

FLUIDOS NO NEWTONIANOS
Peculiaridades matemático-numéricas

Fernando Guillermo Basombrio
Sección Mecánica Computacional
División Ingeniería Nuclear
Centro Atómico Bariloche - CNEA

RESUMEN

Se realiza una presentación general relativa a los fluidos que no cumplen la clásica ley de Newton. Se ponen de manifiesto sus peculiaridades matemáticas que presumiblemente son causa de las enormes dificultades encontradas en la resolución numérica de problemas asociados. El presente es un artículo de divulgación.

ABSTRACT

A general presentation is made concerning fluids that do not satisfy the classical Newtonian law. Special emphasis is put on the mathematical peculiarities of these fluids which may explain the enormous numerical difficulties that arise when solving associated problems. This is a divulgation article.

INTRODUCCION

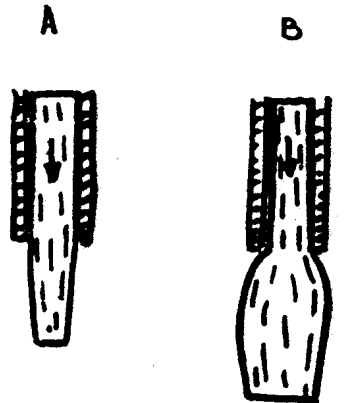
El objetivo de esta exposición es doble. En primer lugar, se trata de presentar el problema general de los fluidos que no cumplen la clásica ley lineal de Newton, ya que es un tema poco conocido. Dentro de esta gran clase de comportamientos fluidos, destacamos los del tipo rígido-plástico y los del tipo visco-elástico. La segunda parte de la exposición, que hace mas bien a su título, se referirá a los fluidos del último tipo.

La designación por la negativa, de fluidos "no newtonianos" es tal vez poco feliz. Implica una categoría demasiado amplia de comportamientos reológicos. No obstante, es ya una denominación universalmente aceptada.

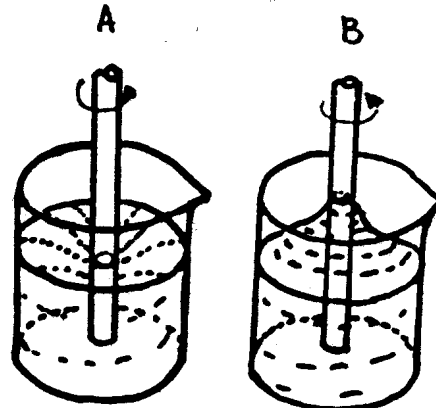
Existe un sinnúmero de situaciones de interés tecnológico donde aparecen fluidos de neto comportamiento no-newtoniano. Citemos, aunque sea enunciativamente, algunas:

- Industria química (Procesamiento de polímeros, suspensiones coloidales, emulsiones, fibra sintética, etc.)
- Industria del plástico (Extrusión de polietileno, etc.)
- Petróleo (Extracción, petroquímica, etc.)
- Ingeniería Mecánica (Lubricación, etc.)
- Metalurgia (Laminación, suspensiones, etc.)
- Bio-medicina (Hemodinámica, etc.)
- Tecnología de alimentos (Propiedades reológicas, flujos, etc.)
- Industria Farmacéutica (Propiedades reológicas, flujos, etc.)
- Industria del papel (Suspensiones de pulpa, "coating", etc)
- Materiales de construcción (Propiedades reológicas del hormigón, etc.)

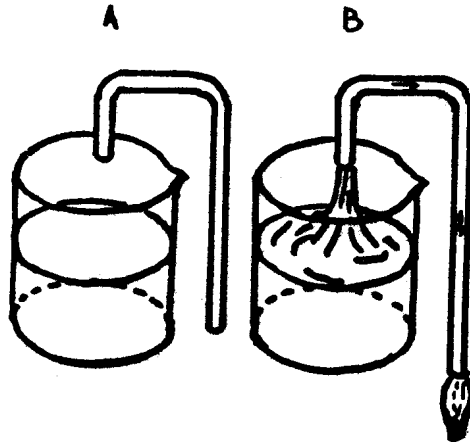
Son varios los experimentos que permiten exhibir el peculiar comportamiento de los fluidos que no cumplen la ley de Newton, en particular, los viscoelásticos. En la Figura 1 se muestran cuatro de los más conocidos. El último de ellos pone de manifiesto las características elásticas, es decir, la capacidad de devolver aunque sea parte de la energía.



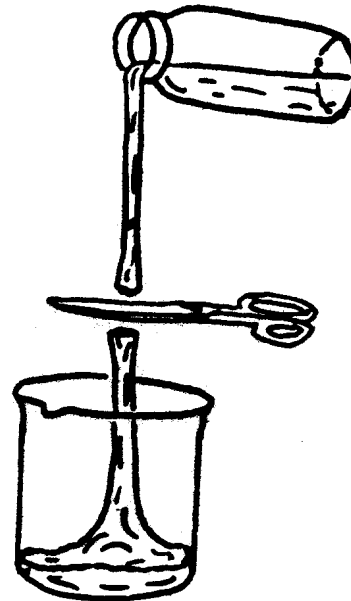
Expansión libre de un chorro



Efecto de la rotación de un eje



Para el fluido no newtoniano, al levantar el tubo el sifón suele quedar cebado



El chorro puede ser cortado por una tijera. La parte de arriba queda colgando y puede aún meterse de nuevo al frasco (efecto elástico)

FIGURA 1: Experimentos notorios con fluidos no newtonianos
A: NEWTONIANO B: NO NEWTONIANO

Citemos también el caso del comportamiento dinámico de la sangre (hemodinámica) en una válvula cardíaca. Las características del flujo sanguíneo son esenciales para su correcto diseño. La aparición de regiones de quietud puede originar complicaciones tromboembólicas en la persona y el tamaño y número de tobellinos formados puede dañar los elementos celulares de la sangre (zonas de fuerte cizalladura). Además es importante conocer el efecto de la presión sobre el ocluser.

En la parte derecha de la Figura 2 se exhibe el flujo sanguíneo computado por técnicas de elementos finitos, en una válvula cardíaca del tipo BJÖRK-SHILEY (ENGELMAN et al, 1980, [1]). Se usó el modelo reológico de CASSON, muy aceptado para la sangre. Es un modelo rígido-plástico. En la parte derecha de la figura se muestra el mismo problema, pero con un fluido newtoniano. Es notoria la sensibilidad del flujo al tipo de modelo utilizado.

ALGUNAS FECHAS HISTORICAS

Es importante hacer una breve mención histórica de las principales ideas relacionadas con los fluidos no-newtonianos, aún sin pretender que sea completa.

1687 - NEWTON en sus "Principia", obra más dedicada a la mecánica celeste, postula la ley de proporcionalidad que en nuestra notación actual se escribe

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x}$$

τ : esfuerzo de fricción

v : velocidad

μ : viscosidad (factor de proporcionalidad: "the want of lubricity")

1829 - POISSON por primera vez sugiere que todo líquido puede tener algún tipo de respuesta elástica instantánea.

1845 - STOKES presenta su clásica memoria sobre los fluidos viscosos bajo la forma

$$\sigma = -\pi I + f(d)$$

σ : tensor de tensión

π : presión de equilibrio

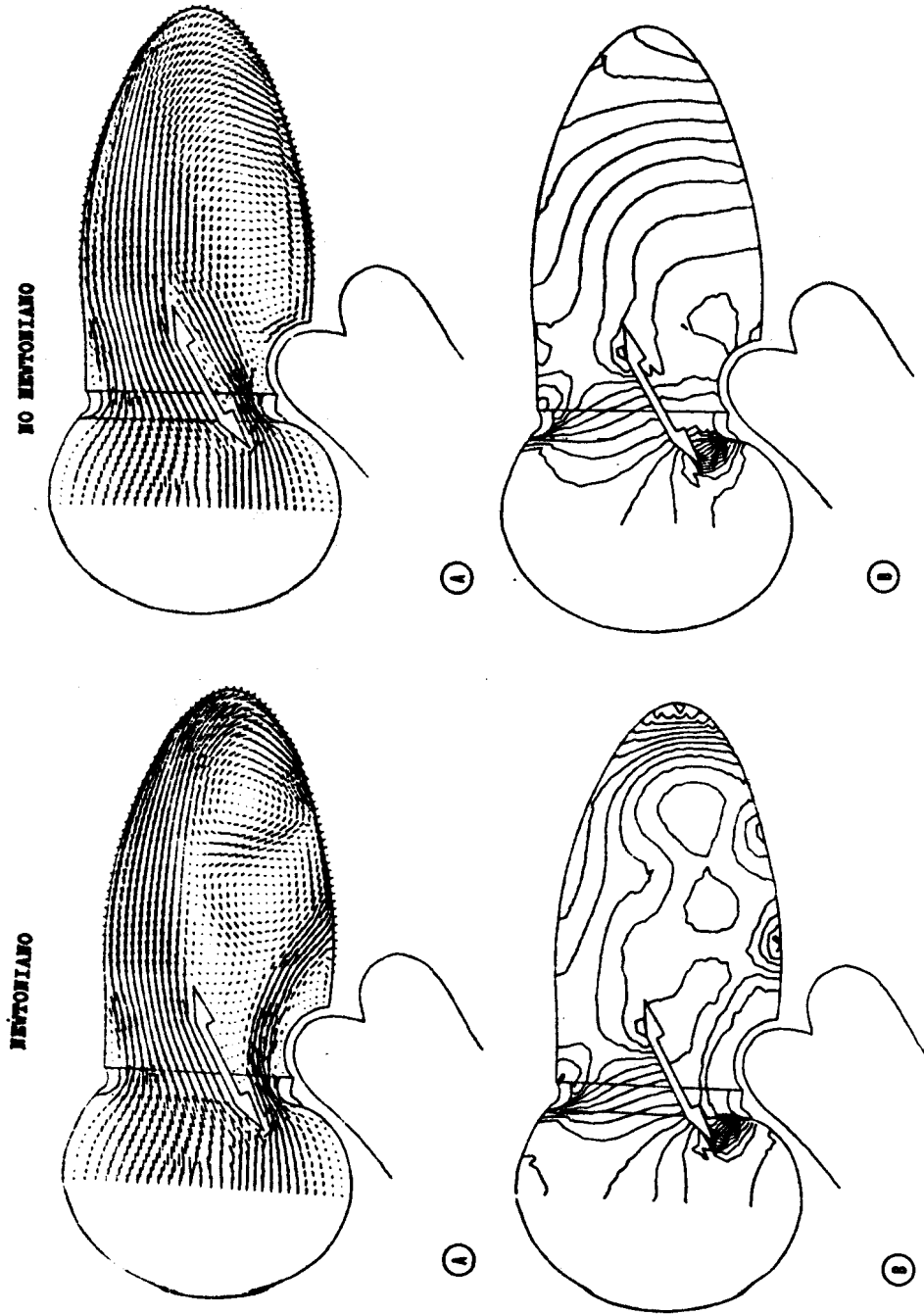


FIGURA 2: Válvula cardíaca tipo BJÖRK-SHILEY. A: velocidades;
B: presiones (ENGELMAN et al 1980, [1])

d : parte simétrica del tensor gradiente de velocidad
y desarrolla sólo el caso lineal

- 1867 - MAXWELL introduce su famoso modelo viscoelástico.
- 1874 - BOLTZMANN propone ecuaciones constitutivas basadas en la idea de que los líquidos puedan presentar respuestas elásticas de corta duración.
- 1929 - JEFFREY'S es el primero en proponer una ecuación constitutiva, tanto con respuesta elástica como viscosa:

$$\lambda \frac{\partial \tau}{\partial t} + \tau = \gamma \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$$

τ : tensión de corte
 λ : tiempo de relajación
 γ : viscosidad "elástica"
 μ : viscosidad "newtoniana"

- 1929 - BINGHAM funda la Sociedad de Reología. Se intenta dar una definición de la palabra reología.
- 1945 - REINER; 1947-1949 - REINER Y RIVLIN; 1947-1950 - TRUESDELL: Generalizan el principio de STOKES en varias direcciones.
- 1950 - OLDROYD propone una formulación invariante para las ecuaciones constitutivas de fluidos visco-elásticos.
- 1958 - NOLL propone una definición de fluido simple, incluyendo y generalizando ideas previas de varios autores.

MODELOS MAS USADOS DE FLUIDOS NO-NEWTONIANOS, INCOMPRESIBLES

* Definición de fluido

Según MAXWELL: "Si, por lo tanto, definimos un fluido como aquella substancia que no puede permanecer en equilibrio permanente bajo un estado de tensión desigual en todas sus direcciones, debemos llamar a esta substancia (betún frío y asfalto) fluido, sin embargo resultan tan viscosos que podemos caminar sobre ellos sin dejar huellas. Lo que se requiere para modificar la forma de un sólido dúctil es una fuerza apropiada, y esta, cuando es aplicada, produce inmediatamente el efecto. En el caso de un fluido viscoso es tiempo lo que se requiere y si se da suficiente tiempo, una muy pequeña fuerza producirá un efecto sensible." (Ver cita en el artículo de H. MARKOVITZ [23])

En 1958, MOLL [3] propone una definición que mediante la noción de grupo de isotropía, formaliza el concepto vago de fluido, como aquella substancia que no modifica su respuesta material ante acciones externas, luego de una deformación arbitraria que deje su densidad inalterada.

Tal definición conduce a la expresión general de la ecuación constitutiva de un fluido simple:

$$\mathbb{T} = -p(\rho) + \mathcal{H} \left\{ \underset{A=0}{\overset{\infty}{C}}(t-\tau) - \rho, \rho \right\}$$

p : presión

ρ : densidad

\mathcal{C} : tensor de deformación de CAUCHY-GREEN

\mathcal{H} : funcional de la historia

* Modelos mas comunes del tipo diferencial y del tipo tasa

Fluido viscoso lineal de STOKES:

$$\mathbb{T} = -p + 2\mu d$$

Fluido de REINER-RIVLIN:

$$\mathbb{T} = -p + \alpha_1(\mathbb{I}_d, \mathbb{III}_d)d + \alpha_2(\mathbb{I}_d, \mathbb{III}_d)d^2$$

$$\mathbb{I}_d = \frac{1}{2}[(\text{tr}d)^2 - \text{tr}d^2]$$

$$\text{III}_2 = \det d$$

d_1, d_2 : funciones escalares de los invariantes II_1 y III_1

Fluido viscoelástico de MAXWELL

$$\lambda \frac{D\tau}{Dt} + \tau = 2\mu d$$

τ : tensión extra; $\sigma = -p\mathbb{1} + \tau$
 D/Dt : tasa temporal invariante.

$$\frac{D\tau}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \tau}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \tau + \tau \cdot \mathbb{F} - \mathbb{F} \cdot \tau - \alpha (d \cdot \tau + \tau \cdot d)$$

$$-1 \leq \alpha \leq 1 ; d = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \nabla \vec{v}^T) ; \mathbb{F} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} - \nabla \vec{v}^T)$$

$\alpha = 1$: "upper convected"

$\alpha = 0$: corrotacional (JAUMANN)

$\alpha = -1$: "lower convected"

Modelo viscoelástico (adicionalmente disipativo de OLDROYD:

$$\tau + \lambda_1 \dot{\tau} = 2\mu (d + \lambda_2 \dot{d})$$

$\dot{\tau}, \dot{d}$: tasas de OLDROYD (D/Dt con $\alpha = 1$)

λ_1 : tiempo de relajación

λ_2 : tiempo de retardo

Fluido del tipo diferencial de grado $n = 2$:

$$\sigma = -p\mathbb{1} + \mu A_1 + \beta_1 A_2 + \beta_2 A_1 \cdot A_1$$

$A_1 = d$: primer tensor de RIVLIN-ERICKSEN

$$A_2 = \frac{\partial d}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) d + d \cdot \nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T \cdot d$$

A_2 : segundo tensor de RIVLIN-ERICKSEN

Fluido de segundo orden:

$$\sigma = -p + 2\mu d - \gamma_1 \dot{d} + \gamma_2 d \cdot d$$

\dot{d} : tasa de OLDROYD

γ_1, γ_2 : constantes

Fluido de CRIMINALS - ERICKSEN - PILBRY:
 Similar al anterior, pero con tasa corrotacional de JAUMANN

✧ Modelos integrales

La mayoría de los modelos diferenciales antes vistos, admite una formulación integral equivalente. Veamos algunos:

MAXWELL upper convected (a = 1):

$$\tau = \frac{\mu}{\lambda^a} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-s)/\lambda] [C_t^{-1}(s) - \mathbb{1}] ds$$

lower convected (a = -1):

$$\tau = \frac{\mu}{\lambda^a} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-s)/\lambda] [\mathbb{1} - C_t(s)] ds$$

OLDROYD:

$$\tau = 2\mu \frac{\lambda_2}{\lambda_1} d + \frac{\mu}{\lambda_1} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-s)/\lambda_1] [C_t^{-1}(s) - \mathbb{1}] ds$$

FLUIDOS NEWTONIANOS (puramente viscosos):

Dentro de este cuadro, pueden pensarse como fluidos de memoria instantánea es decir, por ejemplo, fluidos de MAXWELL con un núcleo singular ($\lambda \rightarrow 0$).

* Fluidos viscoplásticos de BINGHAM (con límite de fluencia)

En la Figura 3 se presenta la curva característica típica de un fluido de BINGHAM

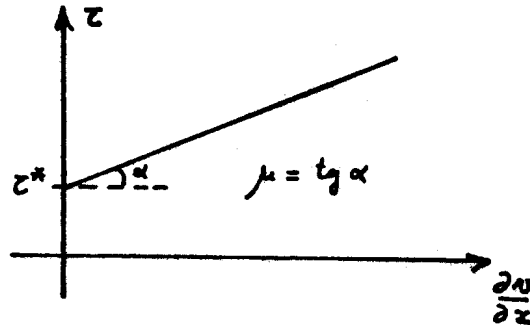


FIGURA 3

Son fluidos que presentan un límite de fluencia (τ^*), es decir, por debajo de un cierto estado de tensión se comportan como rígidos. Hacemos breve mención a esta clase de fluidos, ya que el motivo de este trabajo de revisión concierne más bien a los fluidos viscoelásticos.

Ejemplos: pasta de dientes, mayonesa, sangre, metales en proceso de laminación, etc.

Resolución numérica de flujos de fluidos de BINGHAM

Se ha utilizado tanto el método de diferencias finitas como el de elementos finitos. Citemos algunos de los trabajos más importantes, al menos hasta 1982: BEGIS, 1972 |4|, 1973 |5|; FORTIN, 1972 |6|; CEA Y GLOWINSKI, 1971 |7|, 1973 |8|; ZIENKIEWICZ, JAIN y ONATE, 1978 |9|; BERCOVIER y ENGELMAN, 1980 |10|; ZIENKIEWICZ, ONATE y HEINRICH, 1978 |11|, 1982 |12|, ETC.

Relación constitutiva:

$$\sigma = -p \mathbb{1} + \tau^* \mathbb{II}_d^{-1} d + 2\mu d$$

válida para $\mathbb{II}_d \neq 0$

PECULIARIDADES MATEMÁTICO - NUMÉRICAS

Por lo pronto, los fluidos no-newtonianos heredan todos los problemas numéricos inherentes a los fluidos newtonianos: "wiggles", modos espúreos de presión, etc.

* Líquido de MAXWELL: planteo del problema matemático estacionario

Ecuación de equilibrio dinámico:

$$\operatorname{div} \sigma + \rho (\vec{f} - \vec{a}) = 0$$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \quad : \text{aceleración}$$

\vec{f} : fuerzas másicas

Ecuación constitutiva ($\alpha = 1$, "upper convected"):

. Tipo diferencial

$$\lambda \frac{D\tau}{Dt} + \tau = 2\mu d$$

o bien,

. Tipo integral

$$\tau = \frac{\mu}{\lambda} \int_{-\infty}^t \exp[-(t-s)/\lambda] [C_t^{-1}(s) - \mathbb{1}] ds$$

Ecuación de continuidad

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

- . SON 10 ECUACIONES PARA LAS 10 INCOGNITAS \vec{v} , τ , p .
- . PROBLEMA DE CONDICIONES DE CONTORNO EN UNA REGION Ω DE FRONTERA Γ .
DATO DE DIRICHLET: VELOCIDADES. DATO DE NEUMANN; TENSIONES.

- Problemas típicos, de interés práctico

Resumimos en la Figura 4 los esquemas de ocho problemas típicos de interés actual.

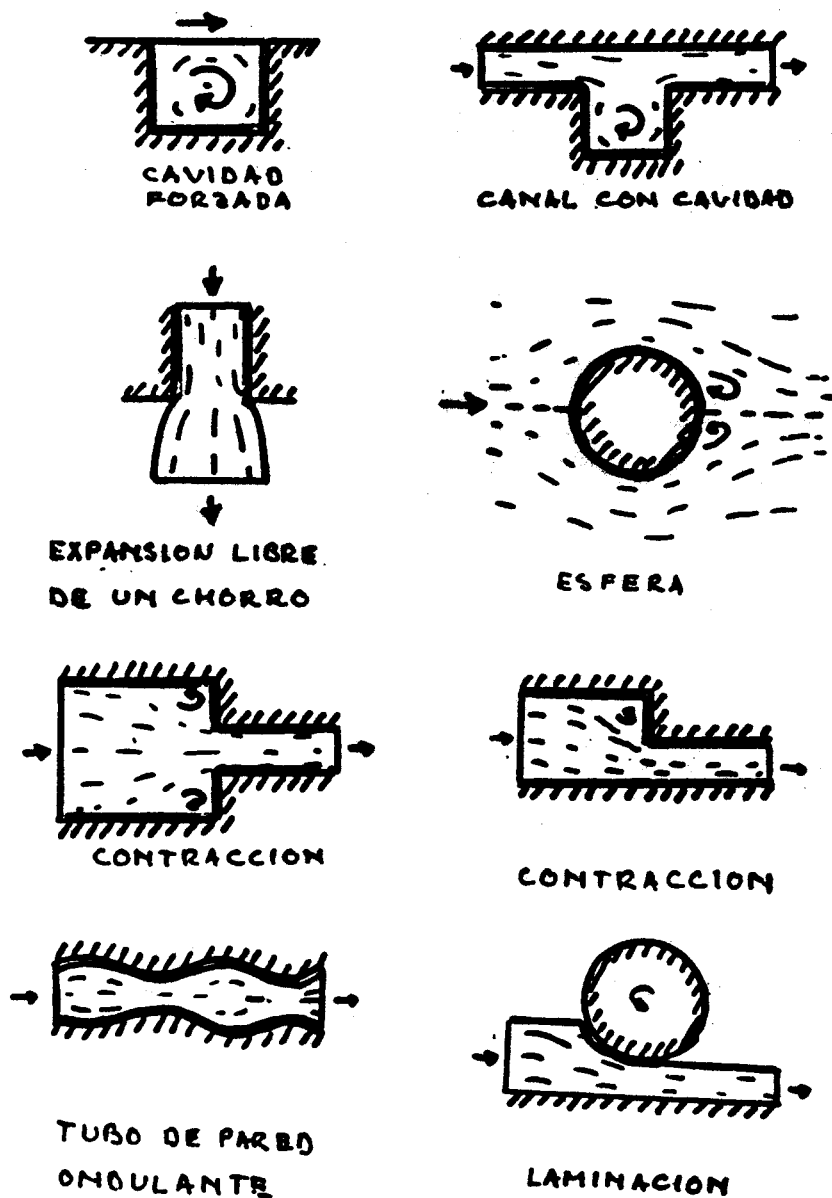


FIGURA 4: Problemas típicos de interés práctico

- Ecuaciones adimensionales

Es conveniente adimensionalizar las ecuaciones que gobiernan el problema, utilizando magnitudes características apropiadas. Esto hace aparecer naturalmente otros números adimensionales, además del conocido número de REYNOLDS.

U: velocidad típica

T: tiempo típico del proceso
(p. ej. tiempo de permanencia)

L: longitud típica

$c = \sqrt{\frac{E}{\rho \lambda}}$: velocidad de propagación de ondas de corte
COLEMAN - CURTIN - HERREKA (1965)

Número de REYNOLDS: $Re = \rho L U / \mu$
 Número de WEISSENBERG: $W_e = \lambda U / L$
 Número de MACH viscoelástico: $M = \sqrt{Re W_e} = U / c$
 Número de DEBORAH: $D_e = \lambda / T$

Finalmente (~: magnitud adimensional):

$$(\vec{\tilde{v}} \cdot \nabla) \vec{\tilde{v}} + \nabla \tilde{p} - \nabla \cdot \tilde{\tau} = 0$$

$$\tilde{\tau} + \frac{W_e}{Re} [(\vec{\tilde{v}} \cdot \nabla) \tilde{\tau} - \nabla \tilde{v} \cdot \tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \tilde{v}^T] - \frac{2}{Re} \tilde{d} = 0$$

$$\nabla \cdot \tilde{v} = 0$$

NAVIER - STOKES: términos sin subrayar

FLUIDO VISCOELASTICO; todos los términos

-Observación:

EL MAXIMO NUMERO DE WEISSENBERG CON EL CUAL SE HAN PODIDO OBTENER SOLUCIONES NUMERICAS POR LOS METODOS DE DIFERENCIAS FINITAS, ELEMENTOS FINITOS O ELEMENTOS DE CONTORNO ES $O(1)$, ES DECIR, ENTRE UNO Y TRES ORDENES DE MAGNITUD INFERIOR A LOS QUE INTERESAN EN PROCESOS INDUSTRIALES CORRIENTES.

- Ecuaciones adimensionales

Es conveniente adimensionalizar las ecuaciones que gobiernan el problema, utilizando magnitudes características apropiadas. Esto hace aparecer naturalmente otros números adimensionales, además del conocido número de REYNOLDS.

U: velocidad típica

T: tiempo típico del proceso

(p. ej. tiempo de permanencia)

L: longitud típica

$c = \sqrt{\frac{\mu}{\rho \lambda}}$: velocidad de propagación de ondas de corte
COLEMAN - CURTIN - HERRERA (1965)

Número de REYNOLDS: $Re = \rho L U / \mu$
 Número de WEISSENBERG: $W_e = \lambda U / L$
 Número de MACH viscoelástico: $M = \sqrt{Re W_e} = U / c$
 Número de DEBORAH: $D_e = \lambda / T$

Finalmente (\sim : magnitud adimensional):

$$(\tilde{v} \cdot \nabla) \tilde{v} + \nabla \tilde{p} - \nabla \cdot \tilde{\tau} = 0$$

$$\tilde{\tau} + \frac{W_e}{Re} [(\tilde{v} \cdot \nabla) \tilde{\tau} - \nabla \tilde{v} \cdot \tilde{\tau} - \tilde{\tau} \cdot \nabla \tilde{v}^T] - \frac{2}{Re} \tilde{d} = 0$$

$$\nabla \tilde{v} = 0$$

NAVIER - STOKES: términos sin subrayar

FLUIDO VISCOELASTICO; todos los términos

-Observación:

EL MAXIMO NUMERO DE WEISSENBERG CON EL CUAL SE HAN PODIDO OBTENER SOLUCIONES NUMERICAS POR LOS METODOS DE DIFERENCIAS FINITAS, ELEMENTOS FINITOS O ELEMENTOS DE CONTORNO ES $O(1)$, ES DECIR, ENTRE UNO Y TRES ORDENES DE MAGNITUD INFERIOR A LOS QUE INTERESAN EN PROCESOS INDUSTRIALES CORRIENTES.

- Condiciones de contorno e historia mecánica

El estado tensional en el punto P en la región de cálculo usada como ejemplo (Figura 5 a la derecha) está afectado por la historia termomecánica de la partícula que actualmente ocupa la posición P. Pero para el mismo diagrama (parabólico) de velocidades de entrada dadas como dato de DIRICHLET a la izquierda de dicha región, pueden corresponder distintas historias precedentes (p. ej. flujo plenamente desarrollado o bien, otro flujo cualquiera). Son fluidos con memoria.

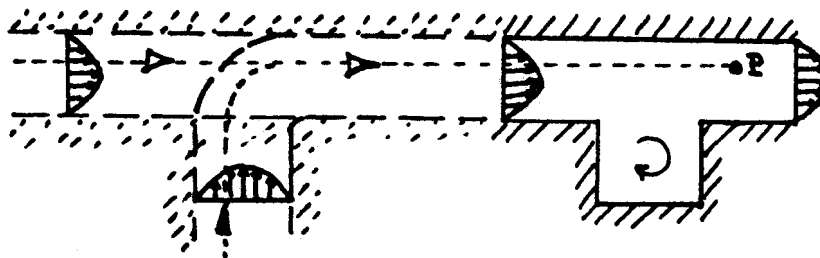


FIGURA 5: Distintas historias pueden corresponder a la partícula que actualmente ocupa la posición P

¿CONTIENE LAS CONDICIONES DE CONTORNO TODA LA INFORMACION QUE DETERMINA LA HISTORIA MECANICA PRECEDENTE?

(CROCHET y KEUNINGS, 1982 [13]; CROCHET y WALTERS, 1983 [14])

* Sistemas cuasi-lineales

Sea el sistema cuasilineal del tipo

$$A_1 U_x + A_2 U_y = F$$

$$\text{con } A_1(U); A_2(U); F(U); U^T = (u_1, u_2, \dots, u_m)$$

Se trata de n ecuaciones cuasi-lineales

Problema generalizado de autovalores:

$$A_2^T l = \alpha A_1^T l \quad ; \quad \alpha \text{ autovalor} \quad ; \quad l: \text{ autovector izquierdo}$$

Ecuación característica: $\det (A_2 - \alpha A_1) = 0$

No es en general una ecuación algebraica de grado n en α

De acuerdo al tipo de raíces, hiperbólica, parabólica, elíptica o, en general, del tipo mixto (muy poco estudiados estos últimos sistemas)

Si existe alguna raíz real, puede pensarse en la posible existencia de algún invariante de RIEMANN.

Pre-multiplicando la ecuación diferencial por ℓ^T y reemplazando la ecuación de autovalores, se obtiene

$$\ell^T A_1 (U_x + \alpha U_y) = \ell^T F$$

Si $\ell^T A_1$ es una forma diferencial exacta en \mathbb{R}^m , entonces existe

$J(u_1, \dots, u_m)$ tal que

$$\frac{\partial J}{\partial u_\alpha} = \sum_{\lambda=1}^m \ell_\lambda (A_1)_{\lambda\alpha} = (\ell^T A_1)_\alpha$$

Es difícil que se cumpla esta condición

Entonces, si

$$\nabla J^T \equiv \left(\frac{\partial J}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial J}{\partial u_m} \right) = \ell^T A_1$$

queda

$$\nabla J^T (U_x + \frac{dy}{dx} U_y) = \ell^T F \Rightarrow \frac{dJ}{dx} = \ell^T F$$

o sea, integrando sobre la línea característica,

$$J_B = \int_A^B \ell^T F dx + J_A$$

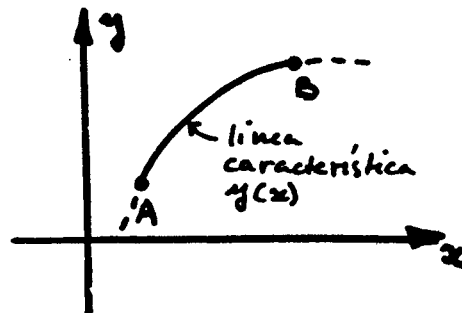


FIGURA 6: línea característica

EJEMPLO: fluido inviscido incomprensible

Ecuaciones de EULER

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} + \nabla p = \vec{f} \quad ; \quad \text{div } \vec{v} = 0$$

Corresponden a;

$$U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ p \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}; A_1 = \begin{bmatrix} u & 0 & 1/\rho \\ 0 & u & 0 \\ \rho & 0 & 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & \rho & 0 \end{bmatrix}$$

Ecuación característica:

$$\left(\frac{dy}{dx} u - v\right) \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right] = 0$$

Raíces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad \therefore \quad \text{las líneas de corriente son características}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm i$$

Invariante de RIEMANN correspondiente a la raíz real:

$$J(u, v, p) = \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + p$$

Si, por ejemplo, $\vec{f} = (0, g)$: fuerza gravitatoria,

$$\frac{1}{2} \rho \vec{v}_A^2 + p_A + \rho g y_A = \frac{1}{2} \rho \vec{v}_B^2 + p_B + \rho g y_B$$

Relación de BERNOULLI

MODELO DE MAXWELL "upper convected"

(RUTKEVICH 1970 |15|, 1972 |16|; ULTMANN y DENN 1970 |17|; LUSKIN 1984 |18|; JOSEPH, RENARDY y SAUT 1985 |19|; VAN DER ZANDEN et al 1985 |20|).

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ z_{xx} \\ z_{xy} \\ z_{yy} \\ p \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} \rho u & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \rho v & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2(\lambda z_{xx} + \mu) & 0 & \lambda u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda z_{xx} - \mu & 0 & \lambda v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda z_{xy} & 0 & 0 & 0 & \lambda u & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(u) = \begin{pmatrix} \rho f_x \\ \rho f_y \\ -z_{xx} \\ -z_{xy} \\ -z_{yy} \\ 0 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} \rho v & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2\lambda z_{xy} & 0 & \lambda v & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda z_{xy} - \mu & 0 & 0 & \lambda v & 0 & 0 \\ 0 & -2(\lambda z_{xy} + \mu) & 0 & 0 & \lambda v & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ecuación características:

$$\lambda^2 (v - \alpha u)^2 (1 + \alpha)^2 \left\{ \lambda [2\alpha z_{xy} - 5(\alpha u + v)^2 + \alpha^2 z_{xx} + z_{yy}] + \mu (1 + \alpha)^2 \right\} = 0$$

Raíces ($\alpha = \frac{dy}{dx}$):

$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$: Las líneas de corriente son características dobles

$\frac{dy}{dx} = \pm i$: Dos características siempre imaginarias

* LAS DOS CARACTERISTICAS RESTANTES PUEDEN SER COMPLEJAS O REALES, DE ACUERDO AL VALOR DE U.
TRANSONICO, ONDAS DE CHOQUE, ETC. ETC.

NO EXISTEN INVARIANTES DE RIEMANN PARA LA RAIZ REAL DOBLE.

Ecuaciones en vorticidad-función de corriente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad \text{: Elíptica (dos raíces imaginarias)}$$

$$\left[\mu + \lambda(\tau_{xx} - \rho u^2) \right] \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2\lambda(\tau_{xy} - \rho uv) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \left[\mu + \lambda(\tau_{yy} - \rho v^2) \right] \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$$

- términos de orden inferior

NAVIER-STOKES: excluyendo términos subrayados

Fluido de MAXWELL: todos los términos

LA ECUACION DE LA VORTICIDAD CAMBIA DE CARACTER
TRANSONICO - ONDAS DE CHOQUE, ETC. ETC.

- Otro caso: Fluido de REINER-RIVLIN ($\sigma = -p + \mu f(\Pi_\alpha) d$)
(REGIERER y RUTKEVICH 1968 |21|)

$$a_1 \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) + 2a_2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} - 4a_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) =$$

- términos de orden inferior

Ecuación característica: $a_1 \alpha^4 + 4a_3 \alpha^3 + 2a_2 \alpha^2 - 4a_3 \alpha + a_1 = 0$

Raíces:

$f + 2\Pi_\alpha f' > 0$: raíces complejas, elíptico

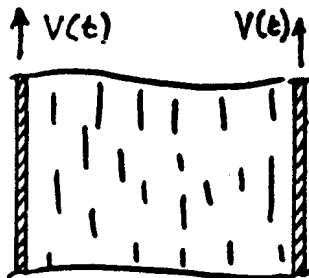
$f + 2 \Pi_{\lambda} f' = 0$: parabólico

$f + 2 \Pi_{\lambda} f' < 0$: cuatro raíces reales, hiperbólico

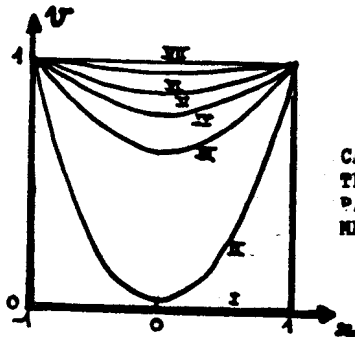
Se presentan a continuación dos ejemplos, uno analítico y otro experimental, donde se ponen de manifiesto fenómenos del tipo "ondas de choque".

* Un caso del transitorio (Problema de STOKES o de RAYLEIGH)

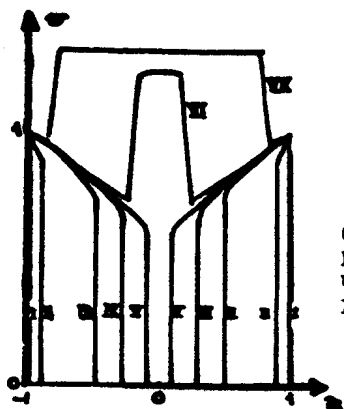
(KASAKIA y RIVLIN 1961 [22])



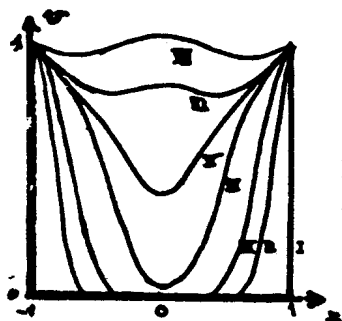
TRANSITORIO DE UN FLUIDO CONTENIDO ENTRE DOS PLACAS PLANAS INFINITAS QUE SE ACELERAN BRUSCAMENTE CON VELOCIDAD $V(t) = H(t)$ ($H(t)$: FUNCION DE HEAVISIDE)



CASO DE UN FLUIDO NEWTONIANO (VISCOSO). LA TRANSFERENCIA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO, DE LAS PAREDES AL INTERIOR, SE PRODUCE POR UN MECANISMO DISIPATIVO.



CASO DE UN FLUIDO DE MAXWELL (VISCOELASTICO). LA TRANSFERENCIA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO SE PRODUCE POR UN MECANISMO HIPERBOLICO QUE INCLUYE ONDAS DE CHOQUE.



FLUIDO TIPO OLDROYD (VISCOELASTICO ADICIONALMENTE VISCOSO). LA TRANSFERENCIA DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO SE PRODUCE POR UN MECANISMO INTERMEDIO DE ONDAS ATENUADAS.

* Expansión diferida de un chorro

En la Figura se muestra un fenómeno tipo onda de choque que hace recordar al resalto hidráulico. En ambas figuras (7,8) se aprecia la expansión del chorro y el efecto, aún no explicado, de la expansión diferida.

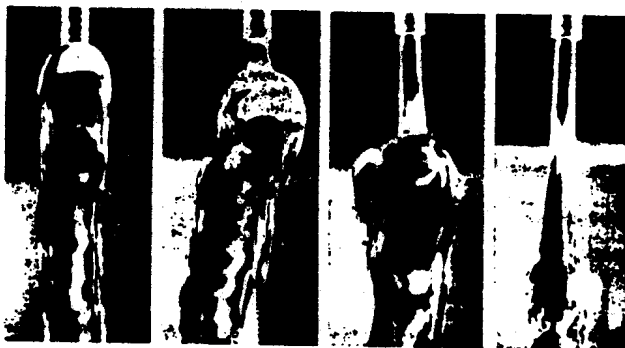


FIGURA 7: Solución de poli-isobutileno en totuol (BRENSCHEDE y KLEIN 1970)



FIGURA 8: Solución de poliacrilamida en agua (GIESEKUS 1968).

MÉTODOS NUMÉRICOS EMPLEADOS

Método de elementos finitos (MEF)

Es el de mayor utilización

Primer trabajo: KAWAHARA-TAKEUCHI, 1977 [23]

Técnicas: Básicamente tres,

- Método tipo "desplazamientos": Se discretizan solamente los campos de velocidad y de presión. Se consideran en forma exacta las ecuaciones diferenciales constitutivas.
- Método mixto: Se discretizan los tres campos: v , p y ζ . Las ecuaciones diferenciales constitutivas son tratadas por el procedimiento usual de GALERKIN.
- Seguimiento de partículas (particle tracking): Se utilizan las ecuaciones constitutivas integrales, y se evalúa numéricamente la historia. Con las tensiones se calculan velocidades y presiones. Proceso iterativo VIRIYAYUTHAKORN- CASWELL, 1980 [24].

Método de diferencias finitas (MDF)

Le sigue al MEF en popularidad

Primer trabajo (en dimensión mayor que 1):
PERERA y WALTERS, 1977 [25]

MDF con seguimiento de partículas:
COURT-DAVIES-WALTERS, 1981 |26|

Método de colocación

Existen muy pocos trabajos en esta dirección. Ver por ejemplo:
CHANG-PATTEN-FINLAYSON, 1979 |27|; CO y STEWART, 1980 |28|; NIRSCHL-
STEWART, 1984 |29|.

Método de elementos de contorno

También existen pocos autores que empleen el MEC. Por ejemplo:
COLEMAN 1981 |30|, 1984 |31|; TANNER, 1981 |32|

TODOS ESTOS METODOS SE ESTRELLAN CONTRA EL LIMITE

$$W_e = O(1)$$

METODOS TAL VEZ MAS APROPIADOS: LOS USADOS PARA EL REGIMEN
TRANSONICO.

BIBLIOGRAFIA

- |1| ENGELMAN, M.S.; MOSCOWITZ, S.E.; BORNAN, J.B.: "Computer simulation: A diagnostic method in comparative studies of valve prostheses J. Thorac. Cardiovasc. Surg. 79, p.402 (1980).
- |2| MARKOVITZ, H.: "The emergence of reology", *Physics Today* 21, N° 4 p.23 (1968).
- |3| MOLL, W.: "A mathematical theory of mechanical behaviour of continuous media". *Arch. Rat. Mech. Anal.* 2, p. 197 (1958/1959).
- |4| BEGIS, D.: "Analyse numérique de l'écoulement d'un fluide de Bingham", Tesis, Univ. de Paris (1972).
- |5| BEGIS, D.: "Etude numérique du comportement d'un fluide de Bingham". Rapport LABORIA, N° 42 (1973).
- |6| FORTIN, M.: "Calcul numérique des écoulements des fluides de Bingham et des fluides newtoniens incompressibles par la méthode des éléments finis". Tesis, Univ. Paris (1972).
- |7| GLOWINSKI, R.: "Méthodes numériques pour l'écoulement d'un fluide rigide visco-plastique incompressible". *Lecture Notes in Physics*, 8 p. 385. Springer Verlag (1971)
- |8| GLOWINSKI, R.: "Sur l'écoulement d'un fluide de Bingham dans une conduite cylindrique". *J. de Mécanique*, 13, N° 4, p. 601 (1973)
- |9| ZIENKIEWICZ, O.C.; JAIN, P.C.; OMATE, E.: "Flow of solids during forming and extrusion: some aspects of numerical solutions", *Int. J. of Solids and Str.* 14, p.15 (1978).
- |10| BERCOVIER, M.; ENGELMAN, M.: "A finite element method for incompressible non-newtonian flows". *J. of Comp. Phys.* 36, p. 313 (1980).
- |11| ZIENKIEWICZ, O.C.; OMATE, E.; HEINRICH, J.C.: "Plastic flow in metal forming. I Coupled thermal. II Thin sheet forming". (1978).
- |12| ZIENKIEWICZ, O.C.; OMATE, E.; HEINRICH, J.C.: "A general formulation for coupled thermal flow in metals using finite elements". *Int. J. for Num. Meth. in Engng.* 17, p.1497 (1981).
- |13| CROCHET, M.J.; KEUNINGS, R.: "Finite element analysis of die swell on a highly elastic fluid". *J. of Non-Newt. Fluid. Mech.* 10, p.339 (1982).
- |14| CROCHET, M.J.; WALTERS, K.: "Computational techniques for visco-elastic fluid flow". *Computers and Polymer Processing*. J.R.A. Pearson, S.M. Richardson, Ed. Barking, Inglaterra (1983).

- [15] RUTKEVICH, I.M.: "The propagation of small disturbances in a viscoelastic fluid", Z. Angew. Math. Mech. 34, p. 35 (1970).
- [16] RUTKEVICH, I.M.: "On the thermodynamic interpretation of the evolutionary conditions of the equations of the mechanics of finitely deformable viscoelastic media of Maxwell type". Z. Angew. Math. Mech. 36, p. 283 (1972).
- [17] ULTMAN, J.S., DENN, M.M.: "Anomalous heat transfer and a wave phenomenon in dilute polymer solutions" Trans. Soc. Rheol. 14, p.307 (1970).
- [18] LUSKIN, M.: "On the classification of some model equations for viscoelasticity". J. of Non-Newton. Fluid Mech. 16, p. 3 (1984).
- [19] JOSEPH, D.D.; RENARDY, M.; SAUT, J.C.: "Hyperbolicity and change of type in the flow of viscoelastic fluids". Arch. Rat. Mech. Anal. 87, p. 213 (1985).
- [20] VAN DER ZANDEN, J.; KUIKEN, G.D.C.; LINDHOUT, W.J.; HULSEN, M.A.: "Numerical experiments and theoretical analysis of the flow of an elastic liquid of the upper convected Maxwell type in the presence of geometrical discontinuities". Appl. Sci. Res. 42, p. 303 (1985).
- [21] REGIERER, S.I.; RUTKEVICH, I.M.: "Certain singularities of the hydrodynamic equations of non-newtonian media". J. Appl. Math. Mech. 32, p. 962 (1968)
- [22] KASAKIA, J.Y.; RIVLIN, R.S.: "Run-up and spin-up in viscoelastic fluid. I." Rheol. Acta 20, N° 2, p. 111 (1981)
- [23] KAWAHARA, M.; TAKEUCHI, H.: "Mixed finite element method for analysis of viscoelastic fluid flow". Comp. and Fluids 5, p. 33 (1977).
- [24] VIRIYAYUTHAKORN, M.; CASWELL, B.: "Finite element simulation of viscoelastic flow". J. of Non-Newton. Fluid Mech. 6, p. 245 (1980).
- [25] PEREDA, M.G.H.; WALTERS, K.: "Long range memory effects in flows involving abrupt changes in geometry. Part I. Flows associated with L-shaped and T-shaped geometries". J. of Non-Newton. Fluid. Mech. 2, p. 49 (1977).
- [26] COURT, H.; DAVIES, A.R.; WALTERS, K.: "Long range memory effects in flows involving abrupt changes in geometry. Part 4: Numerical simulation using integral rheological models". J. of Non-Newton. Fluid Mech. 8, p. 95 (1981).
- [27] CHANG, P.W.; PATTEN, T.W.; FINLAYSON, B.A.: "Collocation and Galerkin finite element methods for viscoelastic fluid flow. I. Description of method and problems with fixed geometries". Comput. Fluid 7., p. 285 (1977).

- [28] CO, A.; STEWART, W.E.: "Viscoelastic radial flow between parallel disks". Rheol. Res. Cent. Rep. N° 68. Univ. of Wis., Madison, p. 1 (1980).
- [29] NIESCHL, J.P.; STEWART, W.E.: "Computation of viscoelastic flow in a cylindrical tank with a rotating lid". J. of Non-Newt. Fluid. Mech. 16, p. 233 (1984).
- [30] COLEMAN, C.J.: "A contour integral formulation of plane creeping newtonian flow". Q.J. of Applied Math. 34, p. 453 (1981).
- [31] COLEMAN, C.J.: "On the use of boundary integral methods in the analysis of non-newtonian fluid flow". J. of Non-Newt. Fluid Mech. 16, p. 347 (1984).
- [32] TANNER, R.I.: "Application of the boundary element methods to extrusion problems". Proc. 2nd World Congr. Chem. Eng., Montreal, 6, p.281 (1981).