

EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO
A LA FRACTOMECAICA DEL HORMIGON

Alejandra M. Alvaredo

Departamento de Construcciones. INTI.
Casilla de Correo 157. (1650) San Martin.
Argentina.

RESUMEN

En esta comunicaci3n se describen los fundamentos b3sicos de un enfoque fractomec3nico desarrollado para el hormig3n: el "modelo de la fisura ficticia". Este modelo pretende simular el comportamiento de piezas de ese material sometidas a sollicitaciones de tracci3n, teniendo en cuenta el "strain-softening" observado en ensayos de tracci3n directa con desplazamiento controlado. Es posible seguir la propagaci3n de una fisura a lo largo de una trayectoria predeterminada por medio de c3lculos en los que se utiliza el m3todo de los elementos finitos.

ABSTRACT

In this communication, the theoretical background and the computer implementation of a fracture mechanics approach applied to concrete are described. The "Fictitious Crack Model" herein presented simulates the behaviour of concrete members subjected to tensile stresses, properly accounting for the "strain-softening" observed in direct tension tests under controlled displacement. This model makes it possible to follow the crack propagation along a prescribed crack path by means of linear finite element calculations.

INTRODUCCION

La fractomecánica describe la interrelación entre tensiones, energía de deformación y crecimiento de una fisura existente y constituye una herramienta útil para explicar cuantitativamente las características de propagación de una dada fisura en un cierto medio.

Esta teoría fue formulada inicialmente por Griffith [1] en 1920 quien, ensayando barras de vidrio a tracción directa, observó que la resistencia a tracción así obtenida era casi cien veces menor que la resistencia teórica del material hallada considerando las fuerzas de interacción atómica. Griffith atribuyó esta diferencia a la inevitable existencia de fallas y fisuras en toda muestra de material sometida a ensayo y, aplicando consideraciones energéticas, pudo expresar la relación entre la resistencia a tracción y el tamaño de la fisura de la siguiente forma:

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi a}} \quad \text{para estado plano de tensiones} \quad (1)$$

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi a (1-\nu^2)}} \quad \text{para estado plano de deformaciones} \quad (2)$$

donde:

- σ_F : resistencia a la tracción
- E : módulo de elasticidad
- ν : coeficiente de Poisson
- γ : energía de superficie
- a : longitud de la fisura

Las ecuaciones (1) y (2) forman la base de sustentación de la fractomecánica lineal, que provee un medio de predecir tensiones de fractura de estructuras compuestas por un material homogéneo, isótropo y elástico, conteniendo fallas o fisuras agudas de tamaño y ubicación conocidos. Es aplicable fundamentalmente a materiales frágiles para los cuales la región inelástica alrededor del extremo de la fisura es pequeña comparada con las dimensiones de la falla y del cuerpo.

Para materiales dúctiles, Irwin [2] en 1948 y Orowan [3] en 1950 hallaron experimentalmente que:

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{E \cdot \text{const.}}{\pi a}} \quad (3)$$

Ellos encontraron que, sin embargo, la constante involucrada para estos materiales era mucho mayor que 2γ (energía de superficie), aunque independiente de la

longitud inicial de la fisura. Sugirieron, entonces, que la liberación de energía ocurrida durante la propagación de la fisura se disipaba en gran parte en la fluencia plástica del material alrededor de ella, pero que las dimensiones de la zona en fluencia continuaban siendo muy pequeñas en relación al tamaño de la fisura o de la pieza ensayada. Por lo tanto, podía utilizarse fractomecánica lineal para estudiar materiales dúctiles, incluyendo solamente en las ecuaciones (1) y (2) una constante mayor que la energía de superficie:

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{E(2\gamma + \gamma_p)}{\pi a}} \quad (4)$$

donde:

γ_p : energía consumida en el trabajo plástico necesario para producir propagación inestable

En 1961, Kaplan [4] publica el primer trabajo de aplicación de conceptos fractomecánicos al hormigón. Desde entonces, muchos han sido los intentos de utilizar para el hormigón enfoques desarrollados para otros materiales, ya que resulta obvia la importancia de predecir la formación y el comportamiento de fisuras en estructuras, y de evaluar su influencia en la seguridad y las condiciones de servicio de las mismas. Estos intentos fracasaron al no tener debidamente en cuenta las características particulares de la fractura del hormigón. La mecánica de fractura aplicada a este material debe ser capaz de considerar:

- la formación de fisuras en elementos estructurales que no están previamente entallados o fisurados.
- * el crecimiento de una fisura hasta una dimensión del orden del de la pieza en estudio.
- la existencia de una zona de microfisuración en los alrededores de la verdadera fisura, que impide definir con precisión tanto la ubicación del extremo de la fisura como la longitud de la misma.
- tal como se verá en el punto siguiente, la mayor parte de la energía absorbida en la fisuración es disipada en la rama descendente del diagrama $\sigma - \Delta l$, es decir, cuando el material no puede ser considerado como elástico lineal.
- la fisuración no está acompañada de ninguna contracción lateral importante, no dependiendo los resultados de ensayo del ancho de la pieza y resultando despreciable la diferencia entre estados planos de tensión y de deformación.

Por todas estas razones es que se arriba a la necesidad de desarrollar criterios fractomecánicos de particular aplicación al hormigón.

COMPORTAMIENTO DEL HORMIGON EN UN ENSAYO DE TRACCION DIRECTA

Es posible realizar ensayos estables de tracción directa de probetas de hormigón si se dispone de una máquina de ensayo suficientemente rígida; en particular, si el desplazamiento aplicado por la máquina de ensayo puede controlarse, podrá obtenerse la curva tensión-deformación completa, incluyendo la rama descendente o "strain-softening".

Supongamos que una probeta de longitud $4l$ (Fig. 1.a) es sometida a esfuerzos de tracción, y que en ella se miden las deformaciones con los extensómetros A, de longitud $4l$, y B, C, D, y E, de longitud l [5]. Antes de la rotura final de la pieza se formará en algún tramo de ella (por ejemplo, en el comprendido por el extensómetro D) una zona de fractura, cuyo daño creciente origina una disminución de tensión en esa zona y, por lo tanto, en toda la probeta. Al decrecer la tensión, el material fuera de la zona de fractura se descarga, quedando dicha zona confinada al tramo en el que se originó. En un material completamente homogéneo, el ancho de la zona de fractura tiende a cero, pero en hormigón este ancho puede considerarse del orden del tamaño máximo del agregado.

En el mismo ensayo pueden obtenerse las curvas $\sigma - \Delta l$ indicadas en las Figs. 1.b y 1.c. Si consideramos al material homogéneo macroscópicamente, las curvas de los extensómetros B, C, D y E son iguales a tensión creciente. Al desarrollarse la zona de fractura los tramos B, C y E se descargan mientras que en D se originan desplazamientos adicionales w . En la rama descendente del diagrama $\sigma - \Delta l$, los extensómetros indican lo siguiente:

$$\text{para B, C y E: } \Delta l = \epsilon_0 \cdot l \quad ; \quad \epsilon_m = \epsilon_0 \quad (5.a)$$

$$\text{para D: } \Delta l = \epsilon_0 \cdot l + w \quad ; \quad \epsilon_m = \epsilon_0 + w/l \quad (5.b)$$

$$\text{para A: } \Delta l_A = \epsilon_0 \cdot 4l + w \quad ; \quad \epsilon_m = \epsilon_0 + w/4l \quad (5.c)$$

donde:

ϵ_0 : deformación del material fuera de la zona de fractura

ϵ_m : deformación media de la probeta

w es cero antes de alcanzarse la resistencia a tracción f_t y entonces ϵ_m es independiente de la longitud del extensómetro en la rama ascendente del diagrama $\sigma - \epsilon$. Sin embargo, luego del máximo del diagrama, el desplazamiento adicional de la zona de fractura afecta la deformación media y la curva $\sigma - \epsilon$ deja de ser una propiedad de todo el material, dependiendo en cambio del

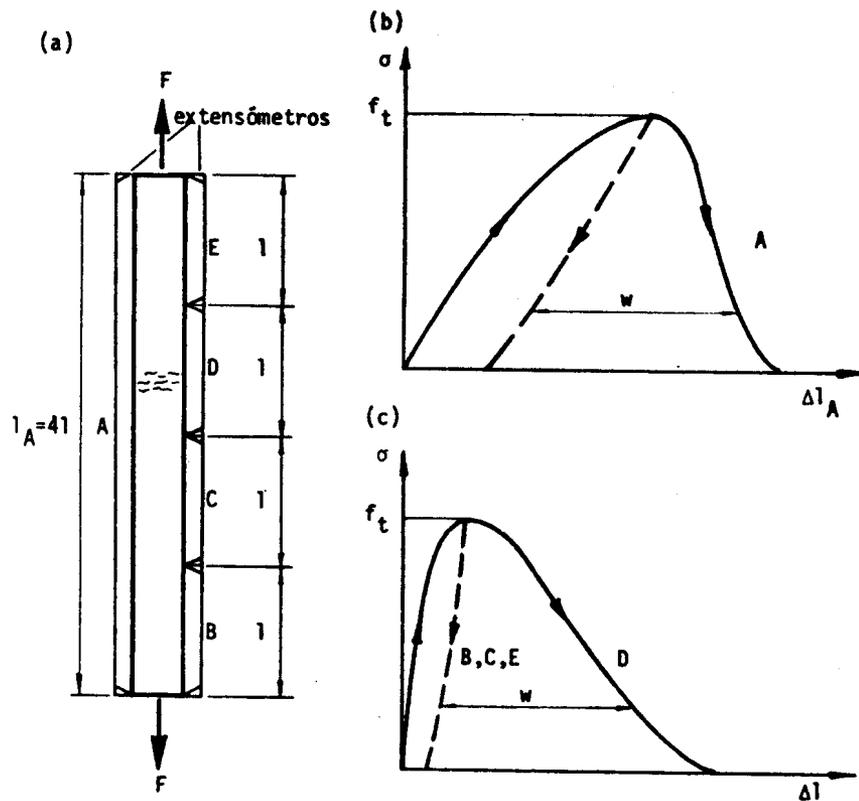


Fig. 1 Ensayo de tracción directa con medición de elongaciones

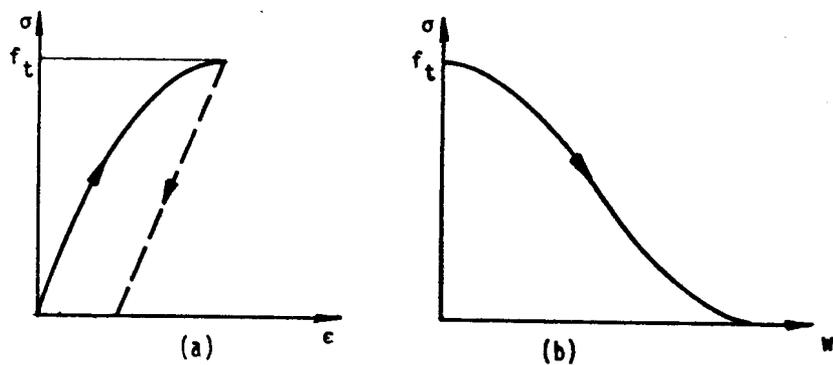


Fig. 2 a Relación tensión-deformación para el material fuera de la zona de fractura
b Relación tensión-desplazamiento para la zona de fractura

extensómetro considerado (ecuaciones 5.a ,5.b y 5.c); este fenómeno también se presenta en el ensayo de aceros a partir del comienzo de la estricción. Resulta entonces conveniente utilizar dos relaciones: una, entre la tensión y la deformación, para el material fuera de la zona de fractura (Fig. 2.a); y otra, entre la tensión y el desplazamiento adicional de la zona de fractura (Fig. 2.b).

Desde un punto de vista fractomecánico, es necesario considerar la disipación de energía asociada a la fractura. En un ensayo de tracción directa, la absorción total de energía es igual al área debajo de la curva $\sigma - \Delta l$ para toda la probeta (Fig. 3):

$$W = \int F.d \Delta l = A. \int \sigma (l.d \epsilon + dw) \quad (6.a)$$

$$W = A.l \int \sigma.d \epsilon + A \int \sigma.dw \quad (6.b)$$

El primer término de (6.b) está vinculado al área bajo la curva $\sigma - \epsilon$, mientras que el segundo lo está al área bajo la curva $\sigma - w$. Como puede observarse en la Fig. 3, para el hormigón, la energía absorbida está fundamentalmente asociada a la curva $\sigma - w$, es decir, a la rama descendente del diagrama $\sigma - \Delta l$, donde el material no puede ser considerado elástico lineal.

Despreciando el primer término en (6.b), la energía absorbida en la zona de fractura es:

$$W = A. \int \sigma.dw = A.G_F \quad (7)$$

donde:

A : área transversal de la probeta

G_F : energía de fractura por unidad de área

El enfoque fractomecánico que se presenta a continuación tiene en cuenta el comportamiento fenomenológico del hormigón, observado en ensayos de tracción directa: la curva $\sigma - \epsilon$ deja de ser una propiedad del material cuando la fisuración comienza; la mayor parte de la energía de fractura es disipada luego de la carga máxima. El modelo considera que G_F (energía de fractura/unidad de área) es una propiedad del material.

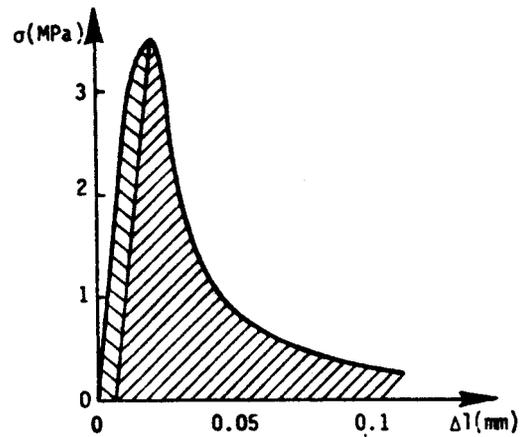


Fig. 3 Curva tensión-elongación típica del hormigón: la energía absorbida está asociada fundamentalmente a la rama descendente

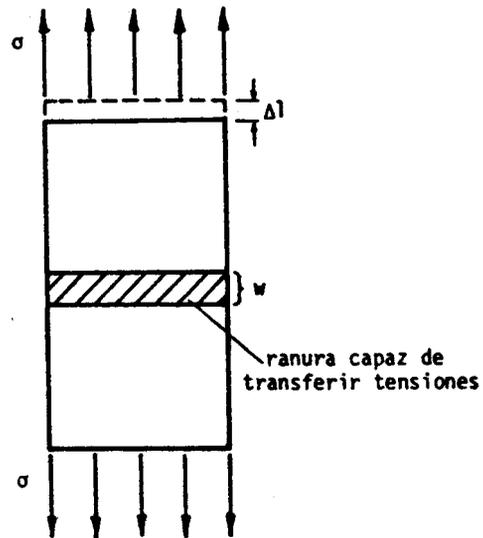


Fig. 4 Modelo de un ensayo de tracción directa. La zona de fractura se reemplaza por una ranura cuya capacidad portante depende de su abertura w

MODELO DE LA FISURA FICTICIA

GENERALIDADES

Este modelo se describe detalladamente en [6]. Para el caso del ensayo de tracción directa, se reemplaza la zona de fractura por un ranura o hendidura (Fig. 4) capaz de transferir tensiones; la capacidad portante de la ranura depende de su abertura w .

En general, cuando se carga una probeta entallada cualquiera de un material elástico lineal, la zona de fractura frente a la entalla se encuentra también sometida a un campo de tensiones de tracción, cuyas propiedades son similares a las observadas en el ensayo de tracción directa. Esto implica que es posible aproximar también este comportamiento por medio de una fisura capaz de transferir tensiones.

Como ésta no es una fisura real sino simplemente una que sirve como modelo de análisis, se hace referencia a este modelo como "modelo de la fisura ficticia". Está basado en las siguientes hipótesis:

- la zona de fractura comienza a desarrollarse en un punto en el que la máxima tensión principal alcanza la resistencia a tracción del material.
- la zona de fractura es perpendicular a la máxima tensión principal.
- el material en la zona de fractura se encuentra parcialmente dañado pero puede transferir tensiones; en los cálculos, la zona de fractura se reemplaza por una fisura cuya capacidad portante depende de la abertura w en la dirección de la máxima tensión principal de tracción, de acuerdo a una curva $\sigma - w$ (Fig. 2.b).
- las propiedades del material fuera de la zona de fractura están dadas por una curva $\sigma - \epsilon$ (Fig. 2.a).

Para poder efectuar cálculos de acuerdo a este modelo, es necesario recurrir a métodos numéricos, resultando el método de los elementos finitos el más adecuado. La capacidad de transferencia de tensiones de la fisura ficticia se simula por medio de fuerzas aplicadas en los nodos de la discretización que yacen a lo largo de dicha fisura. En la Fig. 5 se muestra una viga profundamente fisurada sometida a carga. La posición de los dos nodos pertenecientes a cada par coincide cuando la estructura está descargada o cuando dichos nodos se encuentran en la parte del material que aún no se ha dañado (donde $\sigma < f_t$).

Introduciendo estas fuerzas nodales de interacción a lo largo de la fisura ficticia es posible analizar estructuras con profundidades de entalla arbitrarias.

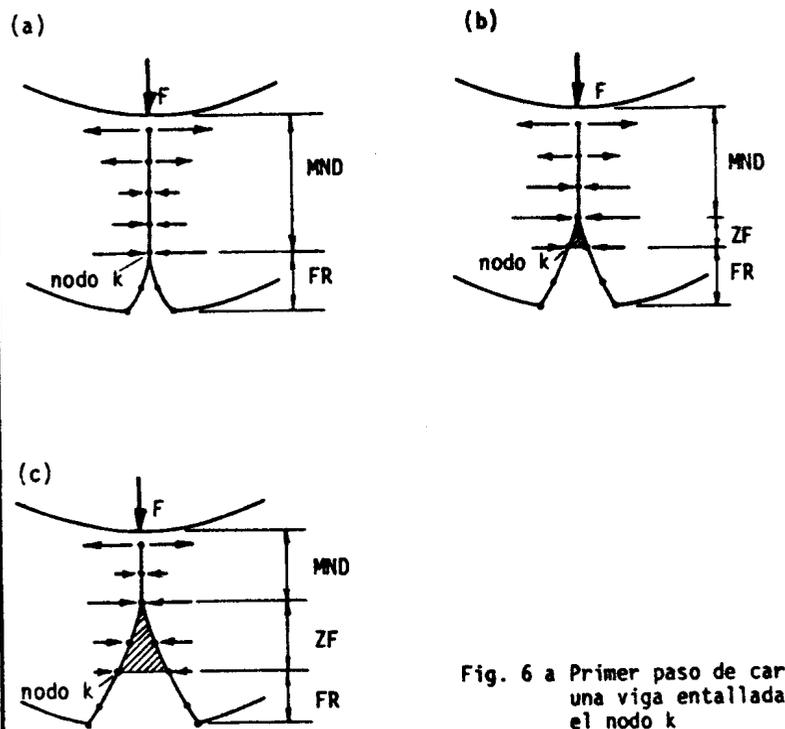
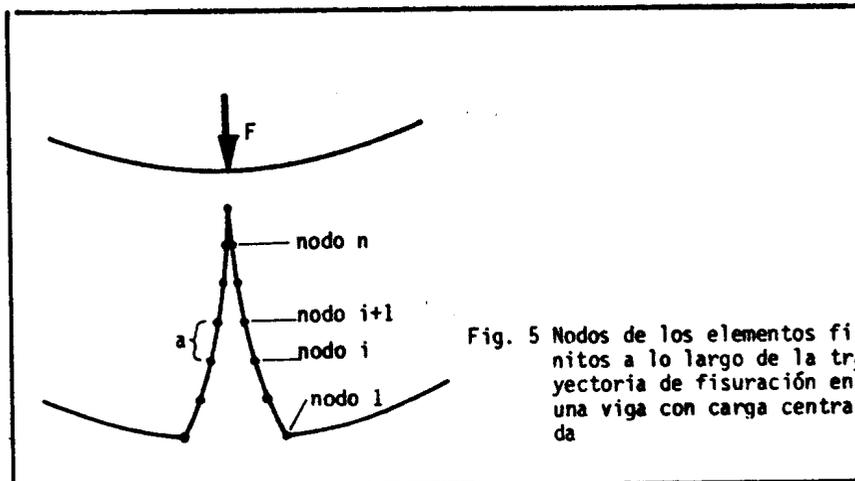


Fig. 6 a Primer paso de carga de una viga entallada hasta el nodo k
b Segundo paso de carga; comienza a desarrollarse la zona de fractura
c La zona de fractura se ha extendido un nodo más

Como ejemplo, la Fig. 6 ilustra sucesivos pasos de carga para una viga cuya entalla se extiende hasta el nodo k : en a) la entalla o fisura inicial aún no se ha propagado; en b) existe una zona de fractura entre el nodo k y el $k+1$; en c) la zona de fractura comprende la región de viga entre los nodos k y $k+2$. En todos los casos, la intensidad de las fuerzas nodales depende de la abertura w de la zona de fractura en el nodo considerado, siguiendo la relación σ - w (Fig. 2.b).

IMPLEMENTACION REALIZADA

Por simplicidad, se considera el comportamiento del material fuera de la zona de fractura como elástico lineal; además, esta hipótesis simplificativa no se aparta demasiado de la respuesta del hormigón sometido a tracción (ver Fig. 3).

En cuanto a la zona de fractura, resulta conveniente aproximar la curva σ - w que describe su comportamiento mediante tramos lineales. La aproximación más simple es una única línea recta; en la Fig. 7.a, f_t es la resistencia a la tracción y w es la abertura máxima de la zona de fractura para la cual puede aún transferir tensiones. Una aproximación más refinada de la curva σ - w es considerar dos tramos lineales (Fig. 7.b); en este caso es necesario definir las coordenadas $(\beta \cdot w_c; \alpha \cdot f_t)$ del punto de quiebre. El área debajo de la curva σ - w representa la cantidad de energía necesaria para crear una superficie unitaria de fisura y, por lo tanto, esta área es igual a la energía de fractura G_F , independientemente de la aproximación elegida.

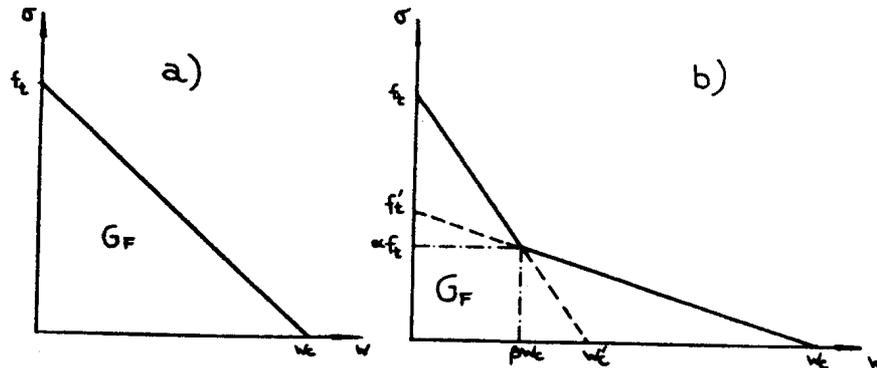
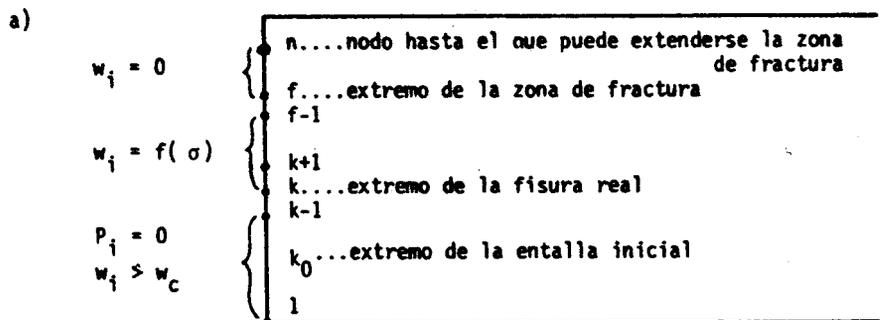


Fig. 7 Dos posibles aproximaciones de la curva σ - w :
a) Aproximación lineal
b) Aproximación bilineal



b)

$$\sum_{j=1}^n K_{i,j} \cdot P_j + C_i \cdot F - w_i = 0 \quad i=1, \dots, f-1 \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n K_{i,j} \cdot P_j + C_i \cdot F = 0 \quad i=f, \dots, n \quad (9)$$

$$P_i = 0 \quad i=1, \dots, k-1 \quad (10)$$

$$\frac{w_c}{f_t \cdot a \cdot b} \cdot P_i - w_i = -\frac{w_c}{2} \quad i=k \quad (11)$$

$$\frac{w_c}{2 \cdot f_t \cdot a \cdot b} \cdot P_i - w_i = -\frac{w_c}{2} \quad i=k+1, \dots, f-1 \quad (12)$$

$$\frac{w_c}{2 \cdot f_t \cdot a \cdot b} \cdot P_i = -\frac{w_c}{2} \quad i=f \quad (13)$$

donde:

w_i : abertura de la fisura ficticia en el nodo i

P_i : fuerza de interacción actuante en el nodo i

F : fuerza aplicada a la estructura

$K_{i,j}$: abertura de la fisura en el nodo i para una fuerza de interacción unitaria actuante en el nodo j

C_i : abertura de la fisura en el nodo i para una fuerza F unitaria

f_t : resistencia a la tracción

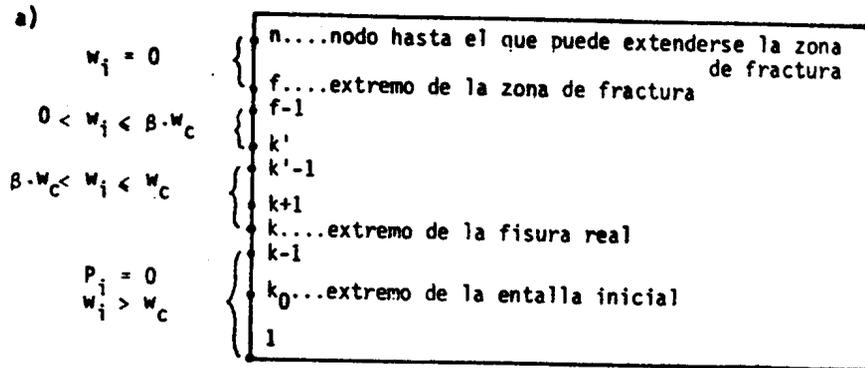
a : distancia entre dos nodos consecutivos a través de la fisura

b : ancho de la estructura

w_c : desplazamiento crítico

Fig. 8 a) Condiciones a cumplirse a lo largo del camino de fisuración para una aproximación σ - w lineal

b) Correspondiente sistema de ecuaciones



b)

$$\sum_{j=1}^n K_{i,j} \cdot P_j + C_i \cdot F - w_i = 0 \quad i=1, \dots, f-1 \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n K_{i,j} \cdot P_j + C_i \cdot F = 0 \quad i=f, \dots, n \quad (9)$$

$$P_i = 0 \quad i=1, \dots, k-1 \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{w'_c}{f_t \cdot a \cdot b} \cdot P_i - w_i &= -\frac{w'_c}{Z} & \text{si } k' < k \\ \frac{w_c}{f'_t \cdot a \cdot b} \cdot P_i - w_i &= -\frac{w_c}{Z} & \text{si } k' > k \end{aligned} \right\} \quad i=k \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{w'_c}{2 \cdot f_t \cdot a \cdot b} \cdot P_i - w_i &= -\frac{w'_c}{Z} & \left\{ \begin{array}{l} \text{si } k' < k+1 \\ \text{si } k' > k+1 \end{array} \right. & \begin{array}{l} i=k+1, \dots, f-1 \\ i=k', \dots, f-1 \end{array} \\ \frac{w_c}{2 \cdot f'_t \cdot a \cdot b} \cdot P_i - w_i &= -\frac{w_c}{Z} & \text{si } k' > k+1 & i=k+1, \dots, k'-1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\frac{w_c}{2 \cdot f'_t \cdot a \cdot b} \cdot P_i = -\frac{w'_c}{Z} \quad i=f \quad (13)$$

Las variables involucradas se describen en las Figs. 7.a y 7.b.

Fig. 9 a) Condiciones a cumplirse a lo largo del camino de fisuración para una aproximación $\sigma - w$ bilineal.

b) Correspondiente sistema de ecuaciones

Una vez resuelto el sistema de $(n+f)$ ecuaciones, cuyo orden aumenta a medida que el borde de la zona de fractura f avanza, se obtienen los valores de las n fuerzas nodales P_i , la carga F aplicada a la estructura y los $(f-1)$ desplazamientos nodales w_i . Luego debe controlarse la abertura de la zona de fractura en el nodo k (extremo de la zona de fractura) y , para la aproximación bilineal, en el nodo k' . Si éstos superan los valores w_c y $\beta \cdot w_c$ respectivamente, el programa efectúa las modificaciones necesarias de la matriz $[A]$ automáticamente y resuelve el nuevo sistema de ecuaciones.

Finalmente, se calcula el desplazamiento δ del punto de aplicación de la carga F :

$$\delta = \sum_{i=1}^n D_i \cdot P_i + D_F \cdot F \quad (14)$$

donde:

- P_i : fuerza de interacción nodal actuante en el nodo i
- D_i : desplazamiento del punto de aplicación de la carga cuando una fuerza de interacción unitaria actúa en el nodo i
- D_F : desplazamiento del punto de aplicación de la carga cuando la carga aplicada es unitaria

De esta manera, es posible obtener la relación $F - \delta$ de la estructura a diferentes niveles de carga, hasta la carga máxima y después de ella.

Todas las constantes ya mencionadas $K_{i,j}$, C_i , D_i y D_F se determinan utilizando el método de los elementos finitos. Como el material se considera elástico lineal, los coeficientes de flexibilidad obtenidos mediante un programa lineal son también válidos para piezas de otras dimensiones y otro módulo de elasticidad, afectándolos de ciertos coeficientes de proporcionalidad. Por ejemplo, en el caso de vigas cuyas dimensiones en el plano varíen uniformemente (relación altura/luz constante) y suponiendo que las flexibilidades F hayan sido calculadas con un módulo E y para un ancho b , los coeficientes de flexibilidad F' a utilizar cuando se trabaja con un módulo E' y un ancho b' , son:

$$F' = F \cdot b/b' \cdot E/E' \quad (15)$$

APLICACIONES

En la Fig. 10 se muestra la discretización utilizada para hallar los coeficientes de flexibilidad requeridos en los cálculos, para el caso de una viga entallada simplemente apoyada sometida a flexión, con carga concentrada en el centro de la luz. En la Fig. 11 se presentan las curvas carga-deflexión ($F - \delta$) obtenidas mediante la aplicación del modelo de la fisura ficticia,

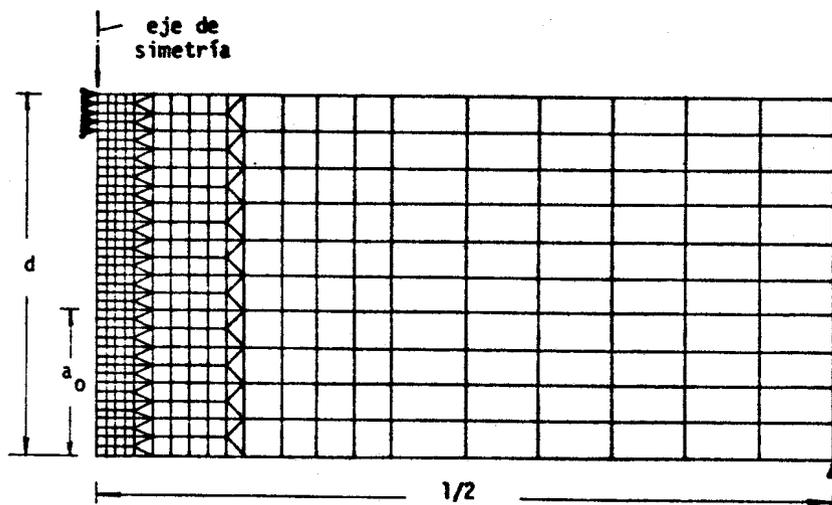


Fig. 10 Discretización utilizada en el cálculo de los coeficientes de flexibilidad que se emplean en los ejemplos

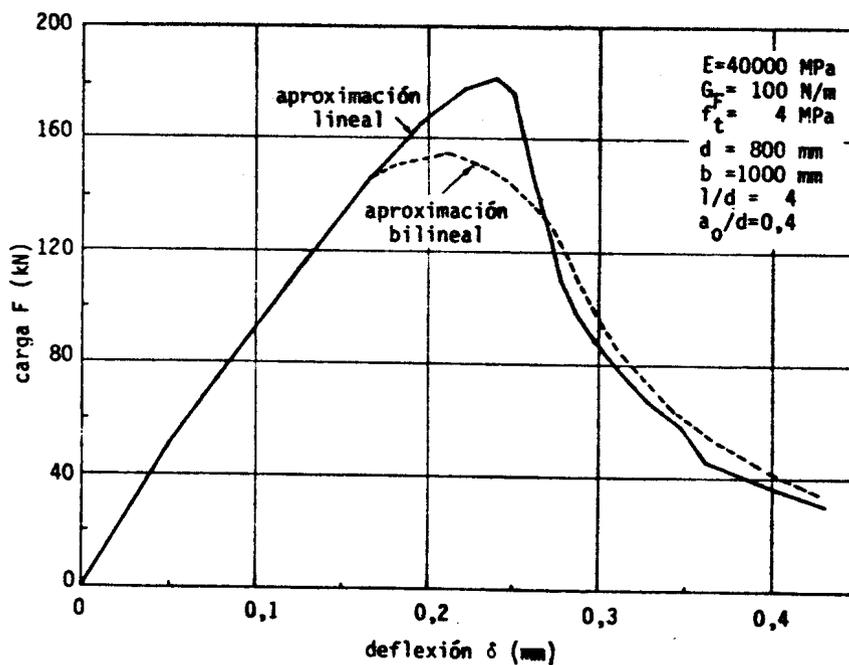


Fig. 11 Curvas $F-\delta$ calculadas con dos aproximaciones de la curva $\sigma-w$: la aproximación lineal y una aproximación bilineal característica de hormigones normales

aproximando el "strain-softening" del material de dos formas distintas: linealmente (ver Fig. 7.a) y con dos tramos rectilíneos (ver Fig. 7.b). La aproximación bilineal elegida en el segundo caso se ajusta con mayor precisión al verdadero comportamiento del material. Como puede observarse, la forma del diagrama $\sigma - w$ afecta notablemente la respuesta del modelo; por ejemplo, la carga máxima predicha según la aproximación bilineal es un 15% menor que la correspondiente al diagrama $\sigma - w$ lineal, habiéndose mantenido constantes, sin embargo, las restantes propiedades del material.

En la Fig. 12 se ilustra la distribución de tensiones correspondiente a la carga máxima del diagrama $F - \delta$, para distintas alturas de vigas; también se indica la extensión de la zona de fractura, o fisura ficticia, desde el extremo de la fisura verdadera o entalla. Tanto la relación entre la altura de la zona de fractura y la altura de la viga, como la distribución de tensiones a lo largo de la zona dañada, dependen de la altura de la pieza. La capacidad de transferencia de tensiones del borde de la entalla decrece al aumentar la altura d y, en consecuencia, la zona de fractura es más eficiente reduciendo las concentraciones de tensiones para vigas más bajas. Para vigas pequeñas, la distribución se aproxima a la obtenida según la teoría de plasticidad, mientras que para vigas más altas se asemeja a la calculada según la teoría de la elasticidad. Con estos resultados, es evidente que no puede aplicarse fractomecánica lineal al estudio de miembros estructurales pequeños, aunque pueden esperarse resultados razonables de su utilización en estructuras masivas (por ejemplo, en presas de gravedad).

CONCLUSIONES

La ventaja fundamental del modelo descrito reside en que simula con precisión, desde el punto de vista fenomenológico, el proceso de fisuración del hormigón y de otros materiales similares bajo sollicitaciones de tracción.

Su limitación más importante es el requerimiento de conocer de antemano la trayectoria de propagación de la fisura. Sin embargo, este es un caso que se presenta a menudo, debido a la simetría geométrica de la estructura en estudio o de las cargas aplicadas. Si el camino de fisuración puede predecirse, el modelo resulta muy conveniente. Cuando las constantes K_{ij} , C_i , D_i y D_F han sido determinadas una vez, es sencillo continuar con los cálculos resolviendo el sistema de $(n+f)$ ecuaciones para cada paso de carga. Además, los mismos coeficientes de flexibilidad pueden ser usados para distintas longitudes de entalla, distintas dimensiones de la pieza, diferentes módulos de elasticidad y diversos diagrama $\sigma - w$. La resolución de $(n+f)$ ecuaciones requiere mucho

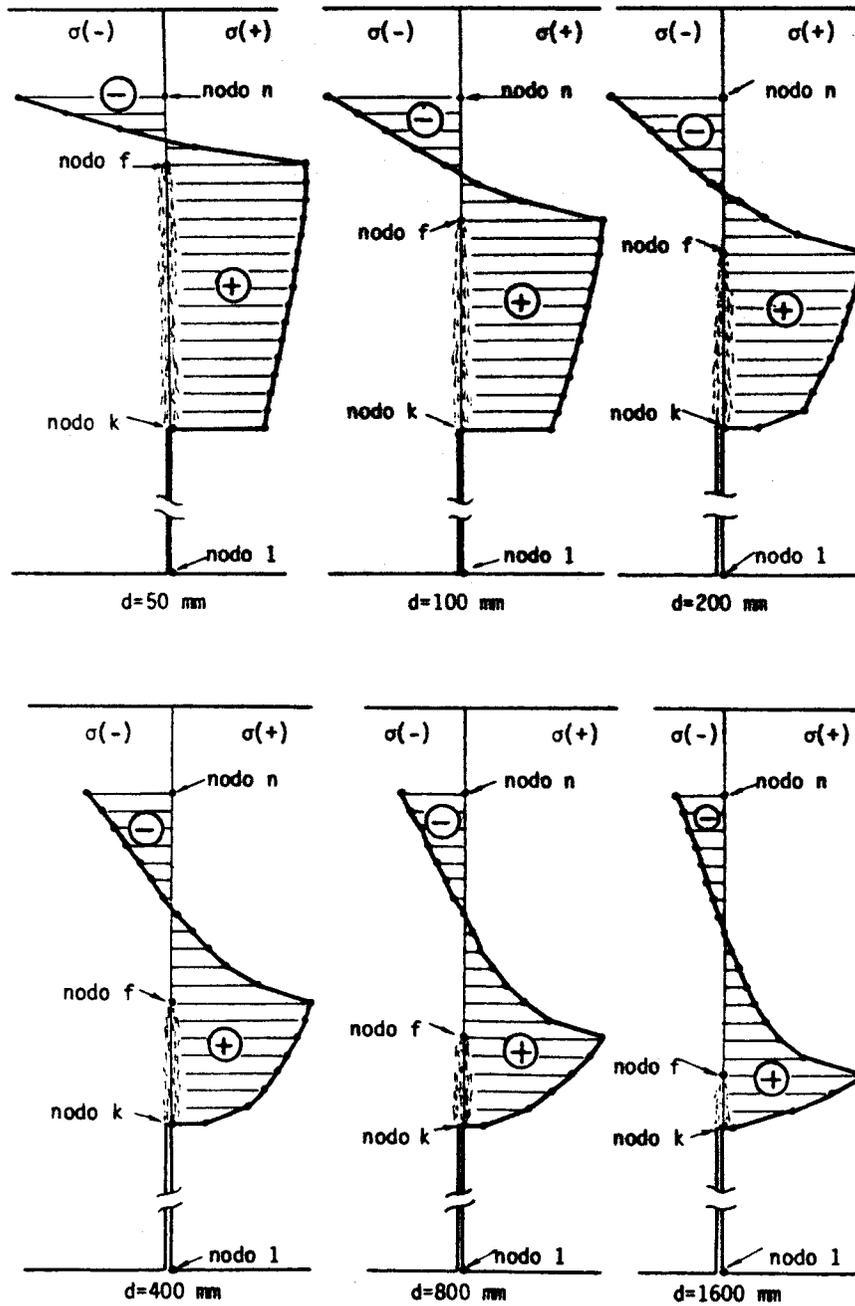


Fig. 12 Distribución de tensiones y extensión de la zona de fractura correspondientes a la carga máxima. Los datos empleados se detallan en la Fig. 11

menos esfuerzo computacional que, por ejemplo, simular el daño progresivo modificando la matriz de rigidez del sistema.

Otra limitación de este modelo consiste en que puede utilizarse solamente en el estudio de sucesivos estados de carga que impliquen un daño creciente, es decir, no pueden analizarse adecuadamente situaciones en las que se produzca un cierre de fisuras por una disminución de la sollicitación exterior.

REFERENCIAS

- [1] Griffith, A.A., "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids", Philosophical Transactions, Royal Society of London, Series A, V. 221, 1920, pp. 163-198.
- [2] Irwin, G.R., "Fracture Dynamics", Fracturing of Metals, American Society of Metals, Cleveland, Ohio, 1948.
- [3] Orowan, E., "Fundamentals of Brittle Behaviour in Metals", Fatigue and Fracture of Metals, John Wiley and Sons, New York, 1950.
- [4] Kaplan, M.F., "Crack Propagation and the Fracture of Concrete", Proc. ACI 58, 1961, pp. 591-610.
- [5] Hillerborg, A., "Numerical Methods to Simulate Softening and Fracture of Concrete", Report to the RILEM TC 50-FMC, 1985.
- [6] Petersson, P.E., "Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials", Report TVBM-1006, Lund, Suecia, 1981, 174 p.