

ELEMENTO DE PLACA DE CONTINUIDAD C^0 , LAGRANGIANO
SUPRESION DEL BLOQUEO Y MODOS ESPURIOS

Carmelo Militello
Daniel H. Cascales
INGAR - Instituto de Desarrollo y Diseño
Avellaneda 3657
Santa Fe - Argentina

RESUMEN

Se desarrolla un elemento de placa fina a moderadamente gruesa, Lagrangiano, de nueve nodos, siguiendo la teoría de Mindlin. Las componentes de la deformación cortante en la base covariante se aproximan mediante polinomios de menor orden, que los obtenidos directamente de las relaciones cinemáticas (deformación, desplazamiento) asociadas al elemento; con ello se evita el fenómeno de bloqueo y la aparición de modos espurios. Se analiza su capacidad de copiar estados de deformación constante y lineales (Patch test) para configuraciones con lados rectos y curvos.

Se evalúa también su performance ante varios problemas típicos.

ABSTRACT

A rectangular, thin or moderately thick 9 node Lagrangian element is presented, following the Mindlin theory. The covariant components of shear deformation are approximated by lower order polynomials than those resulting directly from the element cinematic equations. As a consequence, locking and spurious modes are avoided.

Patch test results for straight and curved side patterns are obtained. Its performance is also evaluated for many typical problems.

INTRODUCCION

El problema de bloqueo de los elementos de placa de continuidad C^0 ha sido tratado extensamente. Recientemente Belytschko y otros [1] en la presentación de su trabajo realizan una reseña histórica del problema y de las distintas soluciones al mismo (integración reducida selectiva, estabilización de modos espurios, formulaciones mixtas, etc.) citando una amplia bibliografía.

Se coincide en que el problema de bloqueo por corte se debe a una representación inadecuada de la energía de deformación cortante cuando el espesor de la placa se reduce.

El bloqueo por corte fue reportado primeramente por Zienkiewicz y otros [2] quien al mismo tiempo propusieron como solución la integración reducida selectiva (IRS).

Esta técnica introduce como contrapartida los llamados modos espurios, es decir que el elemento puede adoptar modos de desplazamientos no rígidos sin poderse computar energía de deformación por los mismos. La existencia de dichos modos obliga a sobre restringir artificialmente un modelo para evitar la singularidad de la matriz de rigidez.

En este trabajo se presenta una formulación en la cual la energía de deformación por corte es evaluada a partir de interpolar las componentes covariantes del tensor de deformaciones cortantes con polinomios de menor orden que los obtenidos por aplicación de las relaciones deformación-desplazamiento sobre el campo de desplazamientos original. Esta interpolación se realiza a nivel elemental, no introduciéndose variables adicionales al problema.

El mismo método ha sido propuesto anteriormente por E.N. Dvorkin para el desarrollo de sus elementos MITC4 y MITC8 [3] [4].

ENERGIA DE CORTE EN COORDENADAS CURVILINEAS

El elemento propuesto es básicamente el sólido degenerado propuesto por Ahmad [5], basado en la teoría de Mindlin, de nueve nodos. Los grados de libertad nodales se muestran en la Fig. 1.

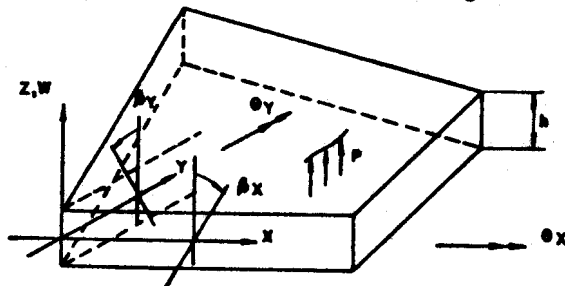


Fig.1. Definición de grados de libertad nodales.

Las interpolaciones para los desplazamientos son:

$$v = -z \beta_y \quad (2)$$

$$w = N_i(r,s) w_i \quad (3)$$

$$\text{donde: } \beta_x = N_i(r,s) \beta_{x_i}, \beta_y = N_i(r,s) \beta_{y_i} \quad i=1,2,\dots,9$$

En esta placa la energía potencial total puede expresarse en la base cartesiana (x, y, z) como:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{K}^T \underline{C}_f \underline{K} dz dA + \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \underline{Y}^T \underline{C}_c \underline{Y} dz dA - \int_A v p dA \quad (4)$$

donde:

$$\underline{K} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{vmatrix} Y_{yz} \\ Y_{xz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} - \beta_y \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \beta_x \end{vmatrix}$$

$$\underline{C}_f = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix}$$

$$\underline{C}_c = \frac{Ek}{2(1+\nu)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

E = Módulo de Young

ν = coeficiente de Poisson

k = 5/6 = factor de corrección de corte

Como puede observarse en (4) la energía de corte queda totalmente desacoplada de las deformaciones por flexión si se describe en una base como la (x, y, z) de la Fig. 1. Lo mismo sucede si se describe en una base curvilínea como la de la Fig. 2.

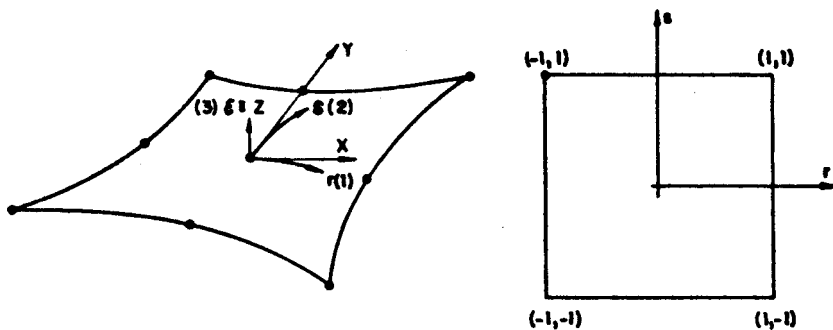


Fig.2. Base curvilínea.

Para esta base (r, s, z) la energía de corte se expresa como:

$$\frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tilde{\gamma}^T \tilde{C}_c \tilde{\gamma} dz dA \quad (5)$$

donde:

$$\tilde{\gamma} = \begin{vmatrix} \gamma_{zr} \\ \gamma_{zs} \end{vmatrix} \quad \tilde{C}_c = \frac{kE}{2(1+\nu)} \begin{vmatrix} g^{rr} & g^{sr} \\ g^{rs} & g^{ss} \end{vmatrix}$$

$g^{rr}, g^{sr} = g^{rs}, g^{ss}$ son las componentes del tensor métrico contra-variante que se obtienen de invertir el tensor métrico covariante del sistema curvilíneo [6]. Las componentes del tensor métrico covariante se obtienen a su vez del producto de la matriz de transformación J por su transpuesta. Para este caso las componentes de J son:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Las componentes covariantes de la deformación cortante γ_{zr}, γ_{zs} pueden obtenerse a partir de γ_{zx}, γ_{zy} a través de las siguientes relaciones:

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial y}{\partial r} \gamma_{zy} + \frac{\partial x}{\partial r} \gamma_{zx} \quad (6)$$

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial y}{\partial s} \gamma_{zy} + \frac{\partial x}{\partial s} \gamma_{zx} \quad (7)$$

INTERPOLACION DE LAS COMPONENTES COVARIANTES DE LA DEFORMACION CORTANTE

Las deformaciones cortantes pueden expresarse en función de los grados de libertad nodales a

$$\tilde{Y} = \begin{vmatrix} Y_{zr} \\ Y_{zr} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{zr} \\ B_{zs} \end{vmatrix} \quad (8)$$

Las funciones B_{zr} , B_{zs} son aproximadas por B_{zr}^* y B_{zs}^* tal que:

$$B_{zr}^* = \sum_{i=1}^6 R_i B_{zr_i} \quad (9)$$

$$B_{zs}^* = \sum_{i=1}^6 S_i B_{zs_i}$$

Los puntos del dominio donde se evalúa B_{zr} y B_{zs} , se muestran en la Fig. 3a y 3b respectivamente. Las funciones interpolantes R_i son:

$$\begin{aligned} R_1 &= s(s-1)(1-r/a)/4 \\ R_2 &= (1-s^2)(1-r/a)/2 \\ R_3 &= s(s+1)(1-r/a)/4 \\ R_4 &= s(s+1)(1+r/a)/4 \\ R_5 &= (1-s^2)(1+r/a)/2 \\ R_6 &= s(s-1)(1+r/a)/4 \end{aligned} \quad (10)$$

donde $a = 1/\sqrt{3}$. La obtención de las S_i es directa

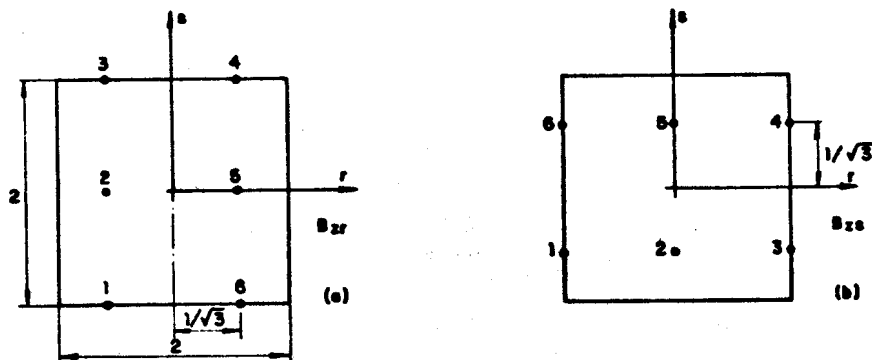


Fig.3. Localización de los puntos de interpolación.

Reemplazando B_{zr}^* y B_{zs}^* en lugar de B_{zr} y B_{zs} en (8), obtenemos \tilde{Y}^* . Exigiendo la estacionariedad de la energía potencial total ($\delta\pi = 0$) obtenemos:

$$\delta\pi = \int_A \left(\frac{h}{2} \delta \underline{K}^T \underline{C}_r \underline{K} dz dA + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta \tilde{Y}^{*T} \underline{C}_c \tilde{Y}^* dz dA \right)$$

$$- \int_A pw \, dA = 0 \quad (11)$$

Las matrices de rigidez a la flexión y corte resultantes de esta expresión se calculan con integración gaussiana de 3 x 3 puntos en el plano (r, s).

La supresión de modos espurios se debe a la cantidad de puntos seleccionados en la interpolación de ambas deformaciones cortantes ya que el campo de desplazamientos propuesto para el elemento no puede anular γ_{xz} y γ_{yz} simultáneamente en dichos puntos.

RESULTADOS

Para comprobar la capacidad del elemento para copiar estados de deformación constante se proponen dos discretizaciones (Fig. 4 a y b) de una placa cuadrada y se la somete a los estados de carga que aparecen en la Fig. 5 a, b y c. Los resultados obtenidos con el presente elemento son comparados con los de aplicar IRS.

Flexión

Se restringen los giros y desplazamientos en A-B. La solución de este problema requiere una variación lineal del giro en la dirección X. Esto no es exactamente obtenido por ninguno de los dos métodos, agregándose una falta de simetría. El elemento propuesto presenta una falta de simetría recién en la tercera cifra significativa, no notándose mayor de tercio en la discretización con lados curvados. Tabla 1, Tabla 2.

Corte

Se restringen todos los giros del elemento. El desplazamiento w se restringe solamente en el lado A-B. La solución es una variación lineal de w en dirección de x. La integración reducida selectiva presenta una solución que varía linealmente en x y respeta la simetría aunque el resultado es sobrevalorado. El elemento propuesto da resultados totalmente asimétricos. Tabla 3. Tabla 4.

Flexo-torsión

El elemento está simplemente apoyado en los lados A-B y B-C. (w=0). La solución de placa fina es una variación bilineal de w y por ende lineal para ambos giros. El elemento propuesto brinda una excelente respuesta que incluso coincide exactamente con la teórica. Tabla 5, Tabla 6.

Bloqueo

Para analizar el bloqueo del elemento se analiza el problema de una placa cuadrada, empotrada con una carga puntual en su centro. Se discretiza sólo un cuarto de la placa y se han elegido los patrones de discretización representados en la Fig. 6, con el objeto de variar el orden del determinante jacobiano de la transformación. En la Tabla 7 se comparan los resultados del presente elemento con los obtenidos con el Lagrangiano de 9 nodos con integración completa y los obtenidos con integración reducida selectiva.

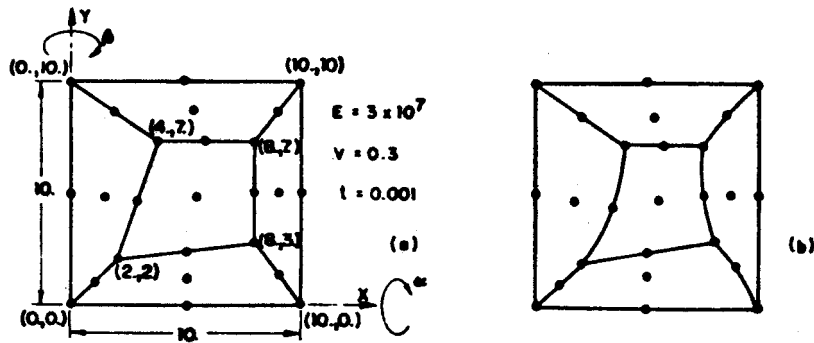


Fig.4. Discretizaciones empleadas para el Patch Test.

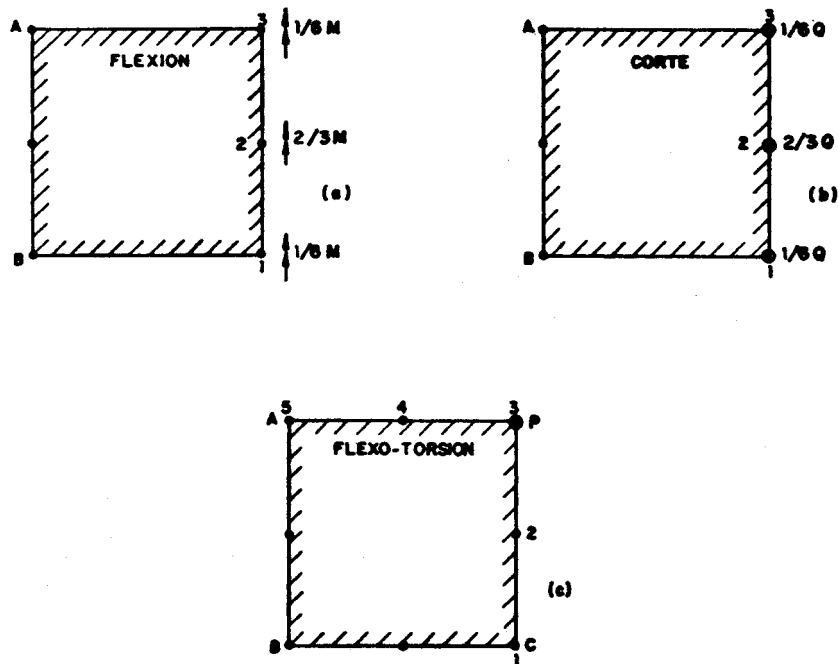


Fig.5. Estados de carga propuestos para el Patch Test.

Tabla 1. Patch Test a flexión - Lados rectos.

NODO	θ Teórico	Presente elemento	I R S
1	0.3639	0.3889	0.3978
2		0.3812	0.3823
3		0.3877	0.3960

Tabla 2. Patch Test a flexión - Lados curvos.

NODO	θ Teórico	Presente elemento	I R S
1	0.3639	0.3882	0.3943
2		0.3814	0.3788
3		0.3874	0.3873

Tabla 3. Patch Test para corte - Lados rectos.

NODO	w Teórico	Presente elemento	I R S
1	0.8666×10^{-5}	0.8065×10^{-5}	0.1040×10^{-4}
2		0.7845×10^{-5}	0.1040×10^{-4}
3		0.7403×10^{-5}	0.1040×10^{-4}

Tabla 4. Patch Test para corte - Lados curvos.

NODO	w Teórico	Presente elemento	I R S
1	0.8666 x 10 ⁻⁵	0.7667 x 10 ⁻⁵	0.1040 x 10 ⁻⁴
2		0.7398 x 10 ⁻⁵	0.1040 x 10 ⁻⁴
3		0.7066 x 10 ⁻⁵	0.1040 x 10 ⁻⁴

Tabla 5. Patch Test flexo-torsión - Lados rectos.

NODO	Presente elemento			I R S		
	w	$\alpha \times 10^{-1}$	$\beta \times 10^{-1}$	w	$\alpha \times 10^{-1}$	$\beta \times 10^{-1}$
1	0.	0.0	0.2600	0.	0.0	0.2575
2	0.1300	0.1300	0.2600	0.1304	0.1325	0.2614
3	0.2600	0.2600	0.2600	0.2623	0.2626	0.2614
4	0.1300	0.2600	0.1300	0.1299	0.2621	0.1289
5	0.	0.2600	0.0	0.	0.2541	0.0

Tabla 6. Patch Test flexo-torsión - Lados curvos.

NODO	Presente elemento			I R S		
	w	$\alpha \times 10^{-1}$	$\beta \times 10^{-1}$	w	$\alpha \times 10^{-1}$	$\beta \times 10^{-1}$
1	0.00	0.0	0.2600	0.00	0.00	0.2036
2	0.1300	0.1300	0.2600	0.1080	0.1118	0.2234
3	0.2600	0.2600	0.2600	0.2147	0.2204	0.2026
4	0.1300	0.2600	0.1300	0.1065	0.2258	0.957
5	0.00	0.2600	0.00	0.00	0.2285	0.00

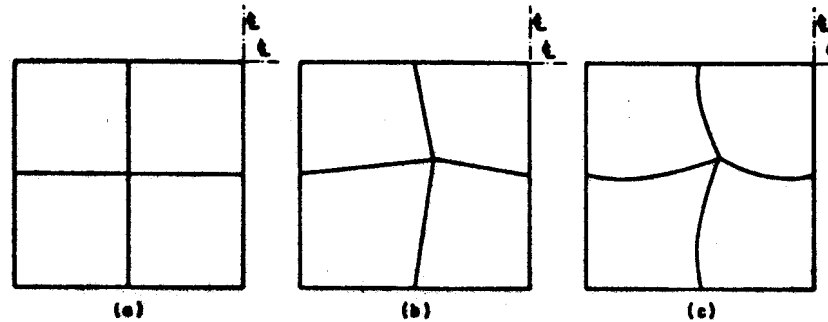


Fig.6. Discretización de 1/4 de placa.

Se ha utilizado la misma discretización para el problema de una placa cuadrada con los bordes simplemente apoyados sometida a carga uniforme. En la Tabla 8 puede observarse como el Lagrangiano de 9 nodos con integración completa comienza a bloquear para la malla C para $t/a = 0.001$

En ambos casos descritos el elemento propuesto presenta un excelente comportamiento.

Los resultados obtenidos para el problema de un solo elemento sometido a la flexo-torsión puede observarse en las Figs. 7 y 8.

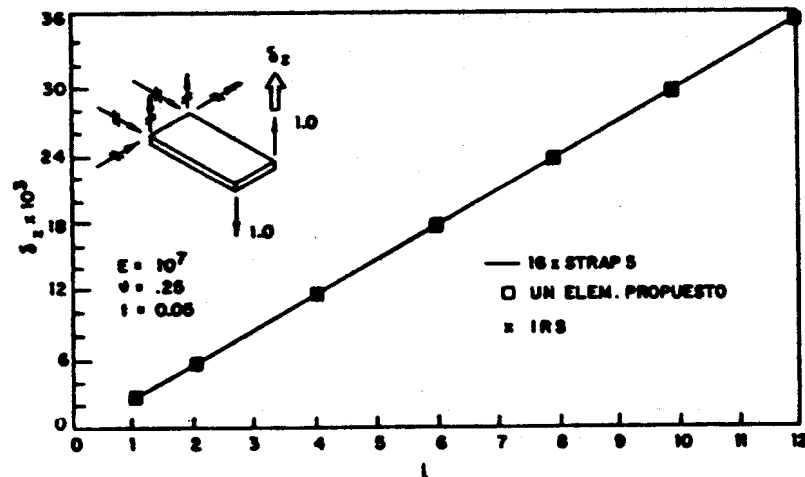


Fig.7. Flexo-torsión debida a cargas puntuales.

Tabla 7. Placa bordes empotrados, carga central. $w_{teórico}/w_{EF}$

t/a \ malla	Presente elemento			Lagrangiano 9 nodos			I R S		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
0.1	0.746	0.729	0.727	0.788	0.781	0.779	0.696	0.700	0.716
0.01	0.994	0.998	0.998	1.393	1.351	1.754	0.993	0.983	1.011
0.001	0.998	1.002	1.002	1.417	2.999	45.59	0.998	0.987	1.017

Tabla 8. Placa bordes apoyados, carga uniforme. $w_{teórico}/w_{EF}$

t/a \ malla	Presente elemento			Langrangiana 9 nodos			I R S		
	A	B	C	A	B	C	A	B	C
0.1	0.895	0.891	0.899	0.901	0.905	0.903	0.878	0.877	0.873
0.01	0.996	0.996	0.998	1.018	1.024	1.064	0.969	0.968	0.976
0.001	0.997	0.997	0.999	1.020	1.052	4.544	0.970	0.969	0.977

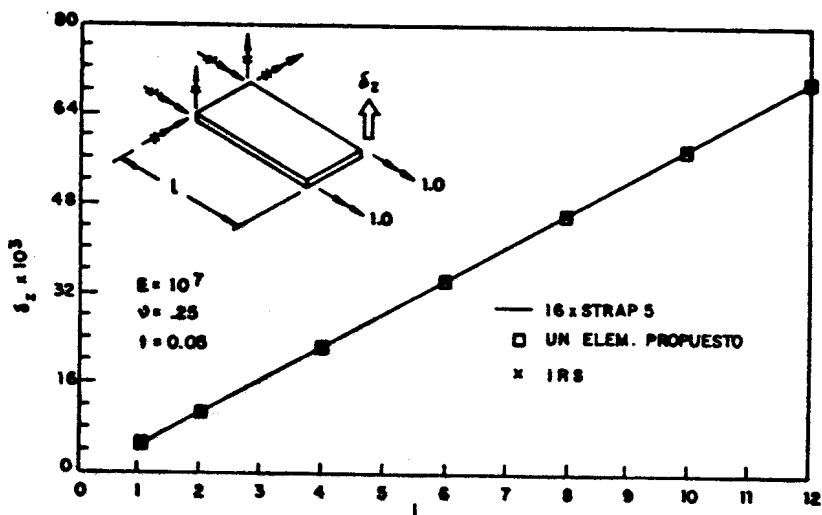


Fig. 8. Flexo-torsión debida a momentos.

CONCLUSIONES

El elemento presentado es un elemento computacionalmente caro ya que requiere la evaluación de las deformaciones de corte en 12 puntos para poder interpolarias.

Los resultados respecto al Patch Test no justifican a priori dicho costo. Sin embargo los obtenidos con IRS no son mejores, con el agravante de la introducción de modos espurios.

Cabe aclarar que el elemento MITC8[4] pasa el Patch Test para discretizaciones con lados rectos y nodos centrados.

En los demás ejemplos la performance del presente elemento es muy buena convirtiéndose en una opción válida en el tratamiento de problemas de placas finas y moderadamente gruesa.

REFERENCIAS

- [1] Belytschko, T. y otros, "Stress Projection for Membrane and Shear Locking in Shell finite Elements". Computer Meth. in Applied Mech. and Eng., Vol. 51, N° 1-3, 1985, págs. 221-258.
- [2] Zienkiewicz, O. C. y otros, "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells". J. Numer. Meths. Engrg. Vol 3, 1971 págs. 275-290.
- [3] Dvorkin, E.N., "On Nonlinear Finite Element Analysis of Shell Structures". Ph. D. Thesis. Massachusetts. Institute of Technology. Febrero 1984.

- [4] Bathe, K.J., Dvorkin, E.N., "A Formulation of General Shell Elements. The Use of Mixed Interpolation of Tensorial Components". Int. J. Numer. Meths. Engrg. vol. 22, 1986, págs. 697-722.
- [5] Ahmad, S., Irons, B.M. y otro, "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", Int. J. Numerical Meth. Eng. vol. 2, 1970, págs. 419-451.
- [6] Washizu, K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", (3ra. Edición), Pergamon Press, 1982.