ω_Γ de la cáscara con fisura está en equilibrio con las cargas aplicadas en Γ , la variación total de π cuando Ω_Γ pasa a Ω_Γ^* , está dada por una integral de línea sobre el contorno Γ :

$$\hat{\delta}\pi = -\delta a \left\{ \int_\Gamma [\phi I - (\nabla u)^T T - \nabla w \otimes Q - (\nabla \theta)^T M] n \, d\Gamma \right\} \cdot e_1$$

donde e_1 es el vector unitario contenido en el plano tangente y en la dirección de la fisura.

Por razones similares al caso de placas en flexión el flujo del tensor momento energía en la dirección de e_1 a lo largo de los bordes de la fisura $\Gamma_+ \cup \Gamma_f \cup \Gamma_-$ resulta nulo.

Recordando que en el caso de cáscaras el tensor momento energía está dado por:

$$\Sigma^c = \phi I - (\nabla u)^T T - \nabla w \otimes Q - (\nabla \theta)^T M$$

la expresión de $\hat{\delta}\pi$ puede reescribirse como:

$$-\frac{\hat{\delta}\pi}{\delta a} = \left(\int_\Gamma \Sigma^c n \, d\Gamma \right) \cdot e_1 = J^c$$

La relación anterior muestra la extensión de la integral de Rice al caso de cáscaras cilíndricas [25, 26, 27]. Dicha integral coincide con el decrecimiento de la energía potencial almacenada en la cáscara cuando la fisura aumenta y representa a la vez la fuerza concentrada en la dirección de e_1 para un incremento virtual δa de la fisura.

REFERENCIAS

- [1] J. R. Rice, "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *J. Appl. Mech.*, vol. 35, pp. 379-386, 1968.
- [2] J. K. Knowles and E. Sternberg, "On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics", *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol. 44, pp. 187-211, 1972.
- [3] F. H. Chen and R. T. Shield, "Conservation laws in elasticity of the J -integral type", *ZAMP*, vol. 28, pp. 1-23, 1977.
- [4] J. D. Eshelby, "The force on an elastic singularity", *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A244, pp. 87, 1951.
- [5] J. D. Eshelby, "The continuum theory of lattice defects", *Prog. Solid State Physics*, pp. 79-114, N.Y., Academic Press, 1956.
- [6] J. D. Eshelby, "The calculation of energy release rates", *Prospects of Fracture Mechanics*, Noordhoff, Delft, 1974.
- [7] A. Golebiewska Herrmann, "On conservation laws of continuum mechanics", *Int. J. Solids Structures*, vol. 17, pp. 1-9, 1980.
- [8] J. D. Logan, "Invariant variational principles", Academic Press, 1977.
- [9] B. Vujanovic, "Conservation laws of dynamical systems via D'Alembert's principle", *Int. J. Nonlinear Mechanics*, vol. 13, pp. 185-197, 1978.
- [10] G. Herrmann, "Some applications of invariant variational principles in mechanics of solids", *IUTAM Symp. on Variational Methods in Mechanics of Solids*, N. York, 1980.
- [11] J. T. Boyle, "Path-independent integrals in fracture mechanics", *Seminário em Mecânica da Fratura*, LNCC, 1985.
- [12] J. D. Eshelby, "The elastic energy-momentum tensor", *Journal of Elasticity*, vol. 5, pp. 321-335, 1975.
- [13] P. Chadwick, "Applications of an energy-momentum tensor in nonlinear elastostatics", *Journal of Elasticity*, vol. 5, pp. 249-258, 1975.
- [14] I. M. Gelfand and S. V. Fomin, "Calculus of variations", English translation by R. A. Silverman, Prentice-Hall, N. Jersey, 1963.
- [15] E. J. Haug, K. K. Choi and V. Komkov, "Design sensitivity analysis of structural systems", *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, 1986.
- [16] E. Taroco, R. A. Feijóo and L. Bevilacqua, *1er Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Teoria das Cascas e suas Aplicações na Engenharia*, LNCC, Rio de Janeiro, 1982-83.
- [17] E. Reissner, "On bending of elastic plates", *Quarterly of Appl. Math.*, vol. 5, pp. 55-68, 1947.

- [18] R. D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", *J. Appl. Mech.*, vol. 18, pp. 31-38, 1951.
- [19] S. Mattedi, "Generalização da integral J para placas submetidas a flexão", Tese de M.Sc. Programa Eng. Mecânica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.
- [20] G. C. Sih, "Mechanics of fracture 3, plates and shells with cracks", Noordhoff, 1977.
- [21] H. A. Sosa, "On the analysis of bars, beams and plates with defects", Ph.D. Thesis, Mech. Eng. Dep., Stanford University, 1986.
- [22] E. Reissner, "A new derivation of the equations for the deformation of elastic shells", *American Journal of Mathematics*, vol. 63, pp. 177-189, 1941.
- [23] E. A. Neto, "Formulação tensorial unificada na teoria de cascas finas", Tese de M.Sc., Programa de Eng. Mecânica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.
- [24] O. S. Yahsi and F. Erdogan, "A cylindrical shell with an arbitrarily oriented crack", *Int. J. Solids Structures*, vol. 19, no 11, pp. 955-972, 1983.
- [25] D. Bergez and D. Radenkovic, "On the definition of stress-intensity factors in cracked plates and shells", 2nd Int. Conf. Pressure Vessel Technology, pp. 1089-1093, 1973.
- [26] J. C. Amazigo, "On the J integral for an internally pressurized cylindrical shell with longitudinal crack", *Int. Journal of Fracture*, vol. 9, pp. 492-495, 1973.
- [27] E. A. Neto and E. Taroco, "Extensão da integral J a análise de tubulações com trincas pasantes", *Anais 6º SIBRAT*, pp. 195-204, Rio de Janeiro, 1990.

Impreso en
Medios Audiovisuales y Gráficos
CERIDE - Santa Fe
