

INESTABILIDADE DINÂMICA DE SISTEMAS
DISCRETOS LINEARES E NÃO-LINEARES

Jorge Daniel Riera Prof. do CPGEC, UFRGS, Porto Alegre*
Rômulo de Freitas Paixão Prof. da UEFSA, Feira de Santana**

RESUMO

São apresentadas definições e princípios básicos relativos à instabilidade do movimento ao redor de estados de equilíbrio em sistemas estruturais discretos e autônomos. É discutida a aplicação das equações linearizadas de movimento, e dos critérios de Lyapunov e dos diagramas de fase no caso de problemas não-lineares. O último enfoque é empregado conjuntamente com soluções numéricas das equações não-lineares de movimento. No contexto do trabalho, tentou-se relacionar os resultados teóricos a aplicações em problemas estruturais de interesse prático.

* Av. Osvaldo Aranha, 99 - 3º andar - 90000, Porto Alegre, RS, BRASIL

** Rua Conselheiro Franci, 56 - Centro, km 3, BR-110
44100, Feira de Santana, BA, BRASIL

1. INTRODUÇÃO

A teoria de estabilidade é um capítulo da física matemática de enorme relevância no estudo de sistemas estruturais submetidos a ações externas. O enfoque conhecido como método de Euler (1744), desenvolvido a partir dos estudos do matemático alemão sobre a flambagem de barras retas, tem importantes limitações, inclusive no caso de instabilidade produzida por cargas estáticas. Ele constitui, porém, a semente das teorias de estabilidade propostas a seguir. Adquirem especial significação as contribuições de Lyapunov (1892) sobre a estabilidade do movimento em geral. Quase um século mais tarde, apesar do progresso realizado, não existe ainda uma teoria geral de instabilidade dinâmica de sistemas estruturais suficientemente consolidada, que possa servir de marco de referência para o desenvolvimento de métodos de análise e de critérios de estabilidade aplicáveis na Engenharia prática. Em consequência, as facilidades disponíveis na área computacional visando à análise de sistemas estruturais, tanto no referente a *hardware* como a *software*, não são integralmente aproveitadas devido à deficiência mencionada. Isto é particularmente certo em relação à representações discretas da estrutura, ou seja, mediante elementos finitos. Com o objetivo de contribuir à consolidação da teoria de estabilidade, no presente trabalho são então apresentados os fundamentos da teoria de sistemas autônomos discretos. Posteriormente são definidos a faixa de aplicabilidade das equações linearizadas de movimento e os casos em que uma formulação não-linear é necessária. São esquematicamente indicados exemplos de aplicação dos diferentes enfoques, sendo em geral omitidas, por razões de espaço, as demonstrações matemáticas e os detalhes computacionais. Deve-se salientar, finalmente, que parte deste trabalho é baseada na ref. (17).

2. CONSIDERAÇÕES FUNDAMENTAIS

Considere-se um sistema cuja configuração deformada seja completamente definida por n coordenadas $q_i(t)$, ($i=1,2,\dots,n$), que constituem consequentemente um conjunto de *coordenadas generalizadas*. Sob condições muito gerais, a energia cinética pode ser escrita na forma¹:

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \quad (2.1)$$

na qual T_1 e T_2 são funções homogêneas linear e quadrática, respectivamente, das *velocidades generalizadas* $\dot{q}_i(t) = dq_i/dt$, ($i = 1,2,\dots,n$):

$$T_1 = \sum_{i=1}^n a_i \dot{q}_i \quad (2.2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.3)$$

Os coeficientes a_i , m_{ij} e T_0 , podem ser funções das coordenadas $q_i(t)$ e do tempo t . O termo T_0 aparece como uma energia potencial fictícia, dando lugar as *forças centrífugas*, enquanto o termo T_1 produz forças do tipo de *Coriolis*.

Formam uma classe importante de forças aquelas que podem ser derivadas de uma energia potencial V , que depende unicamente das coordenadas generalizadas, isto é, $V = V(\vec{q})$. As forças restitutivas elásticas e as forças gravitacionais pertencem a essa classe. Também são de grande interesse as forças de amortecimento - usualmente conhecido como amortecimento de Newton - deriváveis da função de dissipação de Raleigh:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (2.4)$$

As forças atuantes não incluídas em qualquer um dos grupos indicados acima, serão denotadas por Q_i . Nas situações mais simples, as forças generalizadas Q_i dependem unicamente do tempo t , mas podem também ser função dos deslocamentos, velocidades, ou da história do movimento, através de um funcional.

Definindo o *Lagrangiano* como:

$$L = T - V \quad (2.5)$$

as equações de movimento podem ser obtidas a partir das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2.6)$$

Em geral, as equações (2.6) constituem um sistema de n equações diferenciais não lineares de segunda ordem, para o qual não existem soluções gerais, excepto quando podem ser linearizadas.

A *solução* das equações (2.6) implica no conhecimento das n coordenadas generalizadas $q_i(t)$, ($i=1,2,\dots,n$). Essa solução poderia ser representada geometricamente num espaço euclidiano n -dimensional, constituído pelos eixos q_i , denominado *espaço da configuração*. Qualquer configuração deformada \vec{q} está representada por um ponto nesse espaço. Por outro lado, qualquer processo dinâmico é representado pela *trajetória* no espaço da configuração, descrita pelo extremo do vetor $\vec{q}(t)$. Evidentemente, o estado do sistema não pode ser definido univocamente pela configuração deformada \vec{q} , pois é necessário conhecer também o vetor de velocidades generalizadas $\dot{\vec{q}}$. Resulta útil, então, a introdução do *vetor de estado*:

$$\vec{y} = \begin{Bmatrix} \vec{q} \\ \dot{\vec{q}} \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

o qual consiste num vetor $2n$ -dimensional, cujas n -primeiras componentes são coordenadas generalizadas, e cujas últimas n -componentes são as correspondentes velocidades generalizadas. O espaço euclidiano $2n$ -dimensional com eixos coordenados q_i e \dot{q}_i , ($i=1,2,\dots,n$), denomina-se *espaço de estado*. O *estado* do sistema em qualquer instante de tempo é representado por um ponto no espaço de estado, correspondendo a qualquer solução $q(t)$ das equações (2.6), uma *trajetória* no mesmo.

Uma solução da forma $\vec{y}(t) = \text{constante}$, com $\vec{q}(t) = \vec{q}_0$ e $\dot{\vec{q}}(t) = 0$, corresponde no espaço de estado, a um *ponto de equilíbrio*. Observe-se que nesse caso também as acelerações são nulas. Se $\vec{q}_0 \neq 0$, o ponto de equilíbrio é não trivial. Resulta então evidente que a origem do espaço de estado é um ponto de equilíbrio trivial.

Uma representação geométrica equivalente pode ser conseguida no espaço euclidiano $2n$ -dimensional definido pelos eixos q_i e p_i , sendo $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$, denominado *espaço de fase*. Observa-se que num sistema com

massas discretas pontuais, as componentes T_0 e T_1 da energia cinética são nulas e $m_{ij} = 0$ se $i \neq j$ na equação (2.3). Sob essas condições, as representações nos espaços de estado e de fase são idênticas, exceto por um fator de escala nos eixos das velocidades, já que $p_i = m_i \dot{q}_i$.

3. VIBRAÇÕES DE PEQUENA AMPLITUDE AO REDOR DE POSIÇÕES DE EQUILÍBRIO

É evidente, do exame das equações (2.6), que uma solução constante $\vec{q}(t) = \vec{q}_0$, a qual implica que o vetor de estado $\vec{y}(t)$ também deve ser constante, só é possível se $\vec{Q}(t) = \vec{Q}_0$. De acordo com o indicado na seção 2, a cada solução constante \vec{y}_0 corresponde um ponto de equilíbrio no espaço de fase. O estudo de vibrações de pequena amplitude ao redor de pontos de equilíbrio, pode ser efetuada sem perda de generalidade com referência à solução trivial $\vec{y} = 0$. Com efeito, se \vec{q}_0 define um ponto de equilíbrio, a simples transformação de coordenadas:

$$\vec{q}(t) = \vec{q}^*(t) - \vec{q}_0 \quad (3.1)$$

permite transladar o ponto de equilíbrio à origem do espaço de fase.

Agora, a hipótese de vibrações de pequena amplitude ao redor de pontos de equilíbrio implica na linearização das equações de movimento, o que equivale à retenção de somente termos lineares e quadráticos nas desvios das coordenadas e velocidades generalizadas de equilíbrio. Em consequência, os coeficientes m_{ij} na equação (2.3) devem ser constantes e simétricos, pois

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \quad (3.2)$$

sendo usualmente conhecidos como coeficientes de massa ou de inércia. Por outro lado, os coeficientes a_j na expressão de T_1 (equação (2.2)), só podem neste caso ser funções lineares das coordenadas generalizadas:

$$a_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} q_i \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

onde a_{ij} são constantes. Introduzindo (3.3) na equação (2.2), resulta a seguinte expressão de T_1 :

$$T_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (3.4)$$

Observe-se também que as componentes de uma solução constante \vec{q}_0 devem satisfazer as equações:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.5)$$

onde

$$U = V - T_0 \quad (3.6)$$

representa uma energia potencial modificada conhecida como "potencial dinâmico". Se U for expandido numa série de Taylor ao redor da origem, ter-se-ia:

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = U_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} q_i q_j \quad (3.7)$$

onde U_0 é constante e as derivadas parciais são avaliadas em $q_i = 0$. Considerando que U_0 não tem influência alguma nas equações de movimento, e que o segundo termo do segundo membro é zero, em virtude de (3.5), resulta que:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i q_j \quad (3.8)$$

Os coeficientes simétricos:

$$k_{ij} = k_{ji} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \quad (3.5)$$

denominam-se *coeficientes de rigidez*. Quando estes resultam da energia potencial elástica, ou energia de deformação interna, denominam-se *coeficientes de rigidez elástica*. Também podem existir *coeficientes de rigidez geométrica*, associados a forças centrífugas ou gravitacionais.

Introduzindo as equações (2.3), (3.4) e (3.8) nas equações de Lagrange, obtém-se finalmente, para sistemas linearizados:

$$\sum_{j=1}^n [m_{ij} \ddot{q}_i + (g_{ij} + c_{ij}) \dot{q}_i + k_{ij} q_i] = Q_i \quad (3.6)$$

onde os coeficientes antimétricos:

$$g_{ij} = a_{ji} - a_{ij} = -g_{ji} \quad (3.7)$$

são conhecidos como *coeficientes giroscópicos*. Outra classe importante de forças, que dependem unicamente das coordenadas generalizadas mas não são deriváveis da energia potencial V , são as chamadas *forças circulatórias* $h_{ij} \dot{q}_j$, sendo os coeficientes h_{ij} antimétricos:

$$h_{ij} = -h_{ji} \quad (3.8)$$

Apresenta-se esse tipo de força em certos sistemas mecânicos. No caso linear geral, então, as equações de movimento tomam a forma:

$$M \ddot{\vec{q}} + (G + C) \dot{\vec{q}} + (K + H) \vec{q} = \vec{Q} \quad (3.9)$$

nas quais M , C e K são matrizes simétricas com coeficientes m_{ij} , c_{ij} e k_{ij} , respectivamente. G e H são matrizes antimétricas com coeficientes g_{ij} e h_{ij} , denominadas matrizes *giroscópica* e *circulatória*, respectivamente. Em sistemas estruturais com pontos nodais (apoios) fixos, estas duas últimas são usualmente nulas.

A matriz de massa M é sempre positiva definida. As características das outras matrizes na equação (3.9) condicionam a *estabilidade* do sistema linearizado, conceito que será discutido posteriormente.

As equações de Lagrange (2.6), que constituem um sistema de n -equações diferenciais de segunda ordem, podem ser substituídas por um sistema equivalente de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem nas variáveis de estado $y_i(t)$. Se as forças Q_i dependem unicamente do tempo, então as equações resultantes tomam a forma:

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, y_2, \dots, y_{2n}, t) \quad i=1,2,\dots,2n \quad (3.10)$$

ou, em notação compacta:

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}, t) + \vec{g}(t) \quad (3.11)$$

Onde $\vec{g}(t)$ representa o vetor de cargas externas. Quando o tempo aparece explicitamente nas equações (3.11), o sistema é denominado *não-autônomo*. Serão considerados nos capítulos seguintes sistemas autônomos, isto é, caracterizados por equações da forma:

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}) \quad (3.12)$$

Para que, dado um conjunto de condições iniciais, a solução da equação (3.12) seja única, as funções f_i devem satisfazer as condições de Lipschitz. Uma condição de Lipschitz no domínio D requer que

$$[f_i(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_{2n}) - f_i(\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dots, \ddot{y}_{2n})] \leq A \sum_{i=1}^{2n} [\dot{y}_i - \ddot{y}_i] \quad (3.13)$$

para qualquer \dot{y} e \ddot{y} no domínio de D, e algum valor da constante de Lipschitz A. Se todas as equações satisfazem essa condição, a solução de (3.12) é única. A seguir será adotada também a norma euclidiana

$$\|\vec{y}\| = (\vec{y}^T \vec{y})^{1/2} \quad (3.14)$$

No caso de problemas *autônomos linearizados*, a equação (3.11) pode ser escrita na forma:

$$\dot{\vec{y}} = A \vec{y} \quad (3.15)$$

na qual:

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}(G+C) & \vdots & -M^{-1}(K+H) \\ \dots\dots\dots & \vdots & \dots\dots\dots \\ I & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

é uma matriz real não simétrica de dimensões $2n \times 2n$, com coeficientes constantes, isto é, que não dependem de tempo. Os coeficientes das matrizes que constituem A, de acordo com eq. (3.16), podem depender de parâmetros físicos que condicionam a estabilidade do sistema, segundo se ilustra na Seção 8. Resulta claro, porém, que esses parâmetros também devem ser invariantes com o tempo.

4. DEFINIÇÕES DE ESTABILIDADE NO SENTIDO DE LYAPUNOV

Será discutido a continuação o problema da estabilidade do movimento ao redor de pontos de equilíbrio. Neste contexto, os métodos de Lyapunov adquirem fundamental importância. O primeiro método é bem mais restrito, já que presume o conhecimento do movimento perturbado, enquanto que o segundo não exige o conhecimento do movimento do sistema, e tem-se tornado uma poderosa ferramenta para a solução de problemas de estabilidade.

Ao contrário dos métodos clássicos de análise de estabilidade, nos quais o comportamento do sistema não linear na vizinhança do estado de equilíbrio é aproximado pelo comportamento de um sistema linear associado (eq. 39), o método de Lyapunov não é restrito a uma vizinhança infinitesimal do estado de equilíbrio. Condições de estabilidade podem ser asseguradas diretamente das equações diferenciais, com a construção de uma função de Lyapunov, e sem conhecimento da solução do sistema.

A principal limitação do método direto é a falta de um procedimento geral para a construção das funções de Lyapunov, e a falta de unicidade destas. A existência de uma função de Lyapunov representa uma condição suficiente, mas não necessária de estabilidade.

Serão introduzidas a seguir, as definições fundamentais de estabilidade ao redor da origem no espaço de estado $\vec{y} = 0$. Considere-se uma perturbação \vec{y}_0 aplicada no instante $t = 0$. As definições são²:

DEFINIÇÃO 1 - O estado trivial de equilíbrio $\vec{y} = 0$ é estável, no sentido de Lyapunov, se para algum $\epsilon > 0$ existe um $\delta(\epsilon) > 0$, tal que, se $\|\vec{y}(0)\| < \delta$, $\|\vec{y}(t)\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$.

DEFINIÇÃO 2 - O estado de equilíbrio $\vec{y} = 0$ é assintoticamente estável no sentido de Lyapunov, se ele é estável, e se $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\vec{y}(t)\| = 0$.

DEFINIÇÃO 3 - O estado de equilíbrio $\vec{y} = 0$ é instável se existe um $\epsilon > 0$ tal que, para um $\delta > 0$ arbitrariamente pequeno, existe um movimento $\vec{y}(t)$ para o qual $\|\vec{y}(0)\| < \delta$ e $\|\vec{y}(t)\| > \epsilon$ em algum tempo $t = t_0$.

A definição implica que o movimento será confinado ao domínio $\|\vec{y}\| < \epsilon$, se a perturbação inicial for limitada ao domínio $\|\vec{y}(0)\| < \delta$. A segunda é uma definição mais forte de estabilidade, e indica que o sistema tende a voltar à posição trivial, se a perturbação for limitada a um certo

domínio.

5. TEOREMAS DE LYAPUNOV

Uma função de Lyapunov $F(\vec{q}, \vec{\dot{q}})$ dos deslocamentos e velocidades generalizadas ou, alternativamente a função de Lyapunov $F_0(\vec{y})$ das componentes do vetor de estado, é positiva definida se $F(\vec{q}, \vec{\dot{q}}) > 0$ ou $F_0(\vec{y}) > 0$ para todo $(\vec{q}, \vec{\dot{q}}) \neq (0,0)$ ou $\vec{y} \neq 0$, e $F(\vec{q}, \vec{\dot{q}}) = 0$ ou $F_0(\vec{y}) = 0$ se $(\vec{q}, \vec{\dot{q}}) = (0,0)$ ou $\vec{y} = 0$. A função de Lyapunov é dita positiva semi-definida quando $F(\vec{q}, \vec{\dot{q}}) \geq 0$ ou $F_0(\vec{y}) \geq 0$ para todo $(\vec{q}, \vec{\dot{q}})$ ou \vec{y} . Nas definições de funções negativas e negativas semi-negativas, é alterado o sentido das desigualdades indicadas acima.

As funções de Lyapunov são os elementos básicos na determinação da estabilidade de pontos de equilíbrio, através dos teoremas de Lyapunov^{2,3}:

TEOREMA 1 - Se existe uma função positiva (negativa) definida das variáveis de estado $F_0(\vec{y})$, enquanto $\dot{F}_0(\vec{y})$ é negativa (positiva) semi-definida, então o estado de equilíbrio $\vec{y} = 0$ é estável.

TEOREMA 2 - Se existe uma função positiva (negativa) definida das variáveis de estado, sendo simultaneamente $F_0(\vec{y})$ negativa (positiva) definida, então o estado de equilíbrio $\vec{y} = 0$ é assintoticamente estável.

TEOREMA 3 - Se existe uma função $F_0(\vec{y})$ tal que $F_0(\vec{y}_0) > 0$ para algum \vec{y}_0 arbitrariamente pequeno, e $\dot{F}_0(\vec{y})$ é positiva definida, então o estado de equilíbrio $\vec{y} = 0$ é instável.

Os critérios de Lyapunov garantem a estabilidade de um movimento quando este fica limitado a um certo domínio. Em certos casos, a escolha do parâmetro ϵ que define o tamanho da região de estabilidade é de fundamental importância, o que será discutido em relação aos exemplos da seção 10.

Observe-se que, em sistemas estruturais, a presença de não-linearidade física implica na não-estacionaridade dos pontos de equilíbrio, o qual impõe sérias restrições aos métodos de Lyapunov.

6. FORMULAÇÃO GERAL E FUNÇÃO DE LYAPUNOV

A estabilidade do equilíbrio relativo a perturbações finitas é governada pelo comportamento não linear da estrutura na vizinhança do estado de equilíbrio. Considere-se o sistema das equações:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{y}}_1 &= \dot{\vec{y}}_2 \\ \dot{\vec{y}}_2 &= \vec{f}(\vec{y}_1) - c \vec{y}_2\end{aligned}\quad (6.1)$$

nas quais $\vec{y}_1 = \vec{q}$ e $\vec{y}_2 = \dot{\vec{q}}$ ou seja, com a notação da seção 2

$$\vec{y} = \begin{Bmatrix} \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 \end{Bmatrix}\quad (6.2)$$

\vec{f} é um vetor de força generalizado e c uma matriz de coeficientes de amortecimento. Será adotada a energia do sistema no estado $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$, quando $c=0$, como uma função de Lyapunov:

$$F(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = - \sum_{i=1}^n \int_0^{q_i} f_i(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2} \dot{\vec{q}}^T \dot{\vec{q}}\quad (6.3)$$

onde f_i denota a i -ésima componente do vetor de forças elásticas. Considere-se agora o seguinte conjunto contendo a origem:

$$C_\lambda = \{(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \mid F(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \leq \lambda\}\quad (6.4)$$

na qual $\lambda > 0$. A vizinhança de um estado de equilíbrio instável é definida como o primeiro ponto de instabilidade $(\vec{q}_u, 0)$, no conjunto C_λ , quando λ cresce. Se F_u denota o valor da função de Lyapunov no ponto de equilíbrio instável $(\vec{q}_u, 0)$, isto é:

$$F_u = F(\vec{q}_u, 0)\quad (6.5)$$

Define-se C_u como:

$$C_u = \{(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \mid F(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) < F_u\}\quad (6.6)$$

Em consequência, $F_u - F(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ representa a quantidade de energia que o sistema, no estado $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ deve adquirir para escapar do domínio de atra-

ção do estado de equilíbrio na origem.

O conjunto C_u constitui a base de uma condição suficiente de estabilidade. Um estado de equilíbrio é estável com relação a uma perturbação específica, se o movimento resultante fica confinado ao domínio C_u . Desta maneira a estabilidade, no sentido de Lyapunov, está assegurada se o movimento inicia em C_u , e a energia total ao longo deste movimento não ultrapassa o nível de energia F_u . Esta condição pode ser expressada analiticamente como segue:

$$[\vec{q}(0), \dot{\vec{q}}(0)] \in C_u, \quad (6.7)$$

e

$$F(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) < F_u \quad \sigma \leq t \leq t_d$$

onde t_d denota a duração da perturbação. A quantidade $F_u - F(0,0)$ fornece uma informação sobre o tamanho da região de estabilidade do ponto de equilíbrio na origem. Os conceitos precedentes são ilustrados na Ref. (6) por meio de aplicações a estruturas em treliça.

7. INSTABILIDADE DE SISTEMAS AUTÔNOMOS: CRITÉRIO DOS DIAGRAMAS DE FASE

Foi indicado na seção precedente que um estado de equilíbrio \vec{q}_0 , é representado por um ponto com coordenadas $(\vec{q}_0, 0)$ no espaço de fase. Em geral, para um vetor de carga constante \vec{Q}_0 , podem existir só um, dois, ou mais pontos de equilíbrio. De acordo com os critérios de Lyapunov, qualquer perturbação num estado de equilíbrio resultaria, se o estado for estável, em oscilações de amplitude constante ou decrescente ao redor do mesmo ponto de equilíbrio. Quando há instabilidade, as trajetórias no espaço de fase são *divergentes*, ou contêm no seu interior *dois* ou mais pontos de equilíbrio. Conseqüentemente, a análise da trajetória do movimento no espaço de fase permite estabelecer *uma condição necessária e suficiente de estabilidade*: se o diagrama de fase circunda apenas um ponto de equilíbrio, a estabilidade é assegurada.

Observe-se que, no enfoque estático, o estudo é feito no espaço cargas-deslocamentos, através de soluções da equação (2.1). A existência de dois ou mais pontos de equilíbrio, para um vetor de cargas dado \vec{Q}_0 , implica na não-unicidade da solução da equação (2.12). Precisamente essa falta de unicidade é causa principal das dificuldades usualmente encontradas nas soluções numéricas do problema seguindo o método estático.

Deve-se salientar que o emprego deste critério implica na possibilidade de *integração* das equações de movimento (3.12), seja encontrando a solução exata das mesmas, ou por meio de integração numérica direta (ver apêndice A).

As equações linearizadas (3.9) ou (3.16) só podem ser empregadas no estudo da instabilidade do movimento ao redor de posições de equilíbrio quando existe *só um ponto de equilíbrio*. Com efeito, da retenção na expressão da energia potencial (3,8) de termos quadráticos unicamente, segue a impossibilidade de se ter mais que um ponto de equilíbrio, para qualquer vetor constante de cargas \vec{Q}_0 .

Conseqüentemente, a passagem de um sistema estrutural de um ponto de equilíbrio para outro, conhecido como *flambagem por abolhamento**, por ser um fenômeno comum em cascas ou arcos abatidos, *não pode ser estudada com base nas equações linearizadas*.

8. APLICABILIDADE DAS EQUAÇÕES LINEARIZADAS EM PROBLEMAS DE INSTABILIDADE DINÂMICA

De acordo com a discussão precedente, a existência de um único ponto de equilíbrio constitui a limitação básica das equações linearizadas (3.9) ou (3.16) no estudo da instabilidade do movimento. Porém, as características do movimento resultante de perturbações no estado de equilíbrio podem em numerosas situações práticas, ser determinadas diretamente a partir das equações (3.9) ou (3.16). Com efeito, a equação (3.9) tem soluções da forma:

$$\vec{q}(t) = e^{\lambda_r t} \vec{q}_r \quad (r = 1, \dots, n) \quad (8.1)$$

na qual λ_r é uma constante complexa. A estabilidade da solução depende do sinal da parte real de λ_r . Se todos os autovalores λ_r tiverem parte real negativa o sistema é *assintoticamente estável*. A instabilidade segue da existência de pelo menos um autovalor com parte real positiva. Na prática, a determinação dos autovalores em problemas do tipo:

* *Snapthrough buckling*, na literatura inglesa ou *Durchschlag Beulung* em alemão.

$$\left[\lambda_r^2 M + \lambda_r (G + C) + (K + H) \right] \vec{q}_r = 0 \quad (8.2)$$

é, no caso geral, muito complexa, sendo por essa razão vantajoso o estudo do sistema equivalente:

$$A \vec{y}_r = \beta_r \vec{y}_r \quad (8.3)$$

onde a matriz A é dada pela eq.(3.16). Os $2n$ autovalores β_r da eq.(8.3) apresentam-se em n pares de números complexos conjugados. Se as partes reais de todos os autovalores são negativas, o sistema é estável.

Sistemas dinâmicos assimétricos da forma (3.9) são importantes no estudo de oscilações induzidas por ondas em navios, na análise da estabilidade de veículos rodoviários e ferroviários, e em sistemas circulatórios. A forma simétrica, isto é, com $H = G = 0$, é fundamental em relação às teorias lineares de estabilidade estrutural. Conseqüentemente, serão enunciadas primeiramente resultados aplicáveis a sistemas simétricos.

TEOREMA 4 - Se as matrizes com coeficientes reais na equação:

$$\left[\lambda_r^2 M + \lambda_r C + K \right] \vec{q}_r = 0 \quad (8.4)$$

são simétricas e positivo-definidas, o sistema é assintoticamente estável¹⁰.

Sendo M e K positivas definidas, para se ter estabilidade do sistema, é suficiente que C seja positiva semidefinida. Com efeito, o câmbio na energia total do sistema por unidade de tempo é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x} + \frac{1}{2} x^T K x \right) = - \dot{x}^T C \dot{x} \quad (8.5)$$

então, se C for positiva-semidefinida, a energia inicial do sistema não pode aumentar. As condições que C deve satisfazer para que o estado trivial de equilíbrio seja assintoticamente estável foram estudadas por Moran¹¹ e por Walker e Schmitendorf¹².

TEOREMA 5 - São condições necessárias e suficientes para que o sistema (8.4) seja assintoticamente estável, que nenhum dos vetores modais de

$$\left[\lambda_r^2 M + K \right] \vec{q}_r = 0 \quad (8.6)$$

fique no espaço nulo de C , isto é¹¹:

$$C \vec{q}_r \neq 0 \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

A verificação da estabilidade assintótica por meio do resultado precedente, requer a determinação dos n autovetores do sistema não-amortecido, e a posterior avaliação do espaço nulo de C . Para sistemas de grandes dimensões, essa alternativa pode ser preferível à determinação dos $2n$ autovalores da eq.(8.3), mas também não é uma tarefa trivial. O seguinte teorema constitui uma terceira opção¹²:

TEOREMA 6 - Se M e K são positivas definidas, enquanto C é positiva semi-definida, o estado trivial de equilíbrio do sistema (8.4) é assintoticamente estável, se e somente se, a matriz de dimensões $n^2 \times n$:

$$\begin{bmatrix} C \\ C (M^{-1} K) \\ \vdots \\ C (M^{-1} K)^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

tem rango n .

O teorema 5 é também válido para sistemas giroscópicos, de acordo ao seguinte resultado¹¹:

TEOREMA 7 - Se M e K são positivas definidas, então o estado trivial de equilíbrio do sistema:

$$\left[\lambda_r^2 M + \lambda_r (C + K) \right] \vec{q}_r = 0 \quad (8.8)$$

é assintoticamente estável se nenhum dos n autovetores do sistema não-amortecido:

$$\left[\lambda_r^2 M + \lambda_r C + K \right] \vec{q}_r = 0 \quad (8.9)$$

fica no espaço nulo de C "

Inman¹³ demonstra que muitos problemas assimétricos, da forma (8.2), podem ser transformados em sistemas simétricos equivalentes. O sistema simétrico é dito equivalente se a transformação preserva os autovalores do sistema original. Esse tipo de transformação foi empregado anteriormente por Huseyin & Leopholtz¹⁴ para o caso $C = C = 0$. Uma matriz B é dita *simetrizável* se, e somente se, ela pode ser expressada como o produto de duas matrizes simétricas, uma das quais é positiva definida. Inman¹³ considera sistemas nos quais as matrizes $M^{-1}(C + C)$ e $M^{-1}(K + H)$ são simetrizáveis, em termos da seguinte factorização:

$$\begin{aligned} M^{-1}(C + C) &= P_1 P_2 \\ M^{-1}(K + H) &= R_1 R_2 \end{aligned} \tag{8.10}$$

nas quais P_1 e R_1 são simétricas e positivas definidas, enquanto P_2 e R_2 são simétricas. Sobre essa base, podem-se demonstrar os seguintes resultados:

TEOREMA 8 - Se $C = \alpha M + \beta K$ e $C = \beta H$, onde α e β são constantes reais, então a eq. (3.9) pode ser transformada num sistema simétrico através de uma transformação que preserva os autovalores.

TEOREMA 9 - O problema de autovalores da eq. (3.9) é similar a um problema de autovalores simétrico se, e somente se, existe pelo menos uma factorização da forma (8.10), tal que $P_1 = R_1$.

TEOREMA 10 - Se $P_1 = R_1$ e os autovalores de $M^{-1}(C + C)$ e $M^{-1}(K + H)$ são reais e positivos, então o estado trivial de equilíbrio de (3.9) é assintoticamente estável.

TEOREMA 11 - Se $P_1 = R_1$ e se os autovalores de $M^{-1}(K + H)$ são todos reais e negativos, então o equilíbrio de (3.9) é instável.

9. EXEMPLOS DE PROBLEMAS LINEARIZÁVEIS

• Sistemas estruturais submetidos a cargas gravitacionais que não produzem momentos primários.

Neste caso $C = H = 0$, enquanto a matriz de rigidez consiste

numa matriz de coeficientes elásticos K e numa matriz geométrica*, ou de efeitos de segunda ordem K_1 , cujos coeficientes dependem do nível de cargas gravitacionais P , através de um parâmetro α . Admitindo que $C = 0$, tem-se então¹⁸, da eq. (8.4),

$$\left[\lambda_r^2 M + (K - \alpha K_1) \right] \vec{q}_r = 0 \quad (9.1)$$

sendo M positiva definida, uma condição suficiente de estabilidade, de acordo com o Teorema 4, é que $(K - \alpha K_1)$ também seja positiva definida. Conseqüentemente, é suficiente estudar o problema estático:

$$K \vec{q}_r = \alpha K_1 \vec{q}_r \quad (9.2)$$

Com efeito, se α denota o menor autovalor da eq. (9.2), verifica-se através do quociente de Raleigh, para qualquer \vec{x} , que:

$$\alpha_{\min} \leq \frac{\vec{x}^T K \vec{x}}{\vec{x}^T K_1 \vec{x}} \quad (9.3)$$

na qual o sinal de igualdade vale quando \vec{x} coincide com o autovetor \vec{q}_r , correspondente a α_{\min} . Segue então que $(K - \alpha K_1)$ é positiva definida só se $\alpha < \alpha_{\min}$. A introdução de amortecimento de Raleigh não modifica os resultados precedentes, enquanto C for positiva-semidefinida.

• Instabilidade aerodinâmica por galope de estruturas com apoios fixos.

Também neste caso ter-se-ia $C = H = 0$. Pode-se demonstrar que, quando a estrutura fica submersa num fluxo de ar, a matriz C toma a forma:

$$C = C_0 - \alpha C_1 \quad (9.4)$$

na qual C_0 é uma matriz positiva definida que contém os coeficientes de amortecimento de Raleigh. A matriz C_1 depende das características aerodinâmicas da estrutura, sendo o parâmetro α proporcional à velocidade média

* Sob certas condições, a distribuição dos esforços axiais ou de membrana na estrutura pode ser determinada 'a priori', isto é, sem necessidade de resolver a equação não homogênea. Nesses casos a matriz K_1 pode ser obtida diretamente.

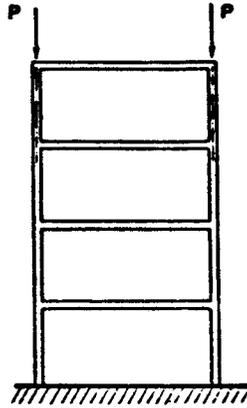


Figura 9.1 - Exemplo de problema de instabilidade do tipo de Euler.

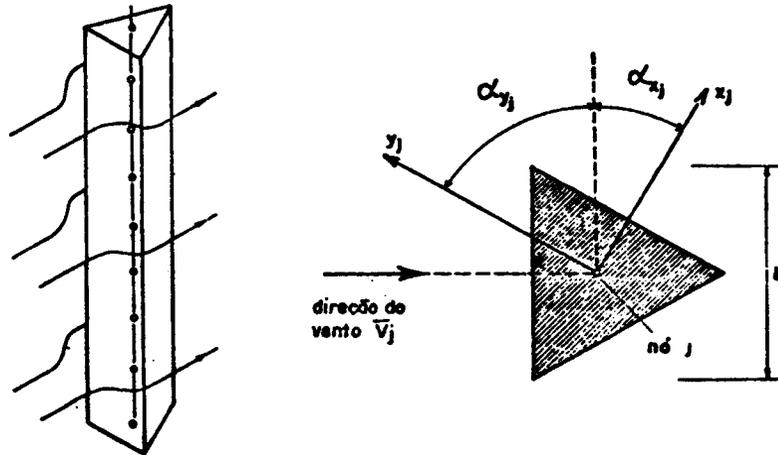


Figura 9.2 - Exemplo de estrutura com instabilidade aerodinâmica potencial.

do fluxo. Por exemplo, admita-se que a estrutura seja representada empregando elementos de barra 3D com três graus de liberdade de deslocamento e três de giro em cada nó j , referidos a um sistema local de coordenadas xyz . Seja agora \bar{V}_j a componente da velocidade do vento *normal* ao eixo da barra ~~em j~~ . Se o campo de velocidades do fluxo for não-homogêneo, então \bar{V}_j será função das coordenadas nodais e da orientação da barra, sendo dado por:

$$\bar{V}_j = \bar{V}_0 \phi_j \quad (9.5)$$

na qual \bar{V}_0 é uma velocidade de referência e ϕ_j um coeficiente adimensional. Com a notação da Fig. 9.2, verifica-se que as forças linearizadas induzidas pelo movimento da estrutura, correspondentes às coordenadas locais são da forma:

$$\begin{aligned} X_j &= \frac{1}{2} \rho \bar{V}_0 \phi_j A_j C_{1j} \cos \alpha_{xj} (\dot{x}_j \cos \alpha_{xj} + \dot{y}_j \cos \alpha_{yj}) \\ Y_j &= \frac{1}{2} \rho \bar{V}_0 \phi_j A_j C_{1j} \cos \alpha_{yj} (\dot{x}_j \cos \alpha_{xj} + \dot{y}_j \cos \alpha_{yj}) \\ Z_j &= 0 \\ M_{xj} &= M_{yj} = M_{zj} = 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

onde ρ denota a massa específica do ar e A_j uma área de referência igual a $b \ell/2$, sendo ℓ o comprimento do elemento. C_{1j} é um coeficiente aerodinâmico que depende da forma da seção transversal. Seções que apresentam, para alguma orientação do vento, coeficientes C_{1j} positivos, por exemplo as seções quadrada, retangular, triangular, elíptica, em L, etc., denominam-se seções aerodinâmicas instáveis. As forças dadas pelas eqs.(9.6), caracterizam as oscilações por *galope*, responsáveis por problemas de instabilidade em numerosos tipos de estruturas. Em geral, os momentos externos não são nulos, dependendo também das velocidades rotacionais $\dot{\theta}_2$, $\dot{\theta}_x$ e $\dot{\theta}_y$. Quando sô estes últimos termos são diferentes de zero, fala-se em instabilidade por *drapejamento*. Nas situações mais complexas, há acoplamento entre os diferentes tipos de instabilidade aerodinâmica. A introdução das expressões para as forças nas equações globais de equilíbrio:

$$M \ddot{q} + C_0 \dot{q} + K q = \bar{Q}(t) \quad (9.7)$$

conduz à

$$M \ddot{\bar{q}} + C_0 \dot{\bar{q}} + K \bar{q} = \frac{1}{2} \rho \bar{V}_0 C_1 \dot{\bar{q}} \quad (9.8)$$

de onde resulta, com $\alpha = \frac{1}{2} \rho \bar{V}_0$, a equação:

$$M \ddot{\bar{q}} + (C_0 - \alpha C_1) \dot{\bar{q}} + K \bar{q} = 0 \quad (9.10)$$

Para $\alpha = 0$ o sistema (9.10) é estável, em virtude das hipóteses usuais referentes a M , C_0 e K . Interessa agora determinar o valor de α a partir do qual o estado trivial de equilíbrio é instável.

Um enfoque aplicável no caso geral, consiste na obtenção dos autovalores complexos β_n da eq. (8.3), na qual A vem dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1} (C_0 - C_1) & \vdots & -M^{-1} K \\ \dots & \dots & \dots \\ I & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad (9.11)$$

No caso de sistemas de grande dimensões, esse processo pode exigir considerável tempo de computação. Porém, na prática a verificação da estabilidade pode as vezes ficar restringida aos primeiros modos de vibração.

Denardim 'et al'⁸ aplicaram o método de iteração direta para calcular os autovalores de (8.3), o qual resulta particularmente vantajoso na situação mencionada. O emprego dos Teoremas 5 ou 6 também constituem alternativas interessantes no presente problema.

Observe-se que, numa torre com dois planos de simetria e o vento orientado na direção de um dos planos de simetria, por exemplo Ox , então $\cos \alpha_{xj} = 0$ e $\cos \alpha_{yj} = 1$ para todo j . A matriz C_1 resulta então diagonal. Se a matriz C_0 for também diagonal, com coeficientes diagonais C_{0j} , é condição suficiente de instabilidade:

$$C_{0j} < \frac{1}{2} \rho \bar{V}_0 \phi_j A_j C_{1j} \quad \text{para qualquer } j. \quad (9.12)$$

O resultado precedente é imediatamente aplicável a sistemas com matriz de massa diagonal, e matriz de amortecimento proporcional a M :

$$\bar{V}_0 > \frac{4 C_n \omega_n m_j}{\rho \phi_j A_j C_{1j}} \quad (9.13)$$

onde C_n denota a razão de amortecimento crítico no modo de vibração n , cuja frequência não amortecida, em rad/s, é ω_n .

• Inestabilidade estrutural sob fluxo supersônico.

Considere-se que uma placa se desloca com velocidade V_0 em relação ao ar em contato com a mesma. O problema apresenta-se, por exemplo, nas placas de revestimento da fuselagem de uma aeronave. Denotando com w ao deslocamento normal à superfície média da placa, as pressões p sobre a mesma produzidas pela interação fluido-estrutura são dadas aproximadamente pela equação^{15,16}:

$$p = B \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (9.14)$$

na qual B representa uma constante, enquanto U denota a velocidade relativa entre o fluxo e a placa. A equação diferencial de uma placa de pouca espessura, com referência a um sistema retangular de coordenadas \bar{e} :

$$D \nabla^4 w + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p \quad (9.15)$$

onde $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ e c é um coeficiente de amortecimento. Introduzindo a eq. (9.14) em (9.15) obtém-se:

$$D \nabla^4 w + (c - B_0) \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - BU_0 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (9.16)$$

Numa representação discreta por meio de elementos finitos da estrutura em consideração, ter-se-ia o sistema:

$$M \ddot{\vec{q}} + (C - C_B) \dot{\vec{q}} + (K - \alpha H) \vec{q} = 0 \quad (9.17)$$

no qual H é uma matriz antisimétrica e α um parâmetro proporcional a U . O problema parece então análogo ao problema de perda de estabilidade por bifurcação do estado de equilíbrio, exceto que a matriz H é agora antisimétrica. Conseqüentemente, o Teorema 4 não é mais aplicável, sendo necessário determinar os autovalores complexos associados à eq. (8.2) ou (8.3).

10. APLICAÇÃO DOS DIAGRAMAS DE FASE A PROBLEMAS NÃO LINEARES

Já foi estabelecido que quando existem duas ou mais configurações de equilíbrio, as equações linearizadas não são aplicáveis na verificação da estabilidade do sistema. Existem numerosas estruturas que apresentam essa característica, dentre as quais destacam-se pela sua importância prática, os arcos abatidos, as cúpulas e cascas abatidas, e as treliças espaciais.

O emprego dos critérios de Lyapunov no caso de uma treliça plana simples é discutido por Freitas Paixão⁶ e por Riera & Freitas Paixão¹⁷. O enfoque não tem sido até agora implementado em relação a sistemas com numerosos graus de liberdade, nos quais a única alternativa atualmente viável é a integração numérica direta das equações não lineares do movimento¹⁷. As dificuldades inerentes na mesma serão ilustradas por meio de um exemplo. Considere-se a treliça espacial com as características geométricas indicadas na Fig. 10.1. Todas as barras tem rigidez axial $EA =$

O modelo dinâmico admite massas concentradas nos nós da estrutura, cada um com três graus de liberdade, sendo que os nós 1, 2, 5, 9, 12 e 13 apresentam restrições nodais totais. Foi empregado um procedimento de integração explícito (diferenças finitas centrais) a nível de elemento, não sendo em consequência necessária a montagem da matriz de rigidez global. O esquema permite também a atualização das coordenadas nodais a cada passo de integração, sendo igualmente possível a obtenção de soluções aproximadas para solicitações estáticas. Com efeito, na Fig. 10.2 mostra-se o deslocamento vertical do nó central, devido a uma carga vertical concentrada aplicada no mesmo, calculado por meio de integração numérica direta, juntamente com a solução estática de Jagannath 'et al'⁴. Apesar de não ter sido introduzido amortecimento no modelo numérico, a aproximação é satisfatória.

A definição de excitações críticas pode ser conseguida utilizando diagramas de fase. São indicados na Fig. 10.3 os diagramas correspondentes a impulsos verticais aplicados no nó central iguais a $I = 15$ e 16.5 kgm/s . O primeiro, ligeiramente inferior ao impulso crítico, resulta num diagrama que circunda somente o ponto de equilíbrio A. O segundo, pelo contrário, circunda os dois pontos de equilíbrio possíveis, A e B. A perda de estabilidade acontece de maneira brusca, designando-se o fenômeno como *flambagem por abolhamento*. Quando é considerado amortecimento, presente em qualquer sistema real, os diagramas de fase não são fechados, como

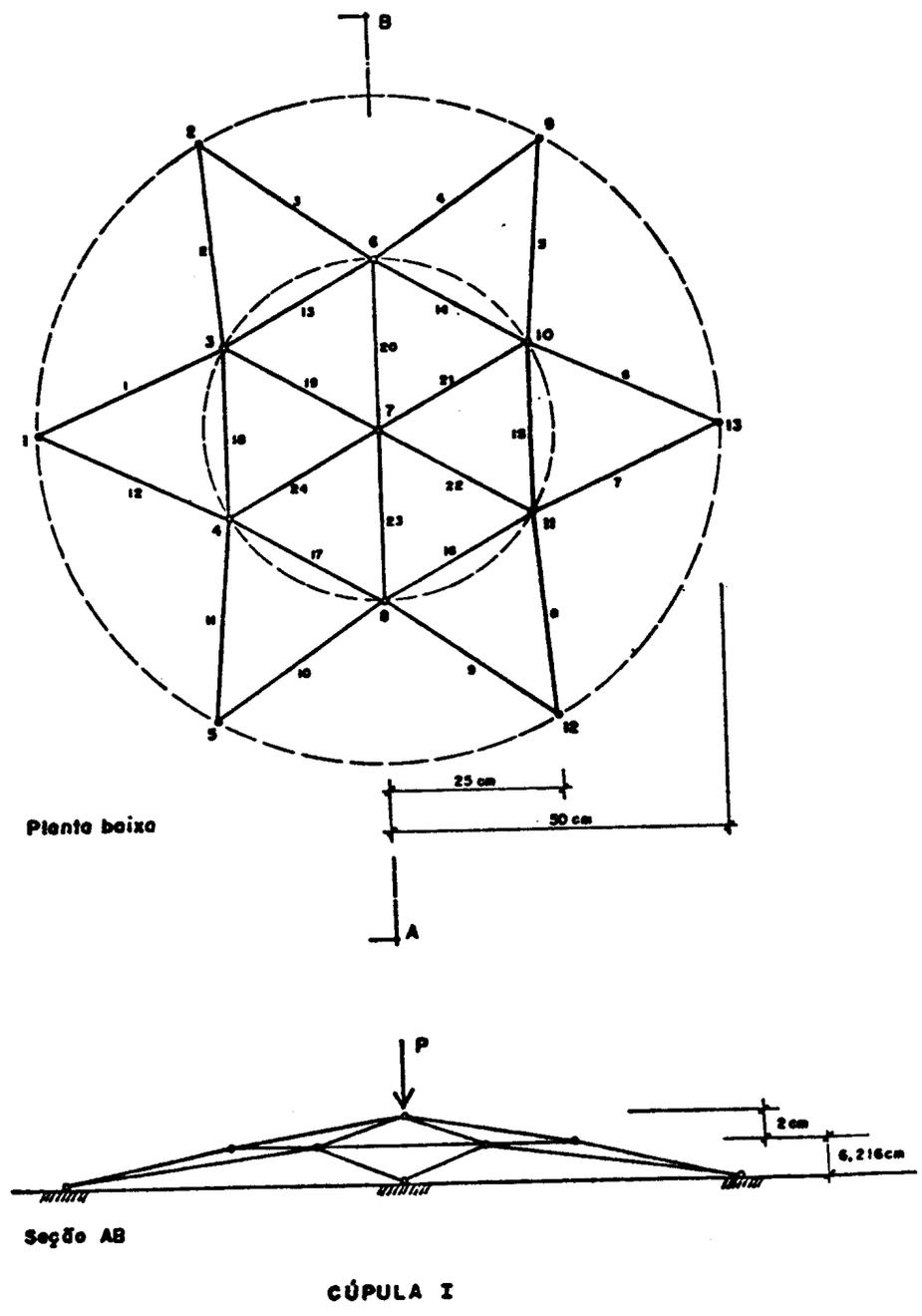


Figura 10.1 - Características geométricas da estrutura.

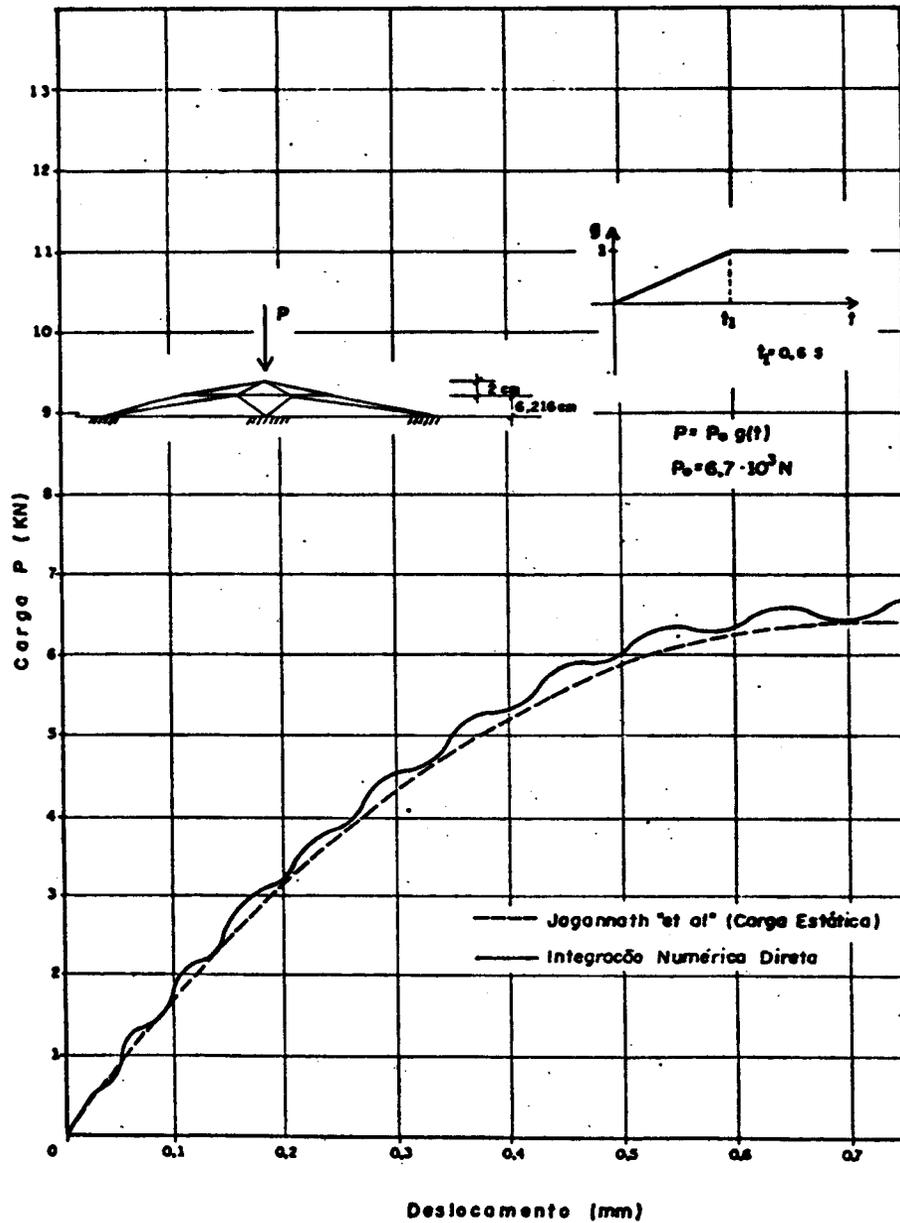


Figura 10.2 - Resposta pseudo estática da cúpula treliçada a uma carga vertical.

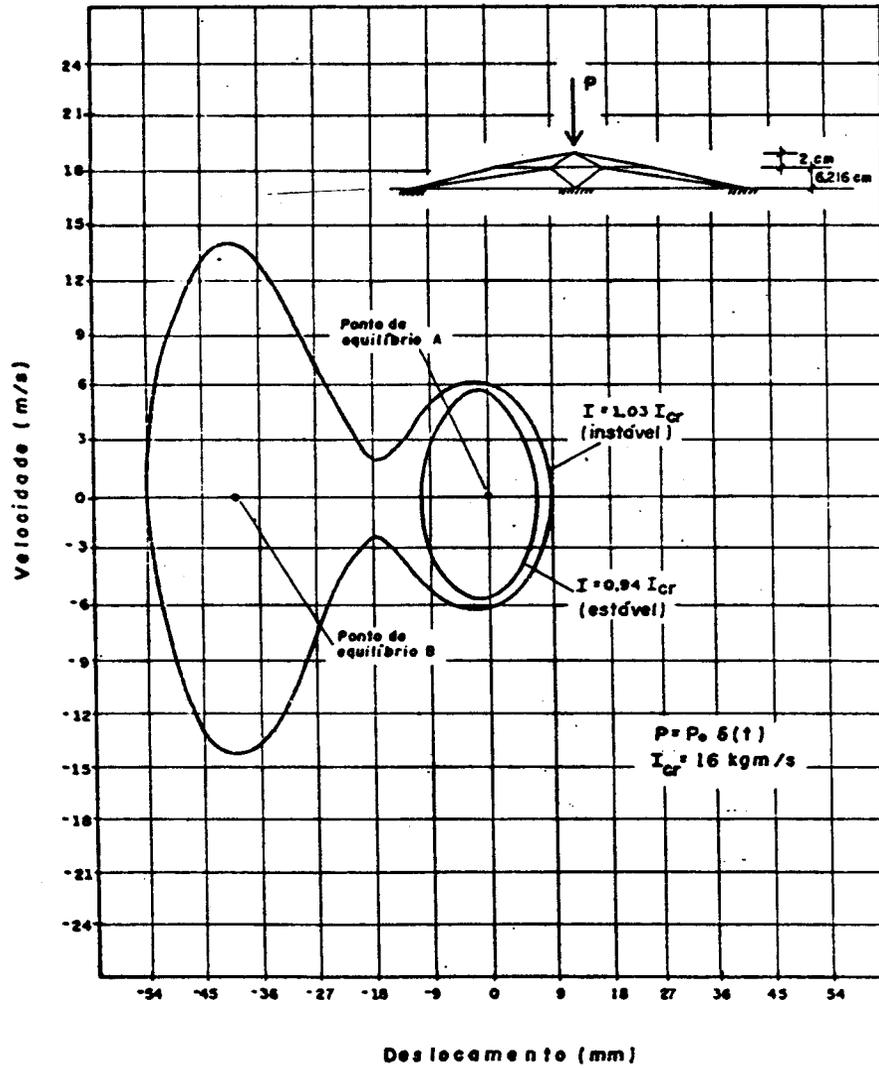


Figura 10.3 - Diagramas de fase para cargas impulsivas.

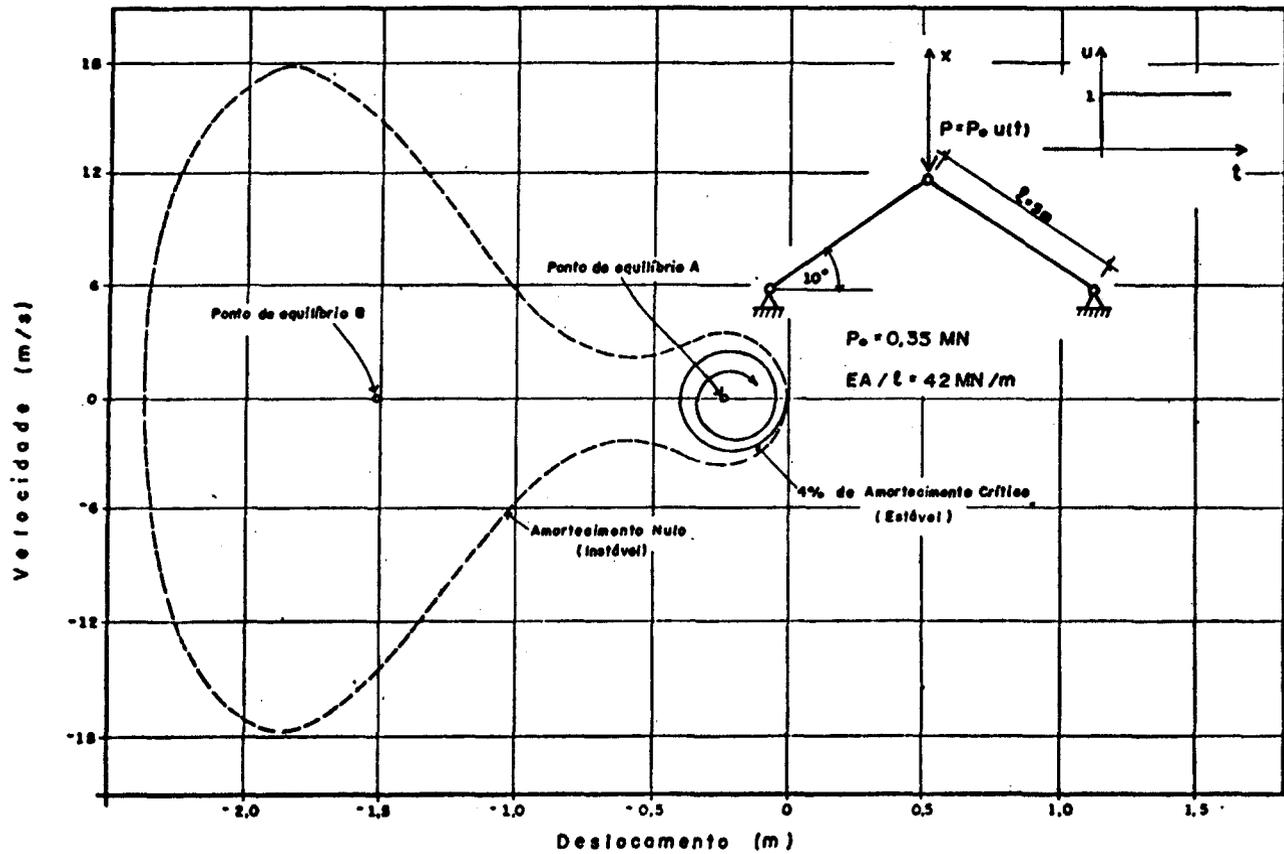


Figura 10.4 - Diagramas de fase de treliça plana sob carga passo unitário, com e sem amortecimento.

ilustra a Fig. 10.4 para uma treliça plana simples sob a ação de uma carga passo unitário. Para uma amplitude de carga $P_0 = 0.35$ MN, o movimento resultante é instável, verificando-se que 4% de amortecimento crítico estabilizam o sistema, que tende, para $t \rightarrow \infty$, ao ponto de equilíbrio A.

Observe-se que a avaliação da estabilidade exige a inspeção dos diagramas de fase de todas as coordenadas generalizadas, o que pode constituir uma tarefa muito difícil no caso de sistemas de grandes dimensões. Usualmente são escolhidas coordenadas de "controle", resultando então condições necessárias mas não suficientes de estabilidade.

11. CONCLUSÕES

Foram apresentados os princípios básicos relativos à instabilidade do movimento ao redor de posições de equilíbrio em sistemas estruturais discretos e autônomos. Particular ênfase foi dada à aplicação das equações linearizadas as quais permitiram, com pequenas alterações nos programas de computação existentes, a solução de numerosos problemas de instabilidade de interesse prático. Mostrou-se também o emprego dos diagramas de fase em problemas não-lineares, em relação a soluções numéricas das equações de movimento. Em ambos os casos, tentou-se relacionar os resultados teóricos a aplicações em problemas estruturais.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio parcial da FINEP e do CNPq para a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. L.Meirovitch: "Computational methods in structural dynamics", Sijthoff a Nordhoff, Netherlands, 1980.
2. C.L.Dym: "Stability theory and its applications to structural mechanics", Noordhoff Int. Publ., Loyden, Netherlands, 1974.
3. V.V.Bolotin: "On concepts of stability in structural mechanics", selected papers from a Conference on Stability Problems in Structural Mechanics, edited by V.V. Bolotin 'el al', Moscow, 1965.
4. D.S.Jagannathan; H.J.Epstein; P.Cristiano: "Nonlinear analysis of reticulated space trusses", J. of the Structural Division, ASCE, Proceedings, vol. 101, ST12, Dec. 1975, pp. 2641-2658.
5. W.Nachbar and N.C.Huang: "Dynamic snap-through of simple visco-elastic trusses", Quarterly of Applied Mathematics, vol. XXV, nº 1, April 1967, pp. 65-79.
6. R.F.Paixão: "Instabilidade dinâmica de estruturas espaciais", Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Escola de Engenharia da UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 1984.
7. R.F.Paixão; J.D.Riera: "Verificação numérica da estabilidade de treliças espaciais sob cargas estáticas ou dinâmicas", Congresso Latinoamericano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Salvador, Bahia, novembro de 1984.
8. M.L.Denardin, J.A.do Nascimento e J.D.Riera: "Determinação da velocidade crítica por galope de estruturas com amortecimento arbitrário", Anais do IV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil, dezembro de 1977. vol. A, 299-310.
9. R.E.D.Bishop and W.G.Price: "An investigation into the linear theory of ship response to waves", J. of Sound and Vibration, vol. 63, nº 3, 1979, p.353-363.
10. K.Huseyin: "Vibrations and stability of multiple parameter systems", Noordhoff, The Netherlands, 1978.
11. T.S.Moran: "A simple alternative to the routh-hurwitz criterion for symmetric systems", Transactions of the ASME, J. of Applied Mechanics, vol. 37, 1970, p.1168-1170.

12. J.A.Walker and W.E.Schmitendorf: "A simple test for Asymptotic stability in partially dissipative symmetric systems", Transactions of the ASME, J. of Applied Mechanics, vol.40, 1973. p.1120-1121.
13. D.J.Inman: "Dynamics of Asymmetric Nonconservative Systems", Transactions ASME, J. of Applied Mechanics, vol. 50, 1983, p.199-203.
14. K.Huseyin and H.H.E.Leipholtz: "Divergence instability of multiple-parameter circulatory systems", Quarterly of Applied Math., vol.31, nº 2, 1973, p.185-197.
15. E.Ashley and G.Zartarian: "Piston Theory - A New Aerodynamic Tool for Aeroelastician", J. Aeronautical Science, vol. 23, 1956, p.1109-1118.
16. A.A.Ilyushin: "Law of Plane Sections at high supersonic velocities", PPM Appl. Math. Mech., vol.20, nº 6, 1956.
17. J.D.Riera e R.F.Paixão: "Instabilidade dinâmica de sistemas autônomos discretos", Caderno Técnico CT Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 1985.
18. M.I.L. Prates de Lima: "Análise dos modos de vibração e de flambagem de estruturas submetidas a forças de membrana", Dissertação de Mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, Brasil, 1978.