

SOLUCION ESTATICA EXACTA PARA ESTRUCTURAS PRISMATICAS
DE LAMINAS PLANAS PLEGADAS

Adrián L. ETEROVIC

Carlos A. PRATO

Luis A. GODOY

Departamento de Estructuras, Facultad de
Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,
Universidad Nacional de Córdoba.
Córdoba, Argentina.

RESUMEN

Como alternativa de análisis de las estructuras prismáticas de láminas plegadas se presenta un método que al igual que el método de Tirras Finitas realiza la separación de variables mediante un desarrollo en serie de Fourier en la dirección longitudinal, pero en cambio emplea en la dirección transversal soluciones de las ecuaciones de la elasticidad. De esta manera no es preciso discretizar la estructura y los únicos grados de libertad resultan aquellos de las aristas geométricas. La convergencia se logra incrementando sólo el número de modos.

Se presenta una formulación completa del problema y del método de resolución. Las funciones de interpolación, matrices de rigidez y vectores de carga obtenidos se explicitan por completo en los apéndices.

ABSTRACT

An alternative approach for the analysis of folded plate structures is presented. As in the Finite Strip method, Fourier expansions are used in the axial direction in order to simplify the equations, but then exact solutions are used in the transverse direction. In this way it is not necessary to discretize the structure. Only the displacements at the intersection of the plates hold as degrees of freedom. Convergence is reached by increasing the number of longitudinal modes.

A complete formulation of the problem and solution procedure is presented. The base functions, stiffness matrices and load vectors are explicitly given in the appendices.

INTRODUCCION

Las estructuras prismáticas de pared delgada de sección poligonal son extensamente usadas como conjuntos autoportantes pues constituyen una elección de compromiso óptima entre la alta eficiencia estructural de las cáscaras curvas y la facilidad de construcción de soluciones más robustas.

Los métodos de análisis usuales de este tipo de estructuras pueden clasificarse en tres grupos:

El primero comprende la teoría de vigas y los denominados métodos ordinarios. Los resultados que se obtienen son en general de dudosa precisión (1).

El segundo grupo incluye el método de Elementos Finitos, extensamente desarrollado, y el método de Tiras Finitas (2). Ambos son sumamente confiables pero a costa de un elevado número de grados de libertad necesario.

A la par de estos existe un conjunto de métodos que emplean soluciones exactas de las ecuaciones de la teoría de la elasticidad que rigen el comportamiento de cada placa para plantear con ellas la compatibilidad de desplazamientos de toda la estructura (3-5). Estos métodos requieren un mínimo número de grados de libertad (tan sólo los de las aristas geométricas de la estructuras) pero presentan el inconveniente de la obtención de soluciones particulares (dependientes de las cargas sobre cada placa) también exactas, con suficiente generalidad para fines prácticos. Por ese motivo en ocasiones se ha ignorado esta respuesta, como lo hacen en general los métodos del segundo grupo, obteniendo la convergencia mediante una reducción en el tamaño de los elementos, al igual que aquellos. (Véase sin embargo la ref. (6), que introduce una solución particular al método de Tiras Finitas)

El presente trabajo se encuadra en esta última línea de análisis. Luego de una formulación completa del problema, se desarrolla el procedimiento de resolución, explicitando las matrices de rigidez correspondientes. Se halla luego una solución particular exacta para un amplio espectro de estados de carga.

Un programa que implementa el elemento así obtenido (que modela una placa completa de la estructura) ha sido desarrollado por el autor.

FORMULACION DEL PROBLEMA

Se consideran estructuras formadas por placas plegadas de aristas rígidas, de material elástico, lineal, homogéneo e isótropo con apoyos de tipo tímpano en los extremos (infinitamente rígidos en su plano e infinitamente flexibles en dirección normal al mismo). Se supone que los desplazamientos son pequeños comparados con las dimensiones de la estructura.

El estado de equilibrio estático puede obtenerse mediante el principio de mínima energía potencial total. El cambio de energía entre el estado sin deformaciones ni tensiones y un estado arbitrario puede escribirse:

$$\Pi = \sum_{r=1}^N \Pi_r + \sum_{s=1}^M T_s \quad (01)$$

donde N es el número de láminas planas que componen la estructura, M es el número de aristas de la misma, Π es la energía potencial total de la placa r-ésima y T_s es el potencial de las cargas actuantes sobre la arista s-ésima.

Para escribir las componentes de los campos tensoriales involucrados en esta ecuación invariante se elige un sistema de coordenadas globales X_i cuyo primer eje coincide con la dirección longitudinal de la estructura y un sistema de coordenadas locales x_i en cada placa, obtenido del anterior mediante una rotación alrededor de X_1 según muestra la Figura 1, en la cual se especifican también las magnitudes que definen la geometría.

Se consideran estados de carga simétricos respecto al plano $X_1 = L/2$.

Para cada placa se tiene

$$\Pi_r = \Pi_{mr} + \Pi_{fr} \quad (02)$$

$$\Pi_{mr} = \frac{1}{2} \int_A M_{ij} \epsilon_{ij} dA - \int_A P_i u_i dA - \int_{-b}^b \{f u_1\}_{x_1=L}^{x_1=0} d x_2 \quad (03)$$

$$\Pi_{fr} = \frac{1}{2} \int_A M_{ij} \chi_{ij} dA - \int_A P_3 u_3 dA \quad (04)$$

donde se han explicitado las contribuciones membranal y flexional a la energía. N_{ij} , M_{ij} son los esfuerzos y momentos resultantes en el espesor H de la placa, ϵ_{ij} , χ_{ij} las deformaciones y cambios de curvatura correspondientes, p_1 , p_2 , p_3 las cargas por unidad de área de la placa, f la carga de compresión por unidad de longitud de los extremos $X_1 = 0, L$, U_1 , U_3 los desplazamientos y A representa el área de la placa.

En éstas y en el resto de las ecuaciones todos los índices van de 1 a 2 salvo mención explícita.

Por otra parte las carga sobre cada arista provienen del potencial

$$T_s = - \int_0^L (P_1 U_1 + P_3 U_3 + C \phi) d X_1 \quad (05)$$

donde P_1 , P_3 , C son las cargas y momentos por unidad de longitud de la arista y U_1 , U_3 , ϕ los desplazamientos y giros respectivos.

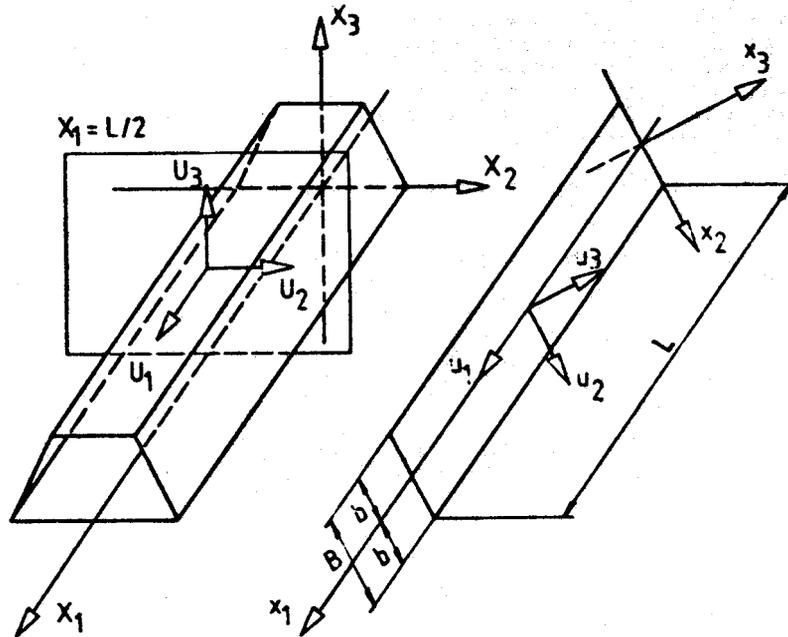


Fig. 1 Sistemas de coordenadas y geometría.

La condición de equilibrio de la estructura se obtiene anulando la primera variación de la energía:

$$\Pi'(\bar{U}) \delta \bar{U} = \sum_{r=1}^N \Pi_r'(\bar{u}) \delta \bar{u} + \sum_{s=1}^M T_s'(\bar{U}) \delta \bar{U} = 0 \quad (06)$$

donde se tiene

$$\begin{aligned} \Pi_r'(\bar{u}) \delta \bar{u} &= \int_A M_{ij} \delta \epsilon_{ij} dA - \int_A P_i \delta u_i dA - \\ &- \int_{-b}^b \{ \epsilon \delta u_1 \}_{x_1=0}^{x_1=L} d x_2 + \\ &+ \int_A M_{ij} \delta \chi_{ij} dA - \int_A P_3 \delta u_3 dA \end{aligned} \quad (07)$$

$$T_s'(\bar{U}) \delta \bar{U} = - \int_0^L (F_i \delta u_i + F_3 \delta u_3 + C \delta \phi) d x_1 \quad (08)$$

Problema local de una Placa

Del espacio de todos los desplazamientos virtuales U involucrado en la ecuación (06) se toma para cada r el subespacio constituido por aquellos δU_r nulos en todo el dominio de la estructura salvo en el interior y sobre los extremos de la placa r -ésima. Así una condición necesaria para el equilibrio resulta:

$$\Pi_r'(\bar{u}) \delta \bar{u}_0 = 0 \quad r = 1, N \quad (09)$$

y aún este subespacio es suficiente para garantizar la validez del Teorema Fundamental de Cálculo de Variaciones: la ecuación (09) escrita

en forma desarrollada:

$$\int_A N_{ij} \delta \epsilon_{ij} dA - \int_A P_i \delta u_i dA - \int_{-b}^b \left\{ f \delta u_1 \right\}_{x_1=L}^{x_1=0} dx_2 + \int_A M_{ij} \delta \chi_{ij} dA - \int_A P_3 \delta u_3 dA = 0$$

que luego de integrar por partes una vez en el primer sumando y dos veces en el cuarto resulta:

$$-\int_A (N_{ij,j} + P_i) \delta u_i dA - \int_A (M_{ij,ij} + P_3) \delta u_3 dA + \int_{-b}^b \left\{ (N_{11} + f) \delta u_1 \right\}_{x_1=0}^{x_1=L} dx_2 = 0 \quad (10)$$

(nótese la ausencia de integrales de contorno sobre las aristas producidas por las integraciones parciales a causa de la condición impuesta a los desplazamientos virtuales); es equivalente a las ecuaciones

$$N_{ij,j} + P_i = 0 \quad (11)$$

$$M_{ij,ij} + P_3 = 0 \quad (12)$$

que deben satisfacerse en el dominio de la placa junto con la condición de equilibrio en los extremos:

$$N_{11} + f = 0 \quad x_1 = 0, L \quad (13)$$

Introduciendo las ecuaciones constitutivas y cinemáticas

$$\begin{aligned} N_{ij} &= K ((1 - \nu) \epsilon_{ij} + \nu \delta_{ij} \epsilon_{kk}) & \epsilon_{ij} &= u_{i,j}^s \\ M_{ij} &= D ((1 - \nu) \chi_{ij} + \nu \delta_{ij} \chi_{kk}) & \chi_{ij} &= -u_{3,ij} \end{aligned} \quad (14)$$

donde K , D son las rigideces membranal y flexional respectivamente, δ_{ij} es la delta de Kronecker y ν es el Módulo de Poisson, tenemos finalmente:

$$\frac{K}{2} ((1 - \nu) u_{i,jj} + (1 + \nu) u_{j,ij}) + P_i = 0 \quad (15)$$

$$D u_{3,iiij} - P_3 = 0 \quad (16)$$

junto con

$$K u_{1,1} + f = 0 \quad x_1 = 0, L \quad (17)$$

METODO DE RESOLUCION

La dependencia con la coordenada x_1 de desplazamientos y cargas se desarrolla en series de Fourier obteniendo:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= u_{1n}(x_2) X_{1n}(x_1) + u_{10}(x_2) X_{10}(x_1) & p_1(x_1, x_2) &= p_{1n}(x_2) X_{1n}(x_1) \\ u_2(x_1, x_2) &= u_{2n}(x_2) X_{2n}(x_1) & p_2(x_1, x_2) &= p_{2n}(x_2) X_{2n}(x_1) \\ u_3(x_1, x_2) &= u_{3n}(x_2) X_{3n}(x_1) & p_3(x_1, x_2) &= p_{3n}(x_2) X_{3n}(x_1) \end{aligned} \quad (18)$$

la suma se extiende de $n = 1$ a $n = \infty$. El término $u_{10} X_{10}$ permitirá satisfacer la condición de borde en los extremos (17).

Considerando las condiciones de vínculo en los extremos y la simetría respecto al plano $X_1 = L/2$ las funciones de la base ortonormal resultan:

$$X_{1n}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos(\alpha x_1) \quad (19)$$

$$X_{2n}(x_1) = X_{3n}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen}(\alpha x_1) \quad (20)$$

donde $\alpha = (2n - 1) \pi/L$

La primera igualdad de la ecuación (20) asegura el carácter vectorial de cada modo del desarrollo: Los desplazamientos globales U_1, U_2, U_3 tendrán un desarrollo similar al (18).

Sustituyendo las series (18) en las ecuaciones en derivadas parciales (15) (16), multiplicando respectivamente por X_{1n}, X_{2n}, X_{3n} e integrando entre 0 y L se obtiene para cada n el sistema de 3n ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{K}{2} (-(1 - \nu) u_{1n}'' + 2 \alpha^2 u_{1n} - (1 + \nu) \alpha u_{2n}') &= p_{1n} \\ \frac{K}{2} (-2 u_{2n}'' + (1 - \nu) \alpha^2 u_{2n} + (1 + \nu) u_{1n}') &= p_{2n} + p_{20} \end{aligned} \quad (21)$$

$$D (u_{3n}^{IV} - 2 \alpha^2 u_{3n}'' + \alpha^4 u_{3n}) = p_{3n} \quad (22)$$

las derivadas son respecto a x_2 y el término de carga adicional p_{20} proviene del sumando $u_{10} X_{10}$ de las (18) y representa el efecto de la carga axial en los extremos.

Solución de las ecuaciones

La solución del sistema homogéneo asociado al (21) se obtiene transformándolo mediante un cambio de variables en un sistema de primer orden de cuatro ecuaciones. Los autovalores de la matriz asociada pueden obtenerse en forma analítica y resultan iguales a $\pm\alpha$ con multiplicidad 2. También es posible obtener los autovectores asociados y luego de un ajuste de coeficientes llegar a una base del espacio solución del sistema original. La ecuación homogénea asociada a la (22) tiene solución directa. Nótese que las raíces de su polinomio característico resultan también iguales a $\pm\alpha$ con multiplicidad 2. Esto asegura la similitud de las funciones solución membranales y flexionales.

Llamando:

$$\bar{Y}_1(x_2) = \bar{Y}_3(x_2) = \begin{Bmatrix} \exp(\alpha x_2) \\ \exp(-\alpha x_2) \\ \alpha x_2 \exp(\alpha x_2) \\ -\alpha x_2 \exp(-\alpha x_2) \end{Bmatrix} \quad \bar{Y}_2(x_2) = \begin{Bmatrix} \exp(\alpha x_2) \\ -\exp(-\alpha x_2) \\ (\alpha x_2 - \mu) \exp(\alpha x_2) \\ (\alpha x_2 + \mu) \exp(-\alpha x_2) \end{Bmatrix} \quad (23)$$

donde $\mu = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ y

$$\bar{A}^t = (\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4) \quad \bar{C}^t = (C_1, C_2, C_3, C_4)$$

las soluciones se escriben

$$u_{in} = \bar{Y}_i^t \cdot \bar{A}_n + u_{in}^p \quad (24)$$

$$u_{3n} = \bar{Y}_3^t \cdot \bar{C}_n + u_{3n}^p$$

Los segundos sumandos representan las soluciones particulares que satisfacen condiciones de borde homogéneas. Para fijar los coeficientes A_n^p, C_n^p se exige que las soluciones se ajusten a condiciones de borde fijas n pero arbitrarias:

$$u_{1n}(-b) = u_{1n}^I \quad u_{1n}(b) = u_{1n}^J \quad (25)$$

$$u_{2n}(-b) = u_{2n}^I \quad u_{2n}(b) = u_{2n}^J$$

$$u_{3n}(-b) = u_{3n}^I \quad u_{3n}(b) = u_{3n}^J \quad (26)$$

$$u'_{3n}(-b) = \beta_n^I \quad u'_{3n}(b) = \beta_n^J$$

Los apéndices I, J identifican las aristas de la placa. Los segundos miembros son los coeficientes de Fourier de los desplazamientos de las aristas y constituirán, cuando sean escritos en coordenadas globales, los grados de libertad de la estructura.

Agrupándolos según

$$\bar{v}_n^t = (u_{1n}^I, u_{2n}^I, u_{1n}^J, u_{2n}^J) \quad (27)$$

$$\bar{w}_n^t = (u_{3n}^I, \phi_n^I, u_{3n}^J, \phi_n^J)$$

Es posible escribir los (25) (26) en forma matricial

$$Z \bar{A}_n = \bar{v}_n ; \quad \Gamma \bar{C}_n = \bar{w}_n \quad (28)$$

de donde, llamando $T = Z^{-1}$; $G = \Gamma^{-1}$ a las matrices de coeficientes de las funciones de interpolación, los desplazamientos resultan:

$$u_{in} = Y_i^t T \bar{v}_n + u_{in}^p \quad (29)$$

$$u_{3n} = Y_3^t G \bar{w}_n + u_{3n}^p$$

Las matrices T y G están dadas en forma explícita en el Apéndice I. Sólo dependen de L, B, v y n y no de la solución particular que no aparece en las ecuaciones (28) porque por hipótesis se anula en los grados de libertad.

En las figuras 2, 3 se han graficado las funciones de interpolación correspondientes a los casos $u_{1n}^J = 1$, $u_{2n}^J = 1$, $u_{3n}^J = 1$, $\phi_n^J = 1$. En cada caso todos los restantes grados de libertad se anulan. Para estos gráficos se ha tomado $L/B = 2$ y $n = 1$ como el modo más representativo. Nótese que para tensión plana, (casos 1 y 2) la función que interpola el desplazamiento en una dirección induce una función de interpolación que se anula en los grados de libertad pero que no es idénticamente nula para el desplazamiento en dirección perpendicular. Esto es consecuencia del empleo de soluciones exactas.

Solución Particular.

Se admite la siguiente distribución de cargas en cada placa:

$$p_i(x_1, x_2) = p_i^I(x_1)(B/2 - x_2)/B + p_i^J(x_1)(B/2 + x_2)/B \quad (30)$$

$$p_3(x_1, x_2) = p_3^I(x_1)(B/2 - x_2)/B + p_3^J(x_1)(B/2 + x_2)/B$$

donde la dependencia con la coordenada x_1 es arbitraria siempre que satisfaga la condición de simetría respecto al plano $X_1 = L/2$ y que sea desarrollable en serie de Fourier según:

$$p_1(x_1, x_2) = \{p_{1n}^I (B/2 - x_2)/B + p_{1n}^J (B/2 + x_2)\} x_{1n}(x_1) \quad (31)$$

$$p_3(x_1, x_2) = \{p_{3n}^I (B/2 - x_2)/B + p_{3n}^J (B/2 + x_2)\} x_{3n}(x_1)$$

La gráfica de las funciones (30) es una superficie reglada según la dirección x_2 .

Además la carga axial de compresión en los extremos admitida es lineal.

$$f(x_2) = f^I (B/2 - x_2)/B + f^J (B/2 + x_2) \quad (32)$$

Con esta elección el término $u_{10} x_{10}$ de (18) resulta:

$$u_{10}(x_2) x_{10}(x_1) = \frac{1}{K} f(x_2) (L/2 - x_1) \quad (33)$$

Para este estado de cargas las ecuaciones (21) (22) admiten una solución particular

$$u_{inp}(x_2) = a_{in} x_2 + c_{in} \quad (34)$$

$$u_{3np}(x_2) = a_{3n} x_2 + c_{3n}$$

y si se llama

$$\bar{v}_n^{pt} = (u_{1np}^I, u_{2np}^I, u_{1np}^J, u_{2np}^J) \quad (35)$$

$$\bar{w}_n^{pt} = (u_{3np}^I, u_{3np}^I, u_{3np}^J, u_{3np}^J)$$

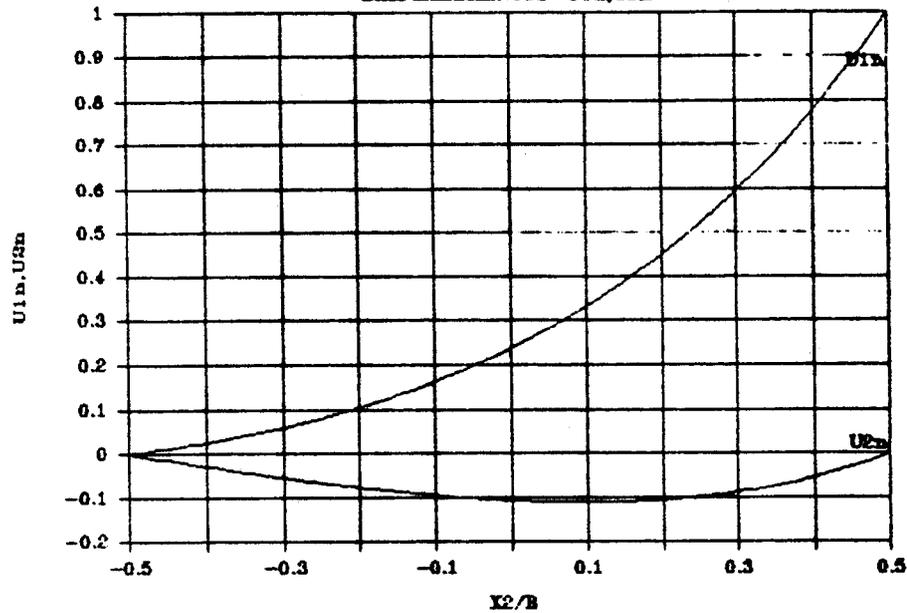
la solución particular buscada que satisface condiciones homogéneas en las aristas es:

$$u_{in}^p = -\bar{Y}_i T \bar{v}_n^p + u_{inp} \quad (36)$$

$$u_{3n}^p = -\bar{Y}_3 G \bar{w}_n^p + u_{3np}$$

Los coeficientes de u_{inp} , u_{3np} en (34) así como los vectores \bar{v}_n^p , \bar{w}_n^p en (35) se hallan explicitados en el Apéndice I.

CASO 1: $U1nJ= 1$
DESPLAZAMIENTOS $U1n, U2n$



CASO 2: $U2nJ= 1$
DESPLAZAMIENTOS $U1n, U2n$

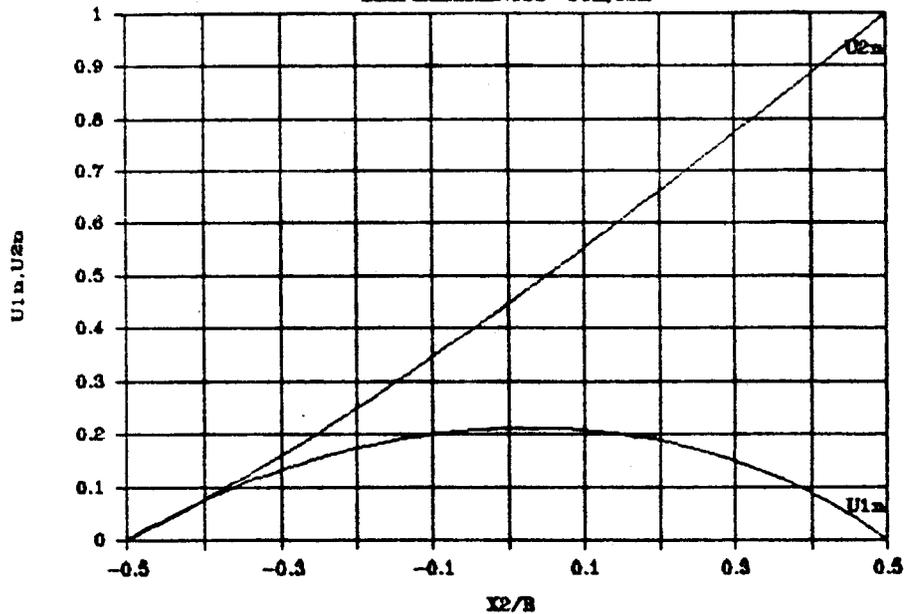
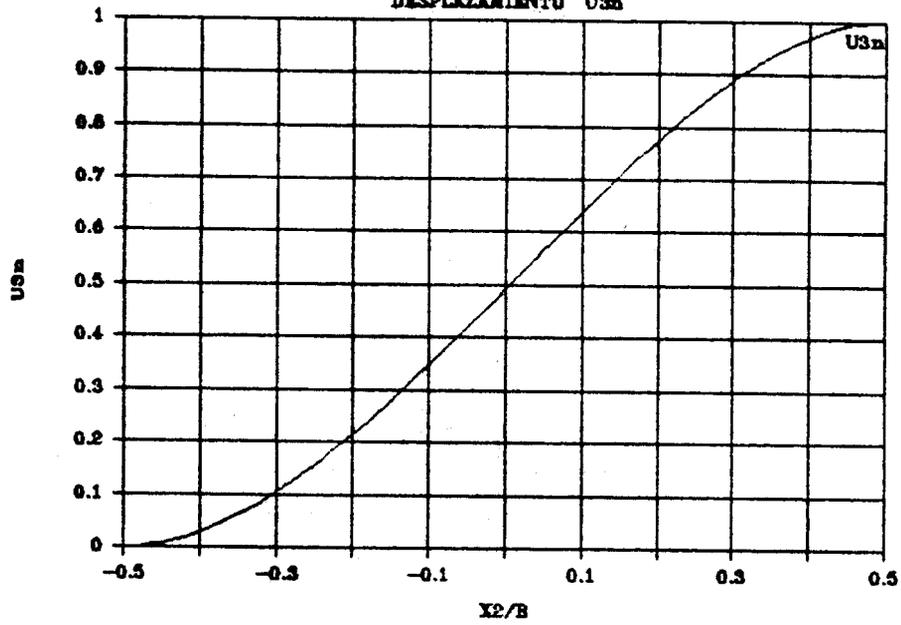


Figura 2. Funciones de interpolación membranales.

CASO 3: $U_{3n}J = 1$

DESPLAZAMIENTO U_{3n}



CASO 4: $U_{3n}'J = 1$

DESPLAZAMIENTO U_{3n}

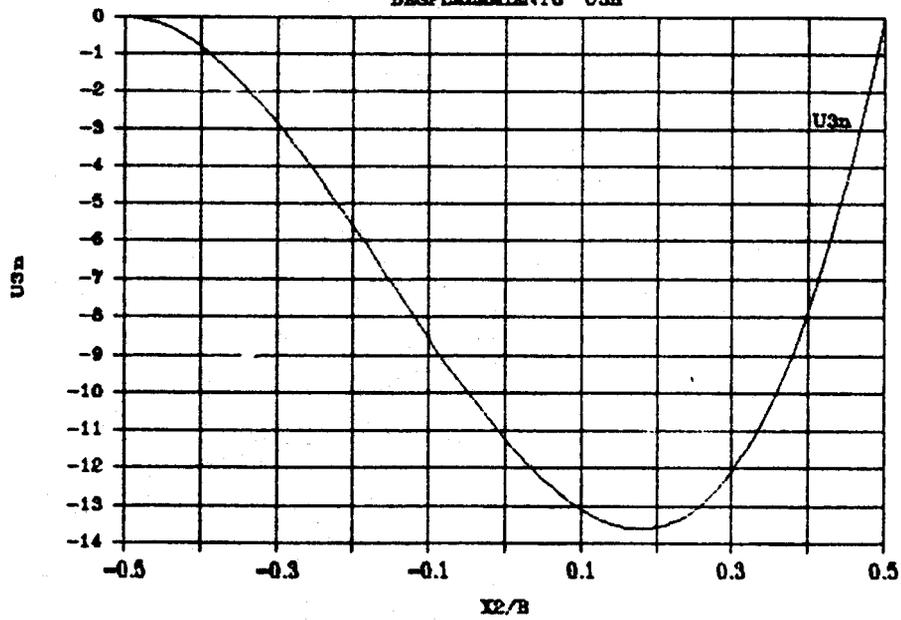


Figura 3. Funciones de interpolación flexionales.

Matrices de Rigidez

Retomando el problema global, se recalculan los términos (07) de la ecuación de equilibrio (06) considerando ahora los desplazamientos virtuales $\delta \bar{u}$ con completa generalidad.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_r(\bar{u}) \delta \bar{u} = & - \int_A \{N_{ij,j} + p_i\} \delta u_i \, dA + \int_{-b}^b \{(N_{11} + f) \delta u_1\}_{x_1=0}^{x_1=L} dx_2 + \\ & + \int_0^L \{N_{12} \delta u_i\}_{x_2=-b}^{x_2=b} dx_1 - \\ & - \int_A \{M_{ij,i} + p_j\} \delta u_j \, dA + \int_0^L \{-M_{22} \delta u_{3,2} + Q_{e2} \delta u_3\}_{x_2=-b}^{x_2=b} dx_1 \end{aligned} \quad (37)$$

donde $Q_{e2} = M_{22,2} + 2 M_{21,1}$ es el corte efectivo.

Como la solución hallada satisface las ecuaciones de dominio y las condiciones de borde en los extremos, al sustituirla en (29) sólo queda:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_r(\bar{u}) \delta \bar{u} = & \int_0^L \{-N_{12}^I \delta u_1^I - N_{22}^I \delta u_2^I + N_{12}^J \delta u_1^J + N_{22}^J \delta u_2^J\} dx_1 + \\ & \int_0^L \{-Q_{e2}^I \delta u_3^I + M_{22}^I \delta u_{3,2}^I + Q_{e2}^J \delta u_3^J - M_{22}^J \delta u_{3,2}^J\} dx_1 \end{aligned} \quad (38)$$

donde I, J indican evaluación en $x_2 = -b, b$ respectivamente.

Se desarrollan los desplazamientos virtuales en series de Fourier según:

$$\begin{aligned} \delta u_i^{I,J} &= \delta u_{in}^{I,J} X_{in} \\ \delta u_3^{I,J} &= \delta u_{3n}^{I,J} X_{3n} \\ \delta u_{3,2}^{I,J} &= \delta \phi_n^{I,J} X_{3n} \end{aligned} \quad (39)$$

sustituyendo y realizando la integración sobre x_1 se tiene

$$\begin{aligned} \delta \Pi_r(\bar{u}) \delta \bar{u} = & - N_{12n}^I \delta u_{1n}^I - N_{22n}^I \delta u_{2n}^I + N_{12n}^J \delta u_{1n}^J + N_{22n}^J \delta u_{2n}^J \\ & - Q_{e2n}^I \delta u_{3n}^I + M_{22n}^I \delta \phi_n^I + Q_{e2n}^J \delta u_{3n}^J - M_{22n}^J \delta \phi_n^J = \bar{V}_n^t \cdot \delta \bar{v}_n + \bar{W}_n^t \cdot \delta \bar{w}_n \end{aligned} \quad (40)$$

donde se ha llamado

$$\begin{aligned} \bar{v}_n^t &= (-N_{12n}^I, -N_{22n}^I, N_{12n}^J, N_{22n}^J) \\ \delta \bar{v}_n^t &= (\delta u_{1n}^I, \delta u_{2n}^I, \delta u_{1n}^J, \delta u_{2n}^J) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_n^t &= (-Q_{e2n}^I, M_{22n}^I, Q_{e2n}^J, -M_{22n}^J) \\ \delta \bar{w}_n^t &= (\delta u_{3n}^I, \delta \phi_n^I, \delta u_{3n}^J, \delta \phi_n^J) \end{aligned} \quad (42)$$

Introduciendo en (34) las soluciones halladas (29) y luego de un poco de álgebra se obtiene

$$\begin{aligned} \bar{v}_n &= M \bar{v}_n - \bar{v}_n^P \\ \bar{w}_n &= F \bar{w}_n - \bar{w}_n^P \end{aligned} \quad (43)$$

donde \bar{v}_n , \bar{w}_n están definidos en (27), M, F son las matrices de rigidez membranal y flexional buscadas, sus coeficientes se hallan explicitados en el Apéndice II y \bar{v}_n^P, \bar{w}_n^P son los vectores de carga respectivos provenientes de las soluciones particulares de (29). Sus coeficientes se obtienen en el Apéndice III.

Si se agrupan los grados de libertad globales de la estructura según:

$$\bar{\Delta}_n^t = (U_{1n}, U_{2n}, U_{3n}, \phi_n) \quad (44)$$

y mediante la matriz de rotación R definida por

$$\begin{Bmatrix} \bar{\Delta}_n^I \\ \bar{\Delta}_n^J \end{Bmatrix} = R \begin{Bmatrix} \bar{v}_n \\ \bar{w}_n \end{Bmatrix} \quad (45)$$

se obtiene finalmente la matriz de rigidez y el vector de cargas en coordenadas globales:

$$K = R^t \begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & F \end{Bmatrix} R \quad \bar{P}_n = R \begin{Bmatrix} \bar{v}_n^P \\ \bar{w}_n^P \end{Bmatrix} \quad (46)$$

que representan la contribución de la placa a la rigidez de la estructura y al estado de cargas.

De esta manera, llamando

$$\bar{F}_n^t = (F_{1n} , F_{2n} , F_{3n} , C_n) \quad (47)$$

al vector de coeficientes de las cargas sobre las aristas, la ecuación de equilibrio variacional (06) ha sido sustituida por la sucesión de ecuaciones algebraicas:

$$\sum_{r=1}^N K \left\{ \begin{array}{c} \bar{\Delta}_n^I \\ \bar{\Delta}_n^J \end{array} \right\} = \sum_{r=1}^N \bar{P}_n + \sum_{s=1}^M \bar{F}_n \quad (48)$$

para $n = 1, \infty$

CONCLUSIONES

Se ha obtenido una solución exacta de las ecuaciones de la elasticidad que gobiernan la respuesta de una estructura prismática de láminas planas plegadas. Con ella se implementó un elemento que modela el comportamiento de una lámina completa de la estructura. Los resultados obtenidos para distintos casos particulares de acciones flexionales y membranales fueron contrastados con resultados de un programa de Tiras Finitas.

La convergencia depende del espectro del estado de cargas. Para carga uniforme (cuyo desarrollo tiene componentes en todos los modos) es suficiente en general tomar dos o tres modos para lograr un error relativo menor de 0.01 en los desplazamientos.

Por otra parte como las funciones de interpolación son de clase C^∞ sobre cada una de las láminas, de la misma clase resultan los esfuerzos en cada modo.

En virtud de que se dispone de estas funciones solución para los esfuerzos, es posible localizar con mayor facilidad puntos de la estructura críticos desde el punto de vista de algún criterio de falla.

Por último, el trabajo ha sido realizado como paso previo al uso de este mismo criterio de análisis en el problema de la estabilidad del equilibrio elástico de tales estructuras, trabajo que se encuentra en desarrollo.

Nomenclatura

Los Apéndices I , II y III hacen uso de la siguiente nomenclatura

L Longitud de la estructura
B Ancho de una placa
H Espesor de una placa
E Módulo de Young
v Módulo de Poisson
n Número de modo

$P_{1n}^I, P_{1n}^J, P_{2n}^I, P_{2n}^J$

$P_{3n}^I, P_{3n}^J, f^I, f^J$

Coefficientes de carga definidos en las ecuaciones (30) (31) y (32).

Además se define por simplicidad:

$$\alpha = (2n - 1) \pi / L$$

$$d = \mu^2 \operatorname{sh}^2(c) - c^2$$

$$c = \alpha B$$

$$f = \operatorname{sh}^2(c) - c^2$$

$$s = \alpha B / 2$$

$$K = E H / (1 - v^2)$$

$$\mu = (3 - v)/(1 + v)$$

$$e = E H / (1 + v)^2$$

$$\sigma = (1 - v)/(1 + v)$$

$$D = E H^3 / (12(1 - v^2))$$

Finalmente se emplean las siguientes funciones trascendentes:

exp() exponencial

sh() seno hiperbólico

ch() coseno hiperbólico

Apéndice I FUNCIONES DE INTERPOLACION (Eq. (29))

1) Funciones membranales

$$\text{Matriz } T = \begin{Bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{21} & -T_{22} \\ T_{21} & T_{22} & T_{11} & -T_{12} \\ T_{31} & T_{32} & T_{41} & -T_{42} \\ T_{41} & T_{42} & T_{31} & -T_{32} \end{Bmatrix}$$

$$T_{11} = ((-4s^2 + 3\mu s - \mu^2)\exp(s) + (\mu s + \mu^2)\exp(-3s)) / (4d)$$

$$T_{12} = ((-4s^2 + \mu s)\exp(s) - \mu s \cdot \exp(-3s)) / (4d)$$

$$T_{21} = ((-4s^2 - 3\mu s - \mu^2)\exp(-s) + (-\mu s + \mu^2)\exp(3s)) / (4d)$$

$$T_{22} = ((4s^2 + \mu s)\exp(-s) - \mu s \cdot \exp(3s)) / (4d)$$

$$T_{31} = ((4s - \mu)\exp(s) + \mu \cdot \exp(-3s)) / (4d)$$

$$T_{32} = ((4s + \mu)\exp(s) - \mu \cdot \exp(-3s)) / (4d)$$

$$T_{41} = ((-4s - \mu)\exp(-s) + \mu \cdot \exp(3s)) / (4d)$$

$$T_{42} = ((4s - \mu)\exp(-s) + \mu \cdot \exp(3s)) / (4d)$$

Solución particular (Eq. (34) (35))

$$a_{1n} = (p_{1n}^J - p_{1n}^I) / (\alpha c K) \quad a_{2n} = 2(p_{2n}^J - p_{2n}^I) / ((1-\nu)\alpha c K)$$

$$c_{1n} = (p_{1n}^J + p_{1n}^I) / (2\alpha^2 K) + (p_{2n}^J - p_{2n}^I) / (\alpha^2 c e)$$

$$c_{2n} = (p_{2n}^J + p_{1n}^I) / ((1-\nu)\alpha^2 K) - ((p_{1n}^J - p_{1n}^I) + 2\sqrt{\frac{2}{L}} (f^J - f^I)) / (\alpha^2 c e)$$

$$\vec{v}_n^{pt} = (-a_{1n} B/2 + c_{1n}, -a_{2n} B/2 + c_{2n}, a_{1n} B/2 + c_{1n}, a_{2n} B/2 + c_{2n})$$

2) Funciones flexionales

$$\text{Matriz } G = \begin{Bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{21} & -G_{22} \\ G_{21} & G_{22} & G_{11} & -G_{12} \\ G_{31} & G_{32} & G_{41} & -G_{42} \\ G_{41} & G_{42} & G_{31} & -G_{32} \end{Bmatrix}$$

$$G_{11} = ((-4s^2 - 3s - 1)\exp(s) + (-s + 1)\exp(-3s)) / (4f)$$

$$G_{12} = ((-4s^2 - s)\exp(s) + s.\exp(-3s)) / (4f\alpha)$$

$$G_{21} = ((-4s^2 + 3s - 1)\exp(-s) + (s + 1)\exp(3s)) / (4f)$$

$$G_{22} = ((4s^2 - s)\exp(-s) + s.\exp(3s)) / (4f\alpha)$$

$$G_{31} = ((4s + 1)\exp(s) - \exp(-3s)) / (4f)$$

$$G_{32} = ((4s - 1)\exp(s) + \exp(-3s)) / (4f\alpha)$$

$$G_{41} = ((-4s + 1)\exp(-s) - \exp(3s)) / (4f)$$

$$G_{42} = ((4s + 1)\exp(-s) - \exp(3s)) / (4f\alpha)$$

Solución particular (Eq. (34) (35))

$$a_{3n} = (p_{3n}^J - p_{3n}^I) / (\alpha^3 c D) \quad c_{3n} = (p_{3n}^J + p_{3n}^I) / (2\alpha^4 D)$$

$$\vec{w}_n^{pt} = (-a_{3n} B/2 + c_{3n}, a_{3n}, a_{3n} B/2 + c_{3n}, a_{3n})$$

Apéndice II

MATRICES DE RIGIDEZ

1) Matriz de rigidez
membranal

$$M = \begin{Bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ & M_{22} & -M_{14} & M_{24} \\ & & M_{11} & -M_{12} \\ \text{Sim.} & & & M_{22} \end{Bmatrix}$$

$$M_{11} = \alpha e (\mu . \text{sh}(2c) - 2c) / d$$

$$M_{12} = -\alpha e (1 + \nu) (\mu \sigma . \text{sh}^2(c) - c^2) / d$$

$$M_{13} = 2\alpha e (c . \text{ch}(c) - \mu . \text{sh}(c)) / d$$

$$M_{14} = -2\alpha e c . \text{sh}(c) / d$$

$$M_{22} = \alpha e (\mu . \text{sh}(2c) + 2c) / d$$

$$M_{24} = -2\alpha e (c . \text{ch}(c) + \mu . \text{sh}(c)) / d$$

2) Matriz de rigidez flexional

$$F = \begin{Bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ & F_{22} & -F_{14} & F_{24} \\ & & F_{11} & -F_{12} \\ \text{Sim.} & & & F_{22} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_{11} &= \alpha^3 D (\text{sh}(2c) + 2c) / \ell \\ F_{12} &= \alpha^2 D ((\text{sh}^2(c) + c^2) / \ell + \nu) \\ F_{13} &= -2\alpha^3 D (c \cdot \text{ch}(c) + \text{sh}(c)) / \ell \\ F_{14} &= 2\alpha^2 D \cdot c \cdot \text{sh}(c) / \ell \\ F_{22} &= \alpha D (\text{sh}(2c) - 2c) / \ell \\ F_{24} &= 2\alpha D (c \cdot \text{ch}(c) - \text{sh}(c)) / \ell \end{aligned}$$

Apéndice III VECTORES DE CARGA (Eq. (43))

1) Vector de carga membranal

$$\vec{V}_n^D = \frac{1}{\alpha c d} B \bar{P}_n + \frac{2}{\alpha c} \sqrt{\frac{2}{L}} (t^J - t^I) \bar{b}$$

donde

$$\bar{P}_n^t = (P_{1n}^I, P_{2n}^I, P_{1n}^J, P_{2n}^J)$$

$$B = \begin{Bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{31} & -B_{32} \\ B_{21} & B_{22} & -B_{41} & B_{42} \\ B_{31} & B_{32} & B_{11} & -B_{12} \\ B_{41} & B_{42} & -B_{21} & B_{22} \end{Bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

$$B_{11} = \frac{\alpha c}{2} (\Lambda_2 - \Lambda_1) + \Lambda_4 - d \qquad B_{12} = \frac{c}{(1+\nu)} (\Lambda_3 + \Lambda_4) - \Lambda_2 - cd$$

$$B_{21} = \frac{\alpha c}{2} (\Lambda_3 + \Lambda_4) - \Lambda_1 - dc \qquad B_{22} = \frac{c}{(1+\nu)} (\Lambda_2 - \Lambda_1) - \Lambda_3 - d$$

$$B_{31} = \frac{\sigma c}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_4 + d$$

$$B_{32} = \frac{c}{(1+\nu)}(\lambda_3 - \lambda_4) - \lambda_2$$

$$B_{41} = \frac{\sigma c}{2}(\lambda_4 - \lambda_3) - \lambda_1$$

$$B_{42} = -\frac{c}{(1+\nu)}(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3 + d$$

$$b_1 = \frac{1}{d} \lambda_4 - \frac{(1+\nu)}{2}$$

$$\lambda_1 = 2(\operatorname{ch}(c)+1)(\mu \cdot \operatorname{sh}(c)-c)$$

$$\lambda_2 = 2(\operatorname{ch}(c)-1)(\mu \cdot \operatorname{sh}(c)+c)$$

$$b_2 = -\frac{1}{d} b_1$$

$$\lambda_3 = 2 \cdot \operatorname{sh}(c)(\mu \cdot \operatorname{sh}(c)+c)$$

$$\lambda_4 = 2 \cdot \operatorname{sh}(c)(\mu \cdot \operatorname{sh}(c)-c)$$

2) Vector de carga flexional

$$\bar{W}_n^P = \frac{1}{\alpha c f} A \bar{Q}_n$$

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{12} & a_{11} \\ -a_{22} & -a_{21} \end{Bmatrix} \quad \bar{Q}_n = \begin{Bmatrix} I \\ P_{3n}^I \\ J \\ P_{3n}^J \end{Bmatrix}$$

$$a_{11} = 2c \cdot \operatorname{sh}(c)(\operatorname{ch}(c)-1) - 3(\operatorname{sh}^2(c)-c^2)$$

$$a_{12} = 3 \cdot \operatorname{sh}^2(c) - c^2 - 2c^2 \operatorname{ch}(c)$$

$$a_{21} = (c(\operatorname{sh}^2(c)+c^2) - 2(\operatorname{sh}(c)+c)(\operatorname{ch}(c)-1)) / \alpha$$

$$a_{22} = (-2c^2 \operatorname{sh}(c) + 2(\operatorname{sh}(c)+c)(\operatorname{ch}(c)-1)) / \alpha$$

REFERENCIAS

- (1) Evans, H.R., Rockey, K.C., "A critical review of the methods of analysis for folded plate structures", Proc. Inst. Civil Eng. London, paper 7368, 1971.
- (2) Cheung, Y.K., "Finite strip method in structural analysis", Pergamon Press, 1976.
- (3) Goldberg, J.E., Leve, H.L., "Theory of prismatic folded plate structures", Int. Congr. Bridge Struct. Engng. 1957, 17, 59-86.
- (4) Evans, H.R., "The analysis of folded plate structures", University of Wales, Ph.D. thesis, 1967.
- (5) De Fries-Skene, A., Scordelis, A., "Direct stiffness solution for folded plates", ASCE ST4, Vol. 90, Au. 64, 15.
- (6) Alvarez, L.M., "Análisis de estructuras laminares plegadas prismáticas", Departamento de Estructuras, U.N.C., Feb. 73.