

FORMULAÇÃO DE UM ELEMENTO TRIANGULAR
PARA ANÁLISE DE PLACAS COM ESPESSURA VARIÁVEL

José A. Ávila
Jorge Mello e Souza
Seção de Engenharia Mecânica.
Instituto Militar de Engenharia.
Rio de Janeiro - Brasil.

RESUMO

Este trabalho desenvolve a solução do problema de uma placa de forma qualquer e espessura variável, através de um elemento triangular de seis pontos nodais e três graus de liberdade.

Foram levantadas as dezoito funções interpoladoras de Hermite, que permitem minimizar o funcional e obter os deslocamentos nodais.

Complementando a solução, obtém-se os esforços, tensões e tensões equivalentes nos nós.

ABSTRACT

This work develops the solution of a plate of any shape and variable thickness, using a triangular element with six nodal points and three degrees of freedom.

The eighteen interpolating functions of Hermite were determined, and they allow to minimize the functional and to obtain nodal displacements.

Stresses, moments, shear forces and equivalent stresses are obtained, completing the solution.

1 - INTRODUÇÃO

Foi desenvolvido um elemento de placa capaz de admitir a variação de espessura no seu interior, tendo sido necessário estender o espaço de soluções admissíveis ao espaço de Sobolev.

O algoritmo estabelecido para se chegar à solução, embora seguindo a linha geral daqueles existentes na literatura[1], distingue-se pelo elevado número de operações e de transformações exigidas na obtenção de cada termo da matriz de rigidez do elemento.

De posse da equação de governo da placa[2] e das condições de contorno, adotou-se a alternativa dos métodos aproximados; com o uso da formulação variacional baixou-se a ordem das derivadas a que as funções de forma devem atender, reduzindo-se as exigências do contorno.

Para atender à continuidade C^1 definiram-se três graus de liberdade por ponto nodal; para garantir a compatibilidade, entretanto, estabeleceu-se o ponto nodal no meio do lado; assim, haverá uma única rotação normal entre as interfaces, resultando um elemento não-conforme mas compatível.

2 - O OPERADOR DIFERENCIAL [3]

A equação diferencial da placa, considerando-se as hipóteses de Kirchhoff, tem a seguinte forma:

$$\nabla^2(D\nabla^2 w) - (1-\nu) f(D,w) = f \quad (1)$$

onde

$w = w(x,y)$ é o campo de deslocamentos no domínio da placa;

$D = D(x,y)$ é o Coeficiente de Rigidez da Placa no ponto (x,y) ;

$\nabla^2 =$ é o laplaciano;

$\nu =$ coeficiente de Poisson

o operador $f(D,w)$ é expresso por:

$$f(D,w) = (Dw,_{yy})_{,xx} - 2(Dw,_{xy})_{,xy} + (Dw,_{xx})_{,yy}$$

$f =$ a componente vertical do carregamento externo

A equação (1) desenvolvida toma a forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[2(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] = f \end{aligned} \quad (2)$$

Verifica-se que a equação (1) pode ser expressa pelo operador diferencial elíptico de ordem $2k$ com a seguinte forma:

$$A = \sum_{|i|, |j| < K} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j) \quad (3)$$

onde

$i = (i_1, \dots, i_N)$ e $j = (j_1, \dots, j_N)$ são vetores N -dimensionais, cujas coordenadas são inteiros positivos;

$|i| = i_1 + \dots + i_N$; $|j| = j_1 + \dots + j_N$;

$a_{ij} = a_{ij}(x)$ são funções definidas no domínio G ;

$$D^i = \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_N}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N}} = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N}}$$

O Operador A é definido num espaço $W_2^{(k)}(G)$, no qual o produto interno é expresso pela relação

$$(u, v)_{W_2^{(k)}} = \sum_{|i| < K} \int_G D^i u D^i v dx, \quad u \text{ e } v \in W_2^{(k)}$$

Se os coeficientes $a_{ij}(x)$ do Operador A , bem como as funções $w(x)$ forem suficientemente regulares no domínio, isto é, se $a_{ij}(x) \in C^i(G)$ e $w(x) \in C^{(2k)}(G)$, a aplicação do operador A às funções $w(x)$ é possível.

Fazendo-se:

$$k = 2 \text{ e } N = 2;$$

$$a_{2,0;2,0} = a_{0,2;0,2} = D;$$

$$a_{2,0;0,2} = a_{0,2;2,0} = \nu D;$$

$$a_{1,1;1,1} = 2(1-\nu)D;$$

$$a_{ij} = 0 \text{ nos demais casos};$$

a aplicação do Operador A sobre $\bar{w}(x,y)$, para os coeficientes a_{ij} acima, resulta na equação (4) que é a própria equação (2).

$$A\bar{w} = \sum_{|i|, |j| < 2} D^i (a_{ij} D^j \bar{w}) = f \quad (4)$$

Prova-se que o operador A é uniformemente elíptico.

3 - SOLUÇÃO FRACA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

Considerando a equação (2) como o resultado da aplicação do operador A sobre $w(x,y)$, a solução fraca no espaço $W_2^{(2)}(G)$ necessita ter apenas derivadas segundas em G . Formalmente, se $f \in L_2(G)$ e a_{ij} são funções medidas no sentido de Lebesgue em G , então a função $w \in W_2^{(2)}(G)$ é definida como a solução fraca da equação

$$Aw = f \quad (5)$$

Se

$$\sum_{|i|, |j| < 2} a_{ij} D^i \varphi D^j w \, dx = (\varphi, f) \quad (6)$$

for válida para toda função $\varphi \in C_0^{(\infty)}(G)$.

O membro esquerdo da equação (6) é chamado de forma bi-linear e representa-se pela relação abaixo:

$$A(\varphi, w) = \sum_{|i|, |j| < 2} a_{ij} D^i \varphi D^j w \, dx \quad (7)$$

A equação (7), acrescida da forma bi-linear no contorno, torna-se então

$$((\varphi, w)) = A(\varphi, w) + a(\varphi, w) \quad (8)$$

Chegou-se finalmente, para condições de contorno homogêneas, à expressão na forma abaixo:

$$((v, u)) = (v, f) \quad (9)$$

A equação (9) é definida como a solução fraca do problema de valor de contorno, se e somente se minimizar o funcional

$$Fv = ((v, u)) - 2(v, f) \quad (10)$$

4 - SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Discretizando o domínio em subdomínios, definindo funções interpoladoras locais [4], de modo a constituir uma base para este subespaço de dimensão finita, pode-se gerar uma aproximação de elementos finitos.

Chamam-se $\varphi_i(r, s)$ as funções interpoladoras num sistema de coordenadas locais r, s , definidas para o elemento triangular com seis pontos nodais e três graus de liberdade por ponto. Na figura seguinte é representado o elemento triangular com seis pontos nodais referidos ao sistema local.

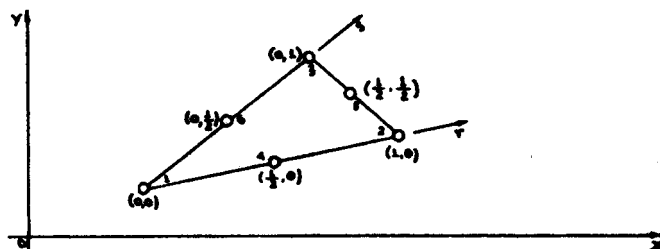


Figura 1 - Elemento Triangular com 6 PN e 18 GL

Admite-se que a solução seja aproximada por

$$\bar{w}(x,y) = \sum_{i=1}^{18} \bar{w}_i \varphi_i(x,y) \quad (11)$$

onde $\varphi_i(x,y)$ são elementos de uma base no espaço $Vc \bar{W}_2^{(2)}(G)$ e \bar{w}_i são coeficientes determinados a partir da condição de minimização do funcional, representado pela equação (10)

Substituindo a equação (11) na equação (10), derivando e igualando a zero obtêm-se

$$\sum_{i=1}^{18} [\bar{w}_i ((\varphi_i, \varphi_j)) - (\varphi_i, f)] = 0 \quad (12)$$

para $j = 1, \dots, 18$

Desenvolvendo a equação (12), em termos de funções interpoladoras locais, tem-se:

$$\begin{bmatrix} ((\varphi_1, \varphi_1)) & ((\varphi_1, \varphi_2)) & ((\varphi_1, \varphi_3)) & \dots & ((\varphi_1, \varphi_{18})) \\ ((\varphi_2, \varphi_1)) & ((\varphi_2, \varphi_2)) & ((\varphi_2, \varphi_3)) & \dots & ((\varphi_2, \varphi_{18})) \\ ((\varphi_3, \varphi_1)) & ((\varphi_3, \varphi_2)) & ((\varphi_3, \varphi_3)) & \dots & ((\varphi_3, \varphi_{18})) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ((\varphi_{18}, \varphi_1)) & ((\varphi_{18}, \varphi_2)) & ((\varphi_{18}, \varphi_3)) & \dots & ((\varphi_{18}, \varphi_{18})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \dots \\ W_{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_1, f) \\ (\varphi_2, f) \\ (\varphi_3, f) \\ \dots \\ (\varphi_{18}, f) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Isolando um termo genérico da equação (13) e desenvolvendo-o segundo as equações (12) e (13), vem:

$$\begin{aligned} ((\varphi_s, \varphi_t)) &= \int_G D \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x^2} dx dy + \int_G v D \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial y^2} dx dy + \\ &+ \int_G v D \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x^2} dx dy + \int_G D \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial y^2} dx dy + \\ &+ \int_G 2(1-v) D \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x \partial y} dx dy \end{aligned} \quad (14)$$

A equação (13) toma a forma compacta abaixo:

$$[K^e] \{w\} = \{F\} \quad (15)$$

onde

$[K^e]$ é a matriz de rigidez local;
 $\{w\}$ é o vetor de deslocabilidades locais;
 $\{F\}$ é o vetor carregamento externo aplicado nos pontos nodais.

4.1 - Funções de Interpolação

1 - Funções de Forma

Escolhido o elemento triangular com seis pontos nodais, de modo a garantir a continuidade, faz-se necessário determinar três funções de interpolação por ponto nodal, tal que, para um ponto i do elemento:

- a) a função $\varphi_{(3i-2)}$ tenha valor unitário no ponto i e seja nula nos demais; suas derivadas primeiras em relação a r, s sejam nulas em todos os pontos;
- b) a função $\varphi_{(3i-1)}$ seja nula e tenha derivada primeira em relação a s nula em todos os pontos; sua derivada primeira em relação a r seja de valor unitário no ponto i e seja nula nos demais;
- c) a função φ_{3i} seja nula e tenha derivada primeira em relação a r nula em todos os pontos; sua derivada primeira em relação a s seja de valor unitário no ponto i e seja nula nos demais.

Estas funções $\varphi_i(r, s)$, são as funções de interpolação hermitianas. Foram obtidas com o auxílio dos polinômios de Lagrange e apresentam a forma geral[4] abaixo:

$$\varphi(r, s) = \sum_{i=1}^6 f(r_i, s_i) \phi_i(r, s) + \sum_{i=1}^6 f_{,r}(r_i, s_i) \psi_i(r) + \sum_{i=1}^6 f_{,s}(r_i, s_i) \psi_i(s) \quad (16)$$

onde

$f(r_i, s_i)$ - é o valor da função de interpolação no ponto i ;
 $f_{,r}(r_i, s_i)$ e $f_{,s}(r_i, s_i)$ - são os valores das derivadas primeiras da função de interpolação em relação a r, s no ponto i ;

$$\begin{aligned} \phi_i(r, s) &= \{1 - 2[\mathcal{L}_{i,r}(r_i, s_i)](r - r_i)\} \mathcal{L}_i^2(r, s) \\ \psi_i(r) &= (r - r_i) \mathcal{L}_i^2(r, s) \end{aligned} \quad (17)$$

ou

$$\begin{aligned} \phi_i(r, s) &= \{1 - 2[\mathcal{L}_{i,s}(r_i, s_i)](s - s_i)\} \mathcal{L}_i^2(r, s) \\ \psi_i(s) &= (s - s_i) \mathcal{L}_i^2(r, s) \end{aligned} \quad (18)$$

As funções $\phi_i(r, s)$ e $\psi_i(r, s)$ são geradas por meio de:

$\mathcal{L}_i(r, s)$ - são polinômios de Lagrange nos pontos i ;

$\ell_{i,r}(r_i, s_i)$ e $\ell_{i,s}(r_i, s_i)$ - são os valores das derivadas primeiras dos polinômios de Lagrange em relação a r, s nos pontos i .

As dezoito funções de interpolação hermitianas obtidas são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(r, s) &= (1-6r)(1+6s)(1-r-s)^2(1-2r-2s)^2 & (a) \\
 \varphi_2(r, s) &= r(1-r-s)^2(1-2r-2s)^2 & (b) \\
 \varphi_3(r, s) &= s(1-r-s)^2(1-2r-2s)^2 & (c) \\
 \varphi_4(r, s) &= (7-6r)(-r+2r^2)^2 & (d) \\
 \varphi_5(r, s) &= (r-1)(-r+2r^2)^2 & (e) \\
 \varphi_6(r, s) &= s(-r+2r^2)^2 & (f) \\
 \varphi_7(r, s) &= (7-6s)(-s+2s^2)^2 & (g) \\
 \varphi_8(r, s) &= r(-s+2s^2)^2 & (h) \\
 \varphi_9(r, s) &= (s-1)(-s+2s^2)^2 & (i) \quad (19) \\
 \varphi_{10}(r, s) &= (1+4s)[4r(1-r-s)]^2 & (j) \\
 \varphi_{11}(r, s) &= (r-0.5)[4r(1-r-s)]^2 & (k) \\
 \varphi_{12}(r, s) &= s[4r(1-r-s)]^2 & (l) \\
 \varphi_{13}(r, s) &= (3-4r)(3-4s)(4rs)^2 & (m) \\
 \varphi_{14}(r, s) &= (r-0.5)(4rs)^2 & (n) \\
 \varphi_{15}(r, s) &= (s-0.5)(4rs)^2 & (o) \\
 \varphi_{16}(r, s) &= (1+4r)[4s(1-r-s)]^2 & (p) \\
 \varphi_{17}(r, s) &= r[4s(1-r-s)]^2 & (q) \\
 \varphi_{18}(r, s) &= (s-0.5)[4s(1-r-s)]^2 & (r)
 \end{aligned}$$

2 - Geometria

Para o mapeamento da geometria faz-se uso das funções de interpolação Lagrangianas para os vértices, em coordenadas locais r, s , da forma abaixo:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(r, s) &= 1-r-s & a) \\
 \gamma_2(r, s) &= r & b) \\
 \gamma_3(r, s) &= s & c)
 \end{aligned} \quad (20)$$

3 - Coeficiente de Rigidez

Na obtenção da equação de governo, definiu-se a expressão do Coeficiente de Rigidez, em coordenadas globais x, y , conforme se apresenta a seguir:

$$D(x, y) = \frac{E N^3(x, y)}{12(1-\nu^2)} \quad (21)$$

simplificadamente $D(x, y)$ é dada por:

$$D(x, y) = D_0 h^3(x, y) \quad (22)$$

onde

$$D_0 = \frac{E}{12(1-\nu^2)}$$

Considerando que a espessura do elemento triangular varia linearmente e que é conhecida nos vértices, obteve-se a função Coeficiente de Rigidez em coordenadas locais r, s , com a seguinte forma:

$$D(r, s) = D_0 [h_1 + (h_2 - h_1)r + (h_3 - h_1)s]^3 \quad (23)$$

onde h_1, h_2 e h_3 são as espessuras nos vértices.

5 - ESTUDO DAS TRANSFORMAÇÕES

Optou-se por trabalhar o elemento triangular num sistema de coordenadas naturais r, s , a que se chamará sistema de referência, devido às facilidades que propicia, tanto na elaboração como na operação do programa de computador; entre tanto, o que se busca é a solução do problema no sistema real. Há necessidade de se prover uma transformação que permita o uso das comodidades do sistema de referência, e que ao mesmo tempo, produza a solução no sistema real.

Para operar a equação (14), enunciada no sistema real, através de funções obtidas no sistema de referência, deve-se efetuar as seguintes transformações[5]:

1. transformação da geometria;
2. transformação do integrando;
3. transformação das deslocabilidades.

5.1 - Transformação da geometria

Exprimindo x e y como combinações lineares das coordenadas nos vértices, tem-se:

$$x = x(r, s) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(r, s)x_i$$

$$y = y(r,s) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(r,s) y_i$$

$\gamma_i(r,s)$ são fornecidas pelas equações (20).

Expressando os vetores unitários do sistema real em relação aos unitários do sistema de referência, obtém-se:

$$dx dy = \det[J] dr ds \quad (24)$$

onde $\det[J]$ é o jacobiano da transformação.

5.2 - Transformação do integrando

Considerando que são nulas as derivadas dos termos da matriz $[J]$, obtém-se para a transformação do integrando a seguinte relação:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = [T_2] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial r \partial s} \end{array} \right\} \quad (25)$$

onde

$$[T_2] = \left[\begin{array}{ccc} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2 j_{11} j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2 j_{21} j_{22} \\ j_{11} j_{21} & j_{12} j_{22} & (j_{11} j_{22} + j_{12} j_{21}) \end{array} \right] \quad (26)$$

$j_{\alpha\beta}$ são os termos da inversa da matriz $[J]$.

5.3 - Transformação das deslocabilidades

Como a solução deve ocorrer no sistema real é necessário adaptar as deslocabilidades obtidas no sistema de referência para o sistema real.

A equação (11) supõe uma aproximação de solução no sistema real, da forma

$$\bar{w}(x,y) = \sum_{i=1}^{18} \bar{w}_i \bar{\varphi}_i(x,y)$$

O que se usou até aqui, entretanto, foram funções interpoladoras locais, de modo que no sistema de referência se tenha

$$w(r,s) = \sum_{i=1}^{18} w_i \psi_i(r,s) \quad (27)$$

A relação entre $\bar{w}(x,y)$ e $w(r,s)$ chamar-se-á adaptação.

Para a obtenção da matriz de transformação das deslocabilidades, vai-se operar apenas no ponto nodal 1, sabendo-se que o estabelecido para o ponto 1 aplica-se aos outros pontos do elemento.

Derivando $\bar{w}(x,y)$ em relação a r e igualando a derivada de $w(r,s)$ em relação a r , vem:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial r} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (28)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \right\} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \right\} \frac{\partial y}{\partial r}$$

desenvolvendo e simplificando obtém-se:

$$w_2 = \bar{w}_2 \frac{\partial x}{\partial r} + \bar{w}_3 \frac{\partial y}{\partial r} \quad (30)$$

Usando o mesmo procedimento em relação a s , obtém-se:

$$w_3 = \bar{w}_2 \frac{\partial x}{\partial s} + \bar{w}_3 \frac{\partial y}{\partial s} \quad (31)$$

Fazendo agora

$$w = \bar{w}$$

desenvolvendo e simplificando chega-se a

$$w_1 = \bar{w}_1 \quad (32)$$

Exprimindo as equações (30), (31) e (32) na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Desenvolvendo a equação (27), no ponto 1, vem:

$$w(r,s) = w_1\varphi_1 + w_2\varphi_2 + w_3\varphi_3 \quad (34)$$

Substituindo as equações (30), (31) e (32) na equação (34), tem-se:

$$w(r,s) = \bar{w}_1\varphi_1 + \left\{ \bar{w}_2 \frac{\partial x}{\partial r} + \bar{w}_3 \frac{\partial y}{\partial r} \right\} \varphi_2 + \left\{ \bar{w}_2 \frac{\partial x}{\partial s} + \bar{w}_3 \frac{\partial y}{\partial s} \right\} \varphi_3 \quad (35)$$

na forma matricial:

$$w(r,s) = \{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Pode-se obter $\bar{w}(x,y)$ baseado nas funções de forma do sistema de referência, desenvolvendo a equação (11) no ponto 1 e substituindo $\bar{\varphi}_i$ por φ_i da equação (35), ou seja:

$$\bar{w}(x,y) = \bar{w}_1\bar{\varphi}_1 + \bar{w}_2\bar{\varphi}_2 + \bar{w}_3\bar{\varphi}_3 \quad (37)$$

como $w = \bar{w}$, vem:

$$\bar{w}(x,y) = \bar{w}_1\varphi_1 + \bar{w}_2 \left\{ \frac{\partial x}{\partial s} \varphi_2 + \frac{\partial x}{\partial s} \varphi_3 \right\} + \bar{w}_3 \left\{ \frac{\partial x}{\partial r} \varphi_2 + \frac{\partial y}{\partial s} \varphi_3 \right\} \quad (38)$$

na forma matricial:

$$\bar{w}(x,y) = \{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

a equação (11) assume a forma global abaixo:

$$\bar{w}(x,y) = \{\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \dots \varphi_{16} \varphi_{17} \varphi_{18}\} \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ [J] \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ [J] \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{w}_{16} \\ \bar{w}_{17} \\ \bar{w}_{18} \end{Bmatrix} \quad (40)$$

Desta forma pode-se garantir que embora se trabalhe no sistema de referência, a solução é obtida no sistema real.

Para a determinação de cada um dos termos $((\psi, \psi))$, definidos pela equação (14), usar-se-á o método de integração numérica de Gauss-Legendre, com sete pontos de integração, no elemento triangular.

A matriz de rigidez obtida, afetada das condições de contorno que incidem sobre os pontos nodais do elemento, e adicionada à matriz de rigidez global a qual estará completa após o processamento de todos os elementos.

6 - OBTENÇÃO DOS DESLOCAMENTOS

De posse do carregamento aplicado aos nós da placa e da matriz de rigidez global, obtém-se o sistema de equações abaixo:

$$[K] \{w\} = \{F\} \quad (41)$$

A solução da equação (41) fornecerá os deslocamentos nodais procurados.

Para resolver a equação (41), usa-se a técnica de solução direta, através de algoritmo baseado no método de eliminação de Gauss.

A matriz de rigidez $[K]$, obtida em decorrência da aplicação do operador diferencial elíptico, é simétrica e positiva definida; pode-se afirmar que a estrutura da placa é estável e que os termos da diagonal, à medida que forem definidos os pivôs, serão sempre positivos. Em decorrência desta propriedade, a solução da equação (41) pelo método de eliminação de Gauss é de elevada eficácia, chegando-se rapidamente às deslocabilidades.

7 - OBTENÇÃO DAS TENSÕES

Admitidas a relação linear entre tensão e deformação, as simetrias em relação aos planos coordenados, bem como as isotropias nestes planos, as equações constitutivas fornecem para as tensões:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right] \quad (42)$$

Abandonando na deformação da placa, a influência das componentes do tensor das tensões relacionadas com a direção normal à superfície média, chega-se para o estado plano a:

$$\sigma_{\alpha\beta} = - \frac{zE}{1-\nu^2} \left[(1-\nu)w_{,\alpha\beta} + \nu\delta_{\alpha\beta} w_{,\lambda\lambda} \right] \quad (43)$$

Observa-se que os esforços e tensões serão obtidos a partir do campo de deslocamentos, levantado para cada ele-

mento, em presença das deslocabilidades calculadas nos pontos nodais.

Vai-se definir um polinômio de quinta ordem que contenha cada um dos deslocamentos. Como o polinômio completo possui 21 termos, far-se-á a condensação de três termos de modo a manter a propriedade de simetria do campo.

Assim, w , w_x e w_y assumem as seguintes formas:

$$w(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + \dots + a_{16}(x^5 + y^5) + a_{17}(x^4y + xy^4) + a_{18}(x^3y^2 + x^2y^3) \quad (44)$$

$$w_x(x,y) = a_2 + 2a_4x + a_5y + 3a_7x^2 + \dots + 5a_{16}x^4 + a_{17}(4x^3y + y^4) + a_{18}(3x^2y^2 + 2xy^3) \quad (45)$$

$$w_y(x,y) = a_3 + a_5x + 2a_6y + a_8x^2 + \dots + 5a_{16}y^4 + a_{17}(x^4 + 4xy^3) + a_{18}(2x^3y + 3x^2y^2) \quad (46)$$

Desenvolvendo as equações (44), (45) e (46) para os pontos nodais do elemento, obtém-se o sistema que resolvido fornece os coeficientes a_i , $i=1, \dots, 18$ de modo a definir o campo de deslocamentos no domínio do elemento.

A partir daí chegam-se às derivadas segundas dos deslocamentos e do operador harmônico.

O coeficiente de rigidez, cujos coeficientes são obtidos através do sistema de equações que relacionam as espessuras conhecidas dos vértices do elemento, é dado pela expressão na forma:

$$D = D_0 (a_1 + e_2x + e_3y)^3 \quad (47)$$

A partir da equação (47) obtém-se as derivadas do coeficiente de rigidez em relação aos eixos coordenados.

Finalmente pode-se calcular os esforços e as tensões que ocorrem nos pontos nodais dos elementos.

As tensões obtidas são comparadas com aquela capaz de levar o material à plastificação, obtida segundo o critério de Von Mises[6] que neste caso assume a forma:

$$\sigma_e = [(\sigma_x - \sigma_y)^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2]^{1/2} \quad (48)$$

8 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Bathe, K.J., Finite element procedures in engineering analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1982.
- [2] Szilard, R., Theory and analysis of plates: classical and numerical methods, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1974.

- [3] Rektorys, K., Variational methods in mathematics, science and engineering, D. Reidel Publishing Company, Inc., Praga, 1977.
- [4] Prenter, P.M., Splines and variational methods, John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [5] Dhatt, G. e Touzot, G., Une presentation de la méthode des éléments finis, Malone S.A. Editeur, Paris, 1981.
- [6] Ávila, J.A., Tensões em Empenas de Mísseis, Tese de Magtrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 1986.