

UN ELEMENTO SEMIANALITICO PARA CASCARAS DE REVOLUCION CON
INTERSECCIONES BAJO CARGAS ARBITRARIAS.

Fernando G. FLORES

Luis A. GODOY

Departamento de Estructuras, Facultad de
Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
Universidad Nacional de Córdoba.
Córdoba - Argentina.

RESUMEN

Se presenta un elemento semianalítico para el análisis de cáscaras de revolución. El elemento interpola los desplazamientos en forma cúbica, con dos nudos de extremo y uno interior, que permite modelar quiebres en el meridiano e intersecciones de varias cáscaras sin dificultades. En su versión actual el programa desarrollado permite, para condiciones de borde generales, el cálculo estático de esfuerzos bajo cargas arbitrarias con un plano de simetría y cargas axilsimétricas de bifurcación.

Se presentan varias aplicaciones que muestran la aproximación que se obtiene respecto a resultados teóricos y comparaciones con resultados obtenidos con otros códigos.

ABSTRACT

A semianalytical finite element for the analysis of thin shells of revolution is presented. Cubic interpolations for the displacement are used. The element has two border nodes and one internal node, which allows to treat changes in the slope of the meridian and branching of shells without difficulties. At present the program developed permits static analysis under arbitrary loading with a plane of symmetry and buckling analysis under axisymmetric loads, for general boundary conditions.

Several examples are presented that show the approximations obtained with regard to theoretical values and comparisons with results obtained with other codes.

INTRODUCCION.

Existen en el campo de la ingeniería civil y mecánica muchas estructuras que son láminas de revolución, como cúpulas, torres de enfriamiento, silos, centrales nucleares, recipientes de presión, submarinos, vehículos espaciales, etc.. La mayor parte de estas estructuras son de espesor delgado o muy delgado, y algunas de ellas presentan problemas de inestabilidad, como es el caso de silos (vaciado de grano), cascos de submarinos, etc.

Un análisis adecuado de este tipo de problemas requiere de un modelo numérico que permita tener en cuenta características como: cambios de curvatura en el meridiano, cambios bruscos en la tangente al meridiano, cáscaras compuestas, estados arbitrarios de carga, distintas condiciones de borde, desplazamientos prefijados y cambios bruscos en el espesor.

En lo que hace a tipos de problemas que deba enfrentar el ingeniero, surge la necesidad de evaluar cargas críticas de bifurcación y trayectorias con no-linealidad cinemática, e inestabilidades en trayectorias elasto-plásticas.

En la literatura especializada no aparece ninguna formulación basada en el método de elementos finitos, que claramente satisfaga los requerimientos enumerados anteriormente, si la hay, al menos parcialmente, usando diferencias finitas sobre una formulación energética, es el código Bosor desarrollado por Bushnell (19, 20). En esa revisión se han dejado de lado elementos orientados hacia cáscaras de espesor moderado (como los presentes en el sistema SAMCEF) como el desarrollado por Zienkiewicz et al (1) que utiliza interpolaciones distintas para desplazamientos y giros e integración reducida. Entre los elementos exclusivos para cáscaras delgadas, la búsqueda se orientó hacia los elementos curvos dejando de lado los elementos cónicos (2,10). Quizás, el primer elemento curvo fue el de Stricklin et al (3); este elemento que tiene como grado de libertad la derivada del desplazamiento transversal, tiene como inconveniente el bajo grado de interpolación de los desplazamientos membranales y que no acepta quiebres en el meridiano. No es el único elemento que posee este problema: existen elementos con mas grados de libertad (4,5), que si bien solucionan el problema de la interpolación de los desplazamientos membranales, introducen una excesiva continuidad entre elementos. Para solucionar el problema de la continuidad entre elementos se proponen elementos con el giro como grado de libertad en el borde y para mejorar el grado de interpolación de los desplazamientos se incluyen nudos internos (6,7).

El presente trabajo es parte de un proyecto orientado al análisis elástico y elasto-plástico de láminas delgadas de revolución, tendiente a evaluar niveles tensionales y cargas de inestabilidad. Lo que se presenta a continuación es una primera etapa del proyecto y puede dividirse en dos partes: la primera es el análisis lineal elástico de láminas de revolución bajo condiciones de borde y cargas arbitrarias; y la segunda es la obtención de cargas de bifurcación para cargas axilsimétricas.

Se ha desarrollado un elemento finito semianalítico para poder tratar los problemas descritos, realizándose una extensa evaluación para el caso de análisis lineal elástico y algunos de estos resultados se

presentan en este trabajo. El mismo elemento ha sido utilizado en el análisis de cargas de bifurcación para cargas axilsimétricas; si bien las evaluaciones han sido limitadas, puede decirse que el elemento ha respondido satisfactoriamente en esta primera parte del análisis crítico, lo que alienta su uso en etapas posteriores (cargas no-axilsimétricas, respuesta no-lineal y bifurcación a partir de estados elasto-plásticos).

TEORIA DE CASCARAS DELGADAS.

Para estudiar el comportamiento de una lámina delgada de revolución se utilizan en este trabajo las hipótesis de Love-Kirchhoff, en tanto que las ecuaciones cinemáticas son las propuestas por Sanders (8).

$$\epsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{r_s} + \frac{1}{2} (\beta_s^2 + \beta^2)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - u \cdot \text{sen } \phi + w \cos \phi \right) + \frac{1}{2} (\beta_\theta^2 + \beta^2)$$

$$\epsilon_{s\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + v \text{sen } \phi \right) \right] + \frac{1}{2} \beta_s \beta_\theta$$

$$\chi_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial u}{\partial s} \cdot \frac{1}{r_s} - u \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}$$

$$\chi_\theta = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \phi \right) + \text{sen } \phi \left(-\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{r_s} \right) \right] \quad (1)$$

$$\chi_{s\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r_s} \frac{\partial u}{\partial \theta} + (\text{sen } 2\phi + r \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2}) \frac{v}{r^2} + 2 \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial s} \right]$$

$$\beta_s = -\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{u}{r_s}$$

$$\beta_\theta = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - v \cos \phi \right)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - v \frac{\text{sen } \phi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)$$

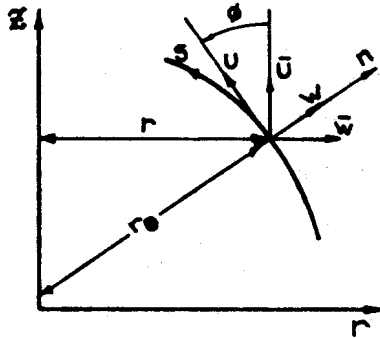


Fig. 1

donde (ver Fig. 1)

- S : es la coordenada según el meridiano;
- θ : es la coordenada según el paralelo;
- r_s : es el radio de la curva meridiana;
- r : es el radio del paralelo;
- ϕ : es el ángulo entre la tangente a s y el eje Z;
- U : es el desplazamiento en la dirección S;
- V : es el desplazamiento en la dirección normal al plano del dibujo;
- W : es el desplazamiento en la dirección normal al meridiano (n);
- ϵ_{ij} : son las deformaciones de la superficie media de la lámina en su plano;
- y χ_{ij} : son los cambios de curvatura de la superficie media.

En este caso las ecuaciones constitutivas corresponden a tensión plana, e integradas en el espesor permiten evaluar los esfuerzos resultantes:

$$\begin{aligned} N_s &= C (E_s + \nu E_\theta) \\ N_\theta &= C (E_\theta + \nu E_s) \\ N_{s\theta} &= 2 C (1-\nu) E_{s\theta} \\ M_s &= D (\chi_s + \nu \chi_\theta) \\ M_\theta &= D (\chi_\theta + \nu \chi_s) \\ M_{s\theta} &= 2 D (1-\nu) \chi_{s\theta} \end{aligned} \tag{2}$$

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

donde

- E es el módulo de elasticidad;
- ν es el coeficiente de Poisson;
- y h es el espesor de la lámina.

Los métodos de resolución a utilizar en este trabajo se basan en teoremas de energía potencial total. Para el caso de una lámina de revolución delgada dicha energía puede expresarse como:

$$\pi = \frac{1}{2} \iint_A (M_s \chi_s + M_\theta \chi_\theta + 2M_{s\theta} \chi_{s\theta} + N_s \epsilon_s + N_\theta \epsilon_\theta + 2N_{s\theta} \epsilon_{s\theta}) dA - \iint_A (P_s u + P_\theta v + P_n w) - \int_{S_G} (R_s u + R_\theta v + R_n w + \bar{M}_s \beta_s) d\theta \quad (3)$$

donde

π es la energía potencial total;

P_s, P_θ, P_n son cargas distribuidas según las direcciones s, θ y n respectivamente;

$R_s, R_\theta, R_n, \bar{M}_s$ son cargas concentradas en el meridiano;

A es el área de la superficie media de la lámina de revolución;

y S_G son los paralelos con carga concentrada.

Las condiciones de borde que pueden establecerse son del tipo de desplazamiento. La formulación permite fijar valores no-nulos para los desplazamientos en un número arbitrario de puntos. Las incógnitas cinemáticas sobre las que se pueden imponer restricciones en un punto son:

\bar{U} : desplazamiento vertical (dirección Z);

\bar{W} : desplazamiento radial;

\bar{V} : desplazamiento transversal (dirección θ);

y $\bar{\beta}_s$: giro de la normal al plano meridiano.

Las condiciones naturales de borde sólo pueden satisfacerse en forma aproximada.

La condición de equilibrio está dada por el principio de mínima energía potencial total que se expresa como:

$$\delta\pi = 0 \quad (4)$$

la condición de estabilidad de esta solución dependerá del signo de la segunda variación de la energía

$$\text{La condición} \quad \delta^2\pi = 0 \quad (5)$$

representa un punto de estabilidad crítico que da lugar a un problema de autovalores (cargas de bifurcación o cargas críticas)

ELEMENTO CURVO (UNIDIMENSIONAL) DE DOCE GRADOS DE LIBERTAD.

Debido a la geometría axilsimétrica de los problemas en estudio se ha utilizado un elemento finito del tipo semianalítico, discretizando series de Fourier en el sentido del paralelo (17) (función del ángulo θ). Las series trigonométricas son pares para U y W e impar para V .

$$\begin{aligned}\bar{U}(s, \theta) &= \bar{U}_j(s) \cdot \cos j \theta \\ \bar{V}(s, \theta) &= \bar{V}_j(s) \cdot \operatorname{sen} j \theta \\ \bar{W}(s, \theta) &= \bar{W}_j(s) \cdot \cos j \theta\end{aligned}\quad (6)$$

Se supone que las cargas actuantes pueden expresarse en la misma forma que los desplazamientos (simétricas respecto a un plano), lo que permite, debido a las características de ortogonalidad de las funciones trigonométricas, desacoplar las ecuaciones para las distintas armónicas J .

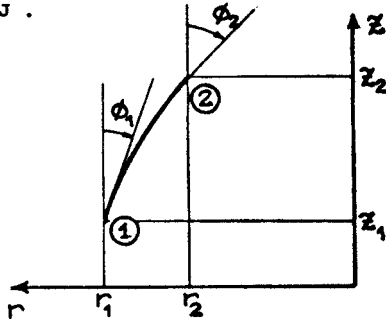


Fig. 2

El elemento desarrollado tiene tres nudos, uno en cada extremo y el tercero en el centro. La geometría (parábola cúbica) queda definida por las coordenadas (r, z) de los nudos extremos y los ángulos que forman las tangentes al meridiano respecto al eje Z (fig. 2).

Los desplazamientos se interpolarán en forma cúbica dentro del elemento, para el cual es necesario fijar cuatro parámetros para cada desplazamiento, los cuales se indican en la fig. 3

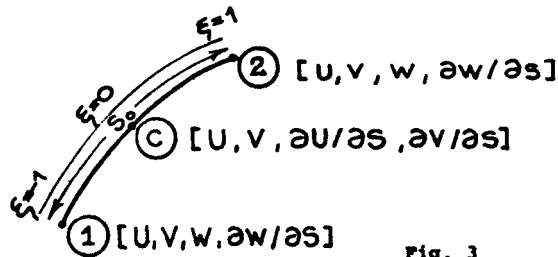


Fig. 3

Parametrizando en función de la longitud de arco, las funciones de interpolación resultan:

$$\begin{aligned}U &= \psi_1 U_1 + \psi_2 U_2 + \psi_3 U_C + \psi_4 \left(\frac{\partial U}{\partial s} \right)_1 \\ V &= \psi_1 V_1 + \psi_2 V_2 + \psi_3 V_C + \psi_4 \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_1 \\ W &= N_1 W_1 + N_2 \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)_1 + N_3 W_2 + N_4 \left(\frac{\partial W}{\partial s} \right)_2\end{aligned}\quad (7)$$

donde

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\xi^2}{2} (1 - \xi) \\ \psi_2 &= \frac{\xi^2}{2} (1 + \xi) \\ \psi_3 &= 1 - \xi^2 \\ \psi_4 &= \xi (1 - \xi^2) \frac{S_0}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

y

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (\xi^3 + 3\xi + 2) \\ N_2 &= \frac{1}{4} (\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1) \frac{S_0}{2} \\ N_3 &= \frac{1}{4} (-\xi^3 + 3\xi + 2) \\ N_4 &= \frac{1}{4} (\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1) \frac{S_0}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

Es importante destacar que para el ensamble de las matrices elementales, los desplazamientos de los nudos extremos (U, W en coordenadas locales) se expresan en función de desplazamientos en un sistema global según las dirección r, z (W, U . ver fig. 1) y en función del giro de la normal β_3 .

La elección de estos grados de libertad trae las siguientes ventajas:

- El elemento resulta isoparamétrico (en el sentido que la misma interpolación se usa para la geometría y para el desplazamiento w);
- Los desplazamientos U y V también resultan de interpolación cúbica, con lo que se obtiene una adecuada modelización y se evitan bloqueos del elemento.
- Permite tratar quiebres y cambios de curvatura bruscos en el meridiano, así como cáscaras ramificadas, al no establecer una excesiva continuidad cinemática en los nudos.

El planteo de la condición de estacionario del funcional (ec.4) se hace despreciando la parte no-lineal de las deformaciones membranales E_{ij} lo cual lleva a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales de la forma

$$K_j U_j + F_j = 0$$

para cada nodo circunferencial J. El cálculo de la matriz K_j y el vector F_j se realiza en forma numérica con tres puntos de integración (cuadrada de Gauss).

En cuanto al problema de estabilidad hasta el presente se ha previsto que la bifurcación se produzca para un número entero de ondas circunferenciales, lo que es cierto para cargas axilsimétricas, pero representa una simplificación para cargas no axilsimétricas. Este último caso puede tratarse usando los siguientes criterios: (a) tomar el meridiano más cargado y suponer que dicha carga es axilsimétrica, (b) realizar un análisis tensional no-axilsimétrico, buscar el meridiano más solicitado y suponer que esta sollicitación es axilsimétrica.

Para el problema de estabilidad entonces se hace primero un análisis tensional lineal para carga unitaria y luego con esta sollicitación se determina el factor que anula la segunda variación de la energía. Este planteo conduce con las simplificaciones realizadas a un problema lineal de autovalores de la forma

$$K_J \phi + \lambda K_{GJ} \phi = 0$$

donde K_{GJ} es la matriz de carga geometría para el modo circunferencial J , λ representa la carga crítica y ϕ el modo de deformación o modo de pandeo. La matriz K_{GJ} se calcula también en forma numérica con tres puntos de integración.

ANÁLISIS NUMÉRICO DEL ELEMENTO, COMPORTAMIENTO LINEAL ELÁSTICO.

Utilizando el elemento finito descrito se ha implementado un programa que realiza el análisis lineal elástico de láminas de revolución bajo carga arbitraria. Se han corrido ejemplos de los cuales se tienen soluciones explícitas con el fin de comparar los resultados del programa con soluciones exactas (9), así como ejemplos de los cuales se tienen resultados numéricos obtenidos con otros elementos.

Dentro de los ejemplos con solución cerrada conocida, se han modelado una placa circular empotrada con carga uniforme con 2, 4, 8 y 16 elementos con el fin de evaluar convergencia. En la fig. 5 se ha graficado el desplazamiento transversal en la unión entre elementos y el momento flector en los centros de elementos; estos valores comparados con la solución exacta muestran una excelente aproximación con sólo dos elementos. En la fig. 6 se muestra otro ejemplo, en este caso se trata de un domo esférico empotrado con carga uniforme, el que se ha modelado usando 10 elementos con la mayor densidad en el empotramiento; los gráficos de N_θ y M_θ muestran una excelente aproximación para esta malla medianamente gruesa. Finalmente se ha modelado un cilindro empotrado en un extremo con una carga puntual; se utilizaron 15 elementos con la mayor densidad en la zona de aplicación de la carga. En la fig. 7 se han graficado desplazamientos transversales y momentos flectores en la zona de aplicación de la carga, observándose una buena aproximación a los valores teóricos.

También se realizaron comparaciones con otras soluciones numéricas, aunque en este caso las mismas son en cierta forma cualitativas, pues sólo se dispone de los gráficos y no de los valores numéricos. En los casos estudiados todos los gráficos presentados coinciden con los trabajos originales. Los ejemplos corridos son:

- (a) Sector de esfera con un momento concentrado (2). En este caso se utilizaron 16 elementos con la mayor densificación en la

zona de aplicación de la carga. En la fig. 8 se muestran los diagramas de desplazamiento horizontal y momento flector M_{θ} . Es de hacer notar que se cumplen las condiciones naturales de borde.

- (b) Cáscaras compuestas, cilindro con esfera (4). Interesa en este caso el comportamiento del elemento cuando se produce una ramificación y cambio de espesor en la cáscara. En la fig. 9 se muestran el ejemplo corrido y los desplazamientos obtenidos usando 34 elementos.
- (c) Cono con carga lateral no-axilsimétrica (10). Se observa aquí el comportamiento del elemento cuando la carga es no-axilsimétrica. En la fig. 10 se muestran los desplazamientos calculados usando 10 elementos.
- (d) Torre de enfriamiento con viento y peso propio (11). Este ejemplo modelado con 23 elementos muestra una estructura con carga no-axilsimétrica que se ha descompuesto en 8 armónicas. En la fig. 11 los esfuerzos N_{θ} y N_{ϕ} en los meridianos más importantes.

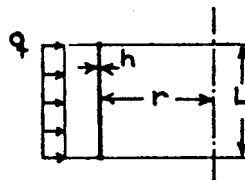
ANÁLISIS NUMÉRICO DEL ELEMENTO, CARGAS DE BIFURCACION.

Utilizando el elemento finito descrito se implementó un programa que determina cargas axilsimétricas de bifurcación. El análisis requiere primero la resolución del estado fundamental (axilsimétrico), y luego un problema de autovalores para cada armónica circunferencial, lo que permite determinar la menor carga crítica y el modo de deformación correspondiente.

Las primeras evaluaciones se realizaron utilizando modelos que con algunas simplificaciones en el análisis precrítico permitieron una minimización analítica de la carga crítica. Tales casos son:

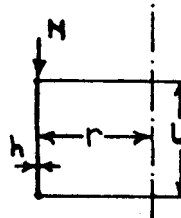
- a - Cilindro con carga lateral simplemente apoyado (12)

$$\begin{aligned} r &= 20 \\ L &= 20 \\ h &= 0,2 \\ E &= 10^7 \\ \nu &= 0,3 \end{aligned}$$



- b - Cilindro con carga axial simplemente apoyado (12)

misma geometría que (a)



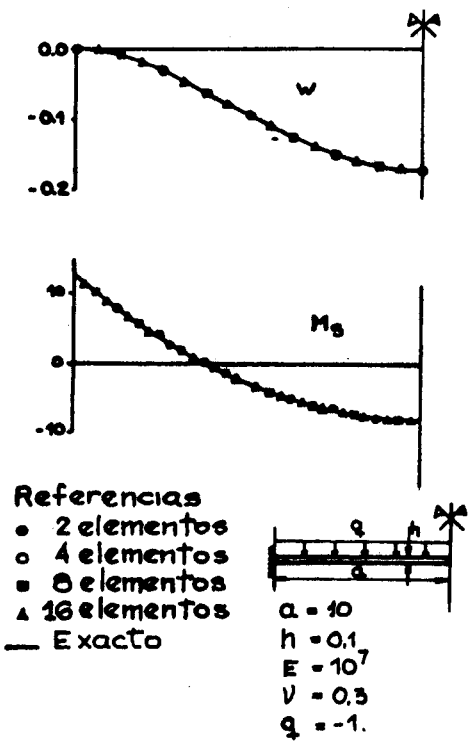


fig. 5 Placa circular empotrada con carga uniforme

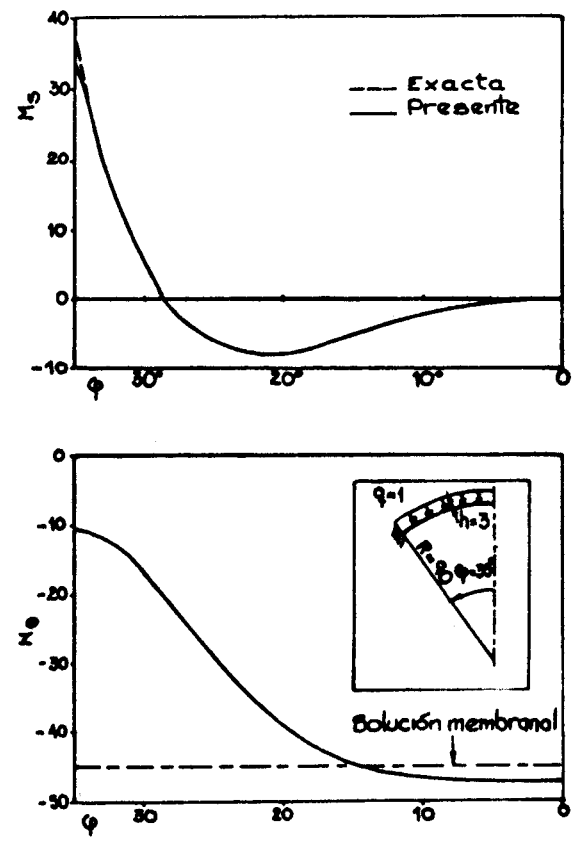


fig. 6 Domo empotrada bajo presión externa

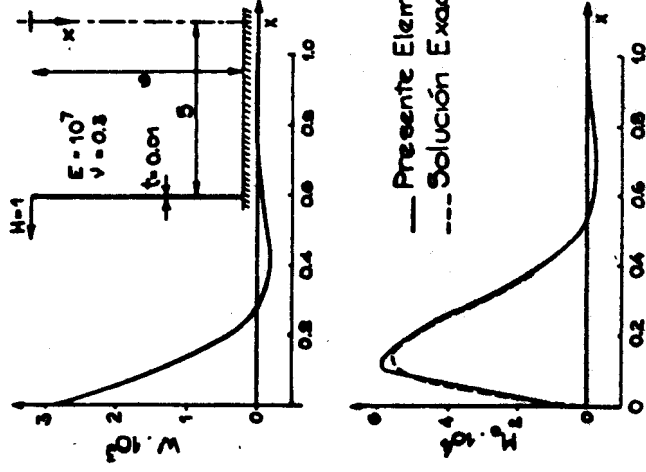


Fig. 7 Cilindro empotrado con carga en el borde

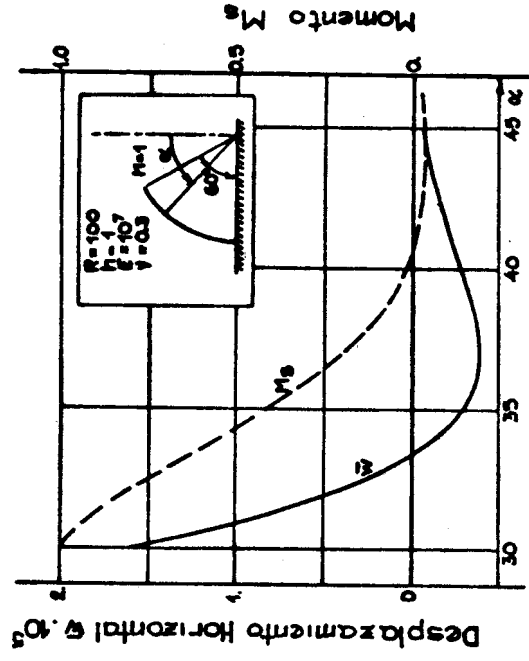


fig. 8. Sector de esfera con un momento concentrado

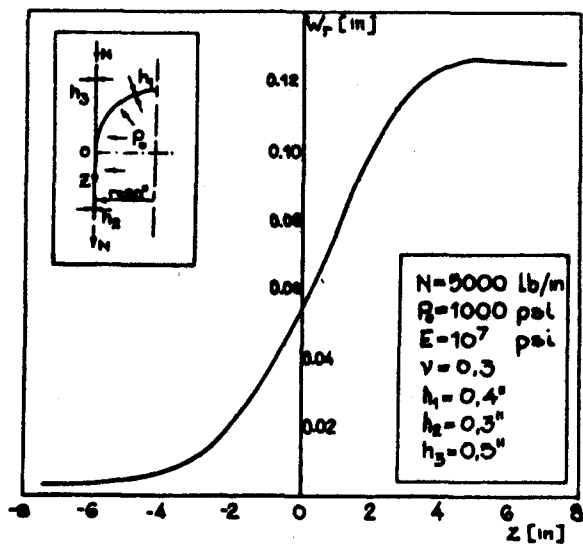


fig 9 w_r desplazamiento radial del cilindro

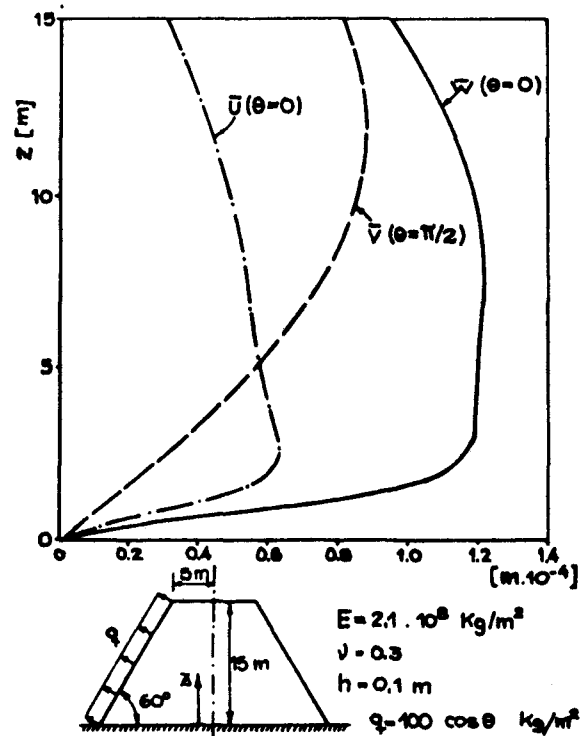
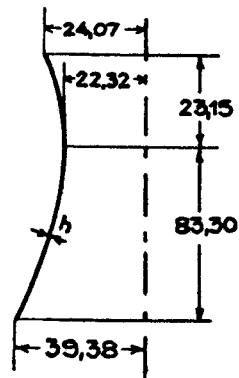
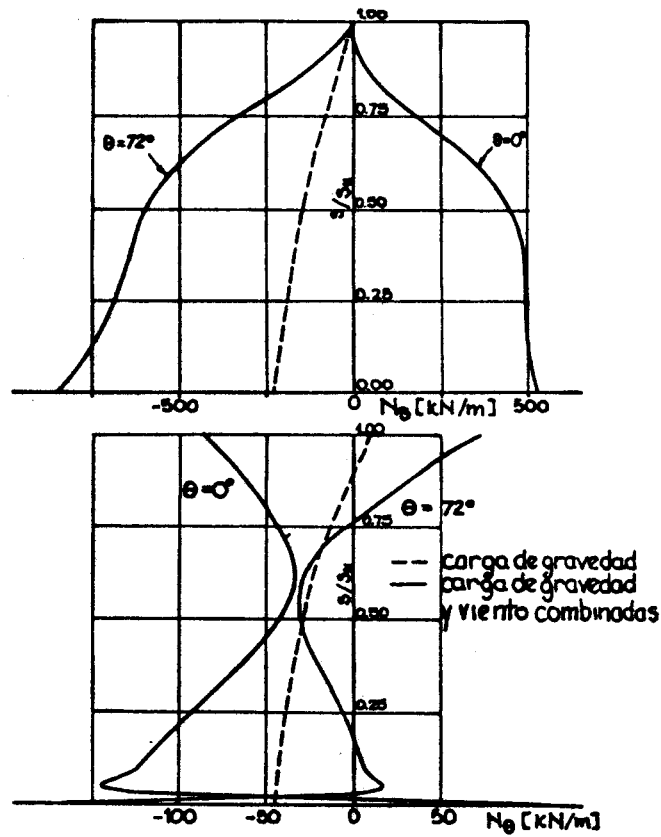


fig 10 Cono empotrado con carga antisimétrica



coeficientes de la descomposición
en armónicas del viento:

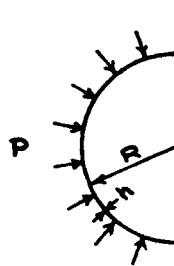
$a_0 = -0,00099$
 $a_1 = 0,34455$
 $a_2 = 0,87214$
 $a_3 = 0,68366$
 $a_4 = 0,15058$
 $a_5 = -0,13411$
 $a_6 = -0,01599$
 $a_7 = 0,06371$

$\delta = 22,5$
 $E = 2,59 \cdot 10^7$
 $\nu = 0,2$
 $h = 0,157$

fig 11 Torre de enfriamiento con carga de viento y peso propio

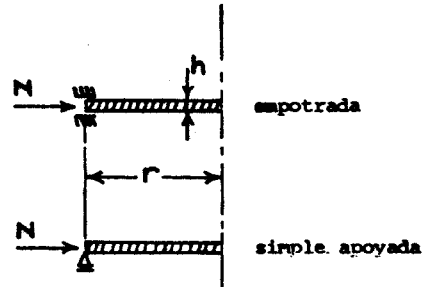
c - Esfera con presión externa (13)

$$\begin{aligned} R &= 10 \\ h &= 0,01 \\ E &= 10^6 \\ \nu &= 0,3 \end{aligned}$$



d - Placa circular comprimida en su plano (12)

$$\begin{aligned} r &= 10 \\ h &= 0,01 \\ E &= 10^6 \\ \nu &= 0,3 \end{aligned}$$



En la tabla 1 se indican los valores calculados con el presente y los obtenidos de la referencia. En todos los casos los valores teóricos y los numéricos practicamente coinciden.

CASO	TEORICO		NUMERICO	
	ARMONICA	CARGA CRITICA	ARMONICA	CARGA CRITICA
a	7	117	7	124
a	8	106	8	107
a	9	108	9	108
b	*	$0.605.2\kappa E h^2$	*	$0.605.2\kappa .E .h^2$
c	*	$1.21 \pi E \times 10^{-6}$	*	$1.21 \pi E \times 10^6$
d, empotrado	0	13.44	0	13.44
d, simpl. apoy.	0	3.84	0	3.84

Tabla 1. Cargas críticas y modos de deformaciones

* hay varias armónicas para el mismo valor de carga crítica.

También se realizaron análisis de bifurcación sobre estructuras geométricamente más complejas con el fin de comparar con otros modelos numéricos (5, 14, 15, 16, 19). Entre ellas mencionaremos dos:

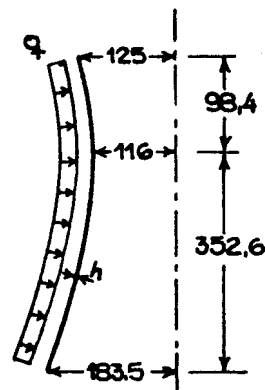
- (a) Torre de enfriamiento con presión lateral uniforme. La geometría es una hipérbola desplazada simplemente apoyada en el borde inferior y libre en el superior:

Esta estructura fue resuelta por medio de elementos finitos (15) encontrándose que la carga crítica mínima ocurría para $n=5$ y tenía valor de $P_c = 630$. El presente elemento predice la carga crítica para la misma armónica $n=5$ y un valor de $P_c = 637$.

$$E = 5,2 \cdot 10^8$$

$$V = 0,11$$

$$h = 0,083$$



- (b) Tanque de agua cónico-cilíndrico.

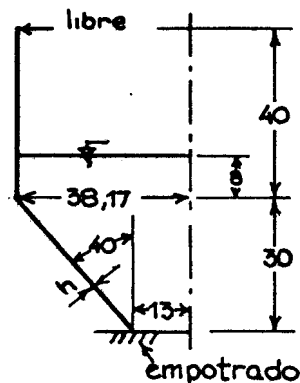
Esta estructura fue resuelta mediante programa de diferencias finitas (19), encontrándose un factor de carga mínima $P_c = 1,12$ para armónica $n = 14$.

Con el presente elemento el factor mínimo encontrado es $P_c = 1,10$ para la armónica $n = 13$.

$$E = 502850$$

$$V = 0,33$$

$$h = 0,025$$



DESPLAZAMIENTOS DE CUERPO RIGIDO.

En el caso de elementos unidimensionales de cáscara de revolución, los modos de desplazamiento de cuerpo rígido se reducen a dos: (a) giro alrededor del eje Z y (b) desplazamiento a lo largo del mismo.

El presente elemento presenta como modos de desplazamiento de cuerpo rígido en forma implícita al giro alrededor del eje Z para cualquier geometría del elemento y al desplazamiento a lo largo del eje Z para elementos rectos. Para el caso de elementos curvos en el plano meridiano, la formulación usada no permite cumplir en forma exacta el segundo de los desplazamientos de cuerpo rígido, apareciendo esfuerzos cuando se introducen desplazamientos de cuerpo rígido. Como ejemplo de ello se da un sector de esfera en el que se prefija el desplazamiento de un extremo en la dirección Z. En la fig. 12 se muestra la geometría usada y los máximos esfuerzos obtenidos usando dos elementos.

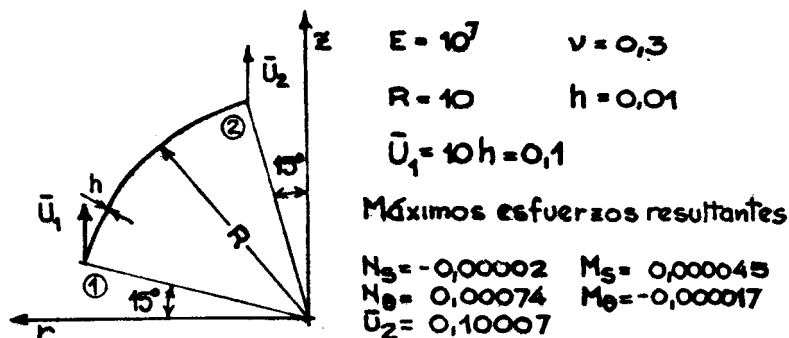


fig. 12 - Sector de esfera con desplazamiento prescrito

Con el objeto de evaluar el error de no poder representar en forma exacta el desplazamiento de cuerpo rígido, se han modelado dos ejemplos que aparecen en la literatura como casos de grandes desplazamientos.

El ejemplo de la fig. 13 ha sido previamente analizado con un elemento finito de sólido axilsimétrico por Zienkiewicz y Nayak (21) y con elemento de cáscara derivado de un sólido axilsimétrico por Surana (22). Este problema fue también analizado usando un elemento finito de cáscara delgado disponible en ANSYS y con distintas versiones de un elemento de 48 grados de libertad (g. de L.) con modos de cuerpo rígido (23).

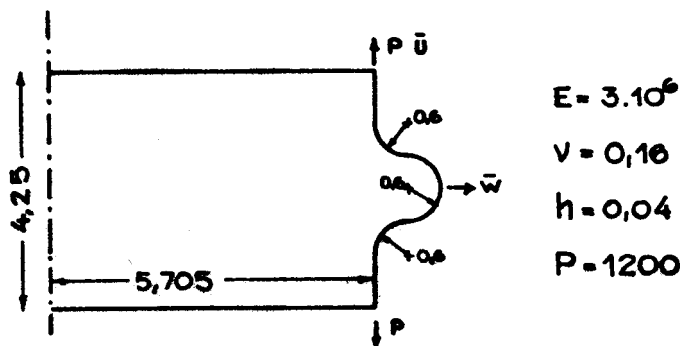


fig. 13

Los resultados están comparados en la tabla 2. La distribución de elementos (columna 1) sigue el siguiente esquema. El semitoroide tiene tres regiones de curvatura gaussiana positiva, negativa y nula. El número de elementos iniciales es 3, uno en cada región; el número se aumenta de a uno por vez rotando entre las tres regiones. Los elementos en cada región son del mismo tamaño. En la columna 2 se ve que el elemento de 48 g. de L. de cáscara delgada de doble curvatura con funciones de desplazamiento en coordenadas curvilíneas fracasa a pesar de aumentar la discretización. El mismo elemento mejorado con la técnica de

NO DE ELEMEN- TOS	DESPLAZAM. EN COORDENADAS CURVILINEAS		DESPLAZAM. EN COORDENADAS CURVILINEAS MAS TERMINOS EXPLICITOS DE MOVIM. DE CUERPO RIGIDO		DESPLAZAM. EN COORDENADAS CARTESIANAS		ZIENKIEWICZ Y NAYAK *		SURANA *		ANSYS 8		PRESENTE ELEMENTO	
	(1)	(2)	(3)		(4)		(5)		(6)		(7)		(8)	
	W	U	W	U	W	U	W	U	W	U	W	U	W	U
3	0.0234	0.00759	0.0889	-0.03981	0.0965	-0.03164							0.0985	-0.03215
4	0.0259	0.00571	0.1087	-0.04077	0.1013	-0.03182							0.1026	-0.03083
5	0.0365	0.00663	0.1295	-0.04033	0.1177	-0.03407							0.1217	-0.03331
6	0.0374	0.00657	0.1299	-0.04042	0.1179	-0.03409	0.0879	-0.03025A					0.1219	-0.03332
7	0.0374	0.00655	0.1313	-0.04042	0.1198	-0.03354							0.1225	-0.03339
8	0.0383	0.00657	0.1339	-0.04066	0.1226	-0.03367							0.1236	-0.03351
9	0.0390	0.00660	0.1342	-0.04074	0.1226	-0.03367							0.1236	-0.03352
10	0.0391	0.00661	0.1357	-0.04051	0.1230	-0.03357							0.1237	-0.03353
11	0.0398	0.00665	0.1385	-0.04082	0.1236	-0.03360							0.1239	-0.03355
12	0.0401	0.00668	0.1388	-0.04089	0.1236	-0.03360							0.1239	-0.03355
13	0.0402	0.00672	0.1410	-0.04051	0.1237	-0.03357							0.1239	-0.03356
14	0.0408	0.00679	0.1450	-0.04089	0.1239	-0.03358							0.1240	-0.03356
15	0.0413	0.00681	0.1452	-0.04094	0.1239	-0.03358							0.1240	-0.03356
16	0.0414	0.00687	0.1482	-0.04045	0.1239	-0.03357							0.1240	-0.03356
17	0.0420	0.00694	0.1531	-0.04088	0.1240	-0.03357	0.124	-0.034 *					0.1240	-0.03356
18	0.0424	0.00696	0.1533	-0.04093	0.1240	-0.03357	0.124	-0.034 *					0.1240	-0.03356
19	0.0426	0.00702	0.1569	-0.04034	0.1240	-0.03357								
30									0.1233	-0.033438				
60									0.1236	-0.033538				
120									0.1236	-0.033568				

Tabla 2 Desplazamientos \bar{u} y \bar{w} para la estructura de la fig. 13 usando distintos elementos y mallas

sarrollada por Cantin (24) (columna 3) aunque mejora la convergencia falla en predecir la respuesta correcta en un 30%. Este elemento de 48 g. de L. pero expresadas sus funciones de desplazamiento en coordenadas cartesianas obtiene si los mismos resultados obtenidos por (21 - 22) y con ANSYS (columna 4). El presente elemento (columna 6) predice los desplazamientos correctos cuando se refina la malla y converge un poco más rápidamente que el elemento de 48 g. de L. en coordenadas cartesianas.

El ejemplo de la fig. 14 muestra una estructura donde se producen giros importantes (del orden de 2° en la Zona de curvatura nula). Este caso también fue comparado con el elemento de doble curvatura de 48 g. de L. con desplazamientos en coordenadas cartesianas con modos de cuerpo rígido. Los resultados de los desplazamientos \bar{U} y los momentos M_g en los puntos 1, 2 y 3 se dan en la tabla 3 para cuatro mallas diferentes. Se da también una solución asintótica alternativa (25) y los resultados obtenidos usando 120 elementos cónicos con ANSYS. Los resultados muestran un buen acuerdo a medida que se refina la malla.

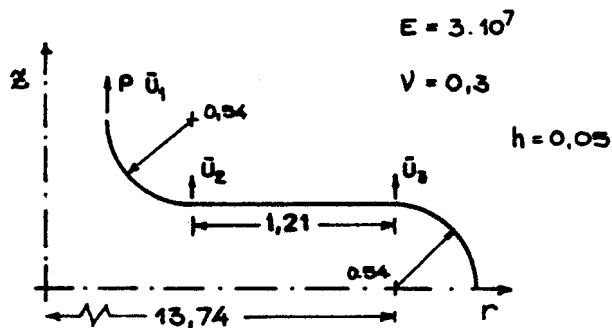


fig. 14

NO DE ELEMENT.	DESPLAZAMIENTOS			MOMENTOS FLECTORES		
	\bar{U}_1	\bar{U}_2	\bar{U}_3	ν_1	ν_2	ν_3
3	0.04941	0.04054	0.007614		-5.64	7.64
6	0.05595	0.04663	0.008932	-7.96	-5.64	8.73
9	0.05563	0.04743	0.009067	-9.52	-8.17	8.63
18	0.05693	0.04744	0.009106	-10.42	-8.73	8.59
3	0.04839	0.04094	0.007234	-8.45	-6.92	6.66
[23] 6	0.05636	0.04714	0.008946	-10.46	-8.70	8.31
18	0.05624	0.04745	0.009107	-10.59	-8.81	8.44
120 (ANSYS)	0.05683	0.04744	0.009105	-10.59	-8.49	8.53
[25]	0.05754	0.04804	0.009203	-10.56	-8.97	8.53

Tabla 3. Desplazamientos \bar{U} y momentos flectores M_g para una carga axial $P = 1200$.

CONCLUSIONES.

En el presente trabajo se han discutido las propiedades de un elemento finito curvo, semianalítico, de doce grados de libertad para el análisis de láminas de revolución. Los tipos de análisis de los que se presentan ejemplos son: análisis tensional lineal estático y determinación de cargas axilsimétricas de bifurcación.

De los ejemplos presentados puede concluirse que el elemento:

- converge rápidamente con el aumento del número de elementos tanto para el análisis tensional como para el cálculo de cargas de bifurcación;
- puede tratar sin dificultades cáscaras compuestas (intersección de dos o más cáscaras);
- permite cambios bruscos de pendiente y/o curvatura de la curva meridiana;
- puede considerar cargas y condiciones de borde arbitrarios;
- si bien el elemento no posee implícitamente uno de los modos de cuerpo rígido, con una malla no muy fina pueden obtenerse excelentes resultados cuando la estructura presenta desplazamientos importantes.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de CONICET durante el desarrollo del presente trabajo.

REFERENCIAS

- (1) Zienkiewics, O., Bauer, J. and Oñate, E., "A Simple and efficient Element for Axisymmetric Shells", Int. J. Num. Met. Engng. 2, 1545-1558, 1977 .
- (2) Grafton, P.R. and Strome, D.R., "Analysis of Axisymmetric Shells by the Direct Stiffness Method", J.A.I.A.A., vol. 1, 1963, pags. 2342-7 .
- (3) Stricklin, J.A., Navaratna, D.R. and Pian, T.H.H., "Improvements in the Analysis of Shells of Revolution by Matriz Displacement Methods (curved elements)", A.I.A.A.J., vol. 4, 1966, pags. 2069-72 .
- (4) Bushnell, D., "Finite Difference Energy Methods versus Finite Element Models, Two Variational Approaches in One Computer Program", Proc. O.M.R. Simp. Numer. Methods Struct. Mech., University of Illionois, Academic, New York, 1973.
- (5) Zintillis, G.M. and Croll, J.G.A., "Pressure Buckling of End Supported Shells of Revolution", Eng. Struct. vol. 4, 1982, pag. 222 .
- (6) Wilson, J.M., "Computational of Natural Frequencies of Axisymmetric Shells Using a Finite Element Displacement Method" .

- (7) Feijóo, R. y Tarocco, E., "Aplicación del método de elementos finitos en cáscaras axilsimétricas con cargamento axilsimétrico", Principios variacionales y el método de elementos finitos en la teoría de placas y cáscaras, Teoría de cáscaras y sus aplicaciones en ingeniería, vol II, LCC, Río de Janeiro, 1983.
- (8) Sanders, J.L., "Nonlinear Theories for Thin Shells", Quarterly of Applied Mechanics, vol. 21, 1963, pags. 21-36 .
- (9) Timoshenko and Woinowsky Krieger, Theory of Plates and Shells, Mc. Graw Hill, 1940.
- (10) Zarrazin, M. and Jensen, J., "Axisymmetric Shells for Non-symmetric Loads: An Exact Conical Element Approach", Adv. Engng. Software, vol. 6, N° 3, pags. 148-155.
- (11) Ellinas, Ch., Croll, J.G.A. and Kemp, K., "Cooling Towers with Circunferencial Imperfections", J. Struct. Div. ASCE, dec. 1980, pag. 2405 .
- (12) Brush, D. and Almroth, B., Buckling of Bars Plates and Shells, cap. 5 y 6, Mc. Graw Hill, 1975 .
- (13) Godoy, L.A., "Contribuciones energéticas en modos críticos para esferas bajo presión", Revista brasileira de Engenharia, vol 3, 1985, pags. 19-35.
- (14) Cole, P., Abel, J. and Billington, D., "Buckling of Cooling Towers Shells: State of the Art", J. Struct. Div. ASCE, jun. 1985, pag. 1185.
- (15) Cole, P., Abel, J. and Billington, D., "Buckling of Cooling Towers Shells: Bifurcation Results", J. Struct. Div. ASCE, jun. 1975, pag. 1205 .
- (16) Zintillis, G.M. and Croll, J.G.A., "Combined Axial and Pressure Buckling of End Supported Shells of Revolution", Eng. Struct. vol. 5, 1983, pag. 199 .
- (17) Zienkiewics, O., The Finite Element Method, cap. 14 y 15, Mc Graw Hill, 1977
- (18) Henshell, R.D. Bond, T.J. and Makoju, J.O., "Ring Finite Element for Axisymmetric and Non-axisymmetric Thin Shell Analysis", Paper N° 4/45 en Variational Methods in Engng. , Editors C.A. Brebbia and H. Tottenham, Southampton, Southampton University Press, 1973.
- (19) Bushnell, D., "Buckling of Shells - Pitfall for Designers", A.I.A.A. Journal, vol 19, N°9, 1981, pag. 1183.
- (20) Bushnell, D., "Stress Stability and Vibration of Complex Branched Shells of Revolution", Computers and Structures, vol. 4, 1974, pags. 339-435, Pergamon Press.

- (21) Zienkiewicz, O.C. y Nayak, G.C., "A General Approach to Problems of Plasticity and Large Deflections Using Finite Elements", Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson A.F. Base Ohio, 1971.
- (22) Surana, K.S., "Geometrically Non-linear Formulation for the Axisymmetric Shell Elements", I.J.N.M. Engng., vol. 18, 1982, pag. 477-502.
- (23) Moore, C.J., Yang, T.Y. y Anderson, D.C., "A New 48 D.O.F. Quadrilateral Shell Element with Variable Order Polynomial and Rational B-spline Geometries with Rigid Body Modes", I.J.N.M. Engng., vol. 20, 1984, pag. 2121-2141.
- (24) Cantin, G., "Rigid Body Modes in Curved Finite Elements", A.I.A.A.J., vol. 8, 1970, pag. 1252-1255.
- (25) Laupa, A. y Weil, N.A., "Analysis of U-Shaped Expansion Joints", J. Appl. Mech., ASME, marzo de 1962, pag. 115-123.