

**ANALISIS DE PROBLEMAS DE CONFORMADO DE  
METALES POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS  
FINITOS UTILIZANDO UNA FORMULACION DE  
FLUJO VISCOPLASTICO.**

**E. Oñate**

**Escuela Técnica Superior de Ingenieros de  
Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Cataluña, España.**

**RESUMEN**

En esta comunicación se presentan las posibilidades de la formulación del flujo viscoplástico para análisis de problemas de conformado de metales por el método de los elementos finitos. En el trabajo se detallan las bases de dicha formulación prestándose especial atención a la analogía de las ecuaciones del flujo viscoplástico con las de la elasticidad incompresible y se desarrollan diferentes alternativas para tratar el problema de la incompresibilidad del material en problemas bi o tri-dimensionales. La formulación se extiende para tratar problemas de embutición de planchas metálicas a partir de la teoría de láminas viscosas. Finalmente, se ofrecen varios ejemplos de aplicación a problemas de extrusión, laminado y embutición de metales.

**ABSTRACT**

In this paper the possibilities of the viscoplastic flow formulation for analysis of metal forming problems using the finite element method are presented. Special details are given of the analogy between the viscoplastic flow equations and those of standard incompressible elasticity. Also, different alternatives for dealing with incompressibility in two or three dimensional problems are discussed. The flow formulation is extended for the analysis of sheet forming problems using a viscous shell approach. Finally, some examples of application to extrusion, rolling and sheet metal forming problems are given.

## INTRODUCCION

En los procesos de conformado de metales, plásticos o vidrios, el material está sometido a deformaciones muy altas produciéndose en el una plastificación casi inmediata de manera que fluye como si se tratase de un fluido. La importancia de un buen conocimiento del comportamiento de dichos procesos se ha incrementado notablemente en los últimos años. Así, recientemente se han realizado verdaderos esfuerzos, la mayor parte a cargo de las grandes empresas del metal, para encontrar soluciones numéricas a dichos problemas como única alternativa para reducir el alto coste asociado al análisis experimental. En la mayoría de los problemas de conformado, las deformaciones elásticas pueden despreciarse frente a las plásticas o viscoplásticas. En estas circunstancias la ecuación constitutiva del material puede expresarse de forma adecuada mediante un modelo viscoplástico [1], [2]. Por otra parte, las características de la deformación continua del material durante el conformado hace que su comportamiento pueda ser asimilado al de un fluido viscoso de tipo no Newtoniano [3]. Por consiguiente, parece "natural" utilizar para el análisis de dichos procesos una "formulación de flujo" en la que las variables principales son las velocidades de los puntos del material. En particular, puede demostrarse que si la velocidad de deformación es pequeña, las ecuaciones del flujo para problemas de conformado de metales son análogas a las de la elasticidad incompresible clásica. Esta analogía ha sido extensamente utilizada en los últimos años para el análisis de problemas de extrusión, laminado y embutición por el método de los elementos finitos [1]-[10].

En esta comunicación se presenta una panorámica de las posibilidades de la formulación del flujo viscoplástico para el estudio de procesos de conformado de metales. El trabajo se ha estructurado en las siguientes partes. Seguidamente se describen los conceptos básicos de la formulación del flujo viscoplástico resaltando la analogía entre las ecuaciones para el caso de flujo a pequeñas velocidades con las de la elasticidad incompresible. Tras ello se presentan diferentes alternativas para tratar el flujo de sólidos incompresibles por el método de los elementos finitos incluyendo el efecto acoplado de la temperatura. A continuación, se particulariza la formulación del flujo para el análisis de procesos de embutición de planchas lo que da lugar a la denominada "formulación de láminas viscosas". En la última parte del trabajo, se presentan detalles de la inclusión de las deformaciones elásticas y del tratamiento de fenómenos de degradación por desarrollo de huecos en el metal. Finalmente, se muestran varios ejemplos de aplicación a problemas de extrusión laminado y embutición de metales.

### FORMULACION DEL FLUJO VISCOPLASTICO. CONCEPTOS BASICOS

En un modelo elastoviscoplástico general, las deformaciones totales pueden obtenerse como suma de las componentes elásticas y viscoplásticas de la deformación. Así,

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{vp} \quad (1)$$

Si las deformaciones elásticas,  $\epsilon_{ij}$ , se desprecian en el análisis, se obtiene derivando la ec. (1)

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} \dot{y}^p = f(\sigma_{ij}) \quad (2)$$

La ec. (2) puede ordenarse como

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \dot{\underline{\epsilon}} \quad (3)$$

donde  $\underline{g}$  es el vector de tensiones de Cauchy,  $\dot{\underline{\epsilon}}$  el vector de velocidad de deformación, y  $\underline{D}$  una matriz constitutiva que puede depender de variables tales como la velocidad de deformación, la deformación total, la temperatura, la presión u otras. Si las hipótesis anteriores se aceptan, el comportamiento del material es esencialmente el de un fluido (advuértase en la ec. (2) que a cualquier valor de la tensión corresponde otro de la velocidad de deformación, es decir se produce un movimiento continuo del cuerpo) y la formulación resultante se denomina "formulación de flujo viscoplástico".

Puede demostrarse [ 3 ], [ 4 ] que en el caso del flujo viscoplástico asociado isótropo de metales tipo Perzyna [ 4 ] la ec. (2) puede escribirse en la forma

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \alpha'_{ij} \quad (4)$$

donde

$$\alpha'_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad , \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

es la tensión desviadora, siendo  $p$  la presión media ( $p = \frac{\sigma_{kk}}{3}$ ), y  $\mu$  la viscosidad del flujo que viene dada por [ 4 ]

$$\mu = \frac{\alpha_y + \left( \frac{\dot{\underline{\epsilon}}}{\dot{\underline{\epsilon}}} \right)^{1/n}}{3\dot{\underline{\epsilon}}} \quad (6)$$

En la ec. (6),  $\alpha_y$  es la tensión de fluencia uniaxial,  $\gamma$  y  $n$  son el parámetro de fluidez y el exponente de la ley viscoplástica [ 4 ], respectivamente y  $\dot{\underline{\epsilon}}$  es el invariante de velocidad de deformación definido por

$$\dot{\underline{\epsilon}}^2 = \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (7)$$

Advuértase que la ec. (4) implica que  $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$ , es decir el material fluye sin cambio de volumen.

Los materiales plásticos ideales son un caso especial de la viscoplasticidad en la que se prescinde de los efectos viscosos. En dichas circunstancias  $\gamma = \infty$  y la ec. (6) se transforma en

$$\mu = \frac{\alpha_y}{3\dot{\underline{\epsilon}}} \quad (8)$$

Se observa en las ecs. (6) y (8) que el valor de la viscosi-

dad tiende a infinito cuando  $\dot{\epsilon}$  tiende a cero. Esto implica que en el cálculo numérico debe establecerse una cota superior al valor de  $\mu$  para poder modelar efectivamente zonas de comportamiento rígido o casi rígido. Es interesante advertir también que un comportamiento de fluencia puro se caracteriza por un valor nulo de  $\sigma_y$  en la ec. (6). En la Fig. 1 se muestra la relación entre los invariantes de tensión y velocidad de deformación, lo que permite una interpolación física del valor de la viscosidad  $\mu$ .

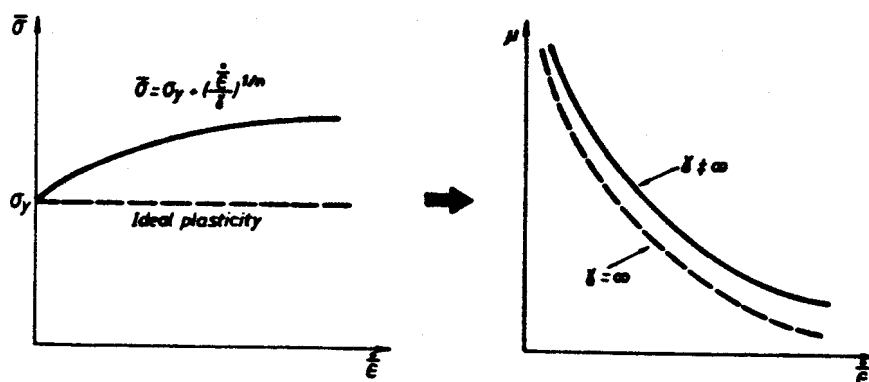


Fig. 1. Relación entre los invariantes de tensión  $\sigma$  ( $= \frac{3}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij}$ ) y de velocidad de deformación  $\dot{\epsilon}$ . Variación de la viscosidad para un flujo viscoplástico ( $\gamma \neq \infty$ ) o plástico ( $\gamma = \infty$ ).

#### ANALOGIA FLUJO-ELASTICIDAD

En un fluido las velocidades de deformación se definen por las derivadas espaciales de la velocidad en la forma usual

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (9)$$

donde  $u_i$  es la velocidad en la dirección  $i$ .

Las ecuaciones del problema se completan con la ecuación de equilibrio que se escribe como

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} \right) \quad (10)$$

donde  $b_i$  son las fuerzas másicas,  $\rho$  es la densidad,  $t$  el tiempo. El término subrayado en el segundo miembro corresponde a la aceleración del fluido. Dicho término puede despreciarse si la deformación del fluido sucede a bajas velocidades y en condiciones estacionarias (fluido de Stokes). Puede comprobarse fácilmente que en dichas condiciones existe una analogía entre las ecuaciones del fluido y las de la elasticidad incompresible [4]. Por consiguiente, las velocidades, velocidades de deformación y viscosidad se pueden identificar con los desplazamientos, deformaciones y módulo de rigidez, respectivamente, en el problema elástico análogo que, debido al carácter no Newtoniano del flujo, es de naturaleza no lineal.

Esta analogía permite el análisis de procesos de conformado de metales utilizando programas de elementos finitos desarrollados inicialmente para análisis de problemas de elasticidad incompresible. El esquema de solución sigue, por consiguiente, las siguientes fases:

- a) Identificar una formulación de elementos finitos adecuada para elasticidad incompresible. El sistema de ecuaciones discretizadas para la formulación de flujo puede escribirse, haciendo uso de la analogía antes mencionada, como

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{f} \quad (11)$$

donde  $\underline{K}$  es la matriz de rigidez del problema de flujo y  $\underline{a}$  y  $\underline{f}$  son los vectores de velocidades y de fuerzas nodales, respectivamente. La ec. (11) es un sistema de ecuaciones no lineales debido a la no linealidad de la viscosidad, y debe resolverse de forma iterativa.

- b) Para cada configuración deformada se supone un valor inicial de las velocidades  $\underline{a}^0$  a partir del que pueden obtenerse las velocidades de deformación y el valor de  $\mu^0$ , y por consiguiente,  $\underline{K}^0 = \underline{K}(\underline{a}^0)$ .
- c) Se calcula  $\underline{a}^1$ . Si se utiliza un método iterativo directo se tiene

$$\underline{a}^1 = [\underline{K}^0]^{-1} \underline{f} \quad (12)$$

- d) Se comprueba la convergencia. Una norma generalmente utilizada es

$$\frac{\sum_i (a_i^n - a_i^{n-1})^2}{\sum_i (a_i^n)^2} \leq \epsilon \quad (13)$$

donde  $\epsilon$  es una tolerancia prefijada (usualmente  $\epsilon=0.01$ ). Si no se ha alcanzado convergencia se vuelve a b) y el proceso se repite con el nuevo campo de velocidades obtenido.

- e) Una vez alcanzada convergencia se calculan los parámetros de interés del problema (velocidades de deformación, ten-

siones, etc.). Por otra parte, si el proceso es de características transitorias, se actualiza la geometría de la malla de forma Lagrangiana de acuerdo con el valor  $a \cdot \Delta t$ , donde  $\Delta t$  es un incremento de tiempo apropiado, y se inicia de nuevo todo el proceso.

Hay que destacar que el método de iteración directa converge generalmente en pocas iteraciones. Esto es debido a las características de las condiciones de contorno del problema en las que normalmente se prescriben las velocidades en una serie de puntos y las fuerzas aplicadas se obtienen como reacciones una vez que el proceso ha convergido. Por consiguiente, en cada solución las velocidades iniciales pueden estimarse con una buena aproximación a sus valores correctos y la solución converge en tres o cuatro iteraciones. Por otra parte, como se ha indicado con anterioridad, deben tomarse precauciones para acotar el valor de la viscosidad en las zonas rígidas del material para evitar mal condicionamiento de la matriz de rigidez, lo que puede producir divergencia en el proceso de solución iterativa.

#### TRATAMIENTO DE LA INCOMPRESIBILIDAD. FORMULACIONES DE ELEMENTOS FINITOS MAS USUALES.

El tratamiento por elementos finitos de las ecuaciones de flujo viscoplástico sigue las técnicas usuales para análisis de fluidos/elasticidad incompresible [6], [11]. La dificultad esencial en problemas de flujo de sólidos en dos o tres dimensiones es el cumplimiento de la condición de incompresibilidad. Expondremos a continuación brevemente algunas de las formulaciones de elementos finitos más usuales para este caso.

#### Ecuaciones del problema

De la ec. (10) puede obtenerse por medio del método de residuos ponderados la conocida ecuación integral de equilibrio

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dv = \int_V \delta u_i b_i dv \quad (14)$$

donde  $\delta u_i$  y  $\delta \dot{\epsilon}_{ij}$  representan las velocidades y las velocidades de deformación virtuales, respectivamente [11]. Para mayor sencillez solo se considera la actuación de fuerzas máxicas  $b_i$ . Asimismo, adviértase que en (14) se ha prescindido de los términos de aceleración del fluido de la ec. (10).

Las velocidades de deformación deben satisfacer, asimismo, la condición de incompresibilidad

$$\dot{\epsilon}_{ii} = 0 \quad (15)$$

El sistema de ecuaciones (14) y (15) se complementa con las relaciones entre velocidades de deformación y velocidades, ec. (9), la ecuación constitutiva, ec. (3), y las condiciones de contorno apropiadas.

### Formulación de velocidad/presión I

Las variables principales son las velocidades y las presiones que se expresan en la forma clásica de elementos finitos en función de sus valores nodales como

$$\underline{u} = \int \underline{N}_i u_i = \underline{N} a \quad (16)$$

$$p = \int \underline{\bar{N}}_i p_i = \underline{\bar{N}} p \quad (17)$$

Sustituyendo la ec. (16) en (9) puede obtenerse la relación clásica

$$\underline{\dot{\epsilon}} = \underline{B} a \quad (18)$$

donde  $\underline{B}$  es la matriz de velocidades de deformación [11].

Aplicando el método de residuos ponderados a la ecuación de incompresibilidad (16) utilizando como pesos las funciones de presión  $\bar{N}_i$  y haciendo uso de las ecs. (16), (17) y (18) en la ecuación resultante y en la ec. (14) se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{bmatrix} \underline{K} & \underline{Q} \\ \underline{Q}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{a} \\ \underline{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{f} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

donde

$$\begin{aligned} \underline{K} &= \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dv & ; & & \underline{Q} &= \int_V \underline{B}^T \underline{m} \underline{\bar{N}} dv \\ \underline{f} &= \int_V \underline{N}^T \underline{b} dv & \text{y} & & \underline{m} &= [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T \text{ en 3D} \\ & & & & \underline{m} &= [1, 1, 0]^T \text{ en 2D} \end{aligned} \quad (20)$$

y  $\underline{D}$  es la matriz constitutiva función de la viscosidad.

Hay que destacar que la naturaleza de la forma integral utilizada obliga a que el campo de velocidades sea continuo entre elementos. Por el contrario, la presión no aparece afectada de ninguna derivada y puede ser discontinua entre elementos. Puede observarse, asimismo, la coincidencia entre las expresiones anteriores y las que se obtendrían de la correspondiente formulación de sólido incompresible en desplazamientos y presiones. En las referencias [6], [11] pueden encontrarse más detalles sobre esta formulación y sobre las expresiones de las matrices anteriores para el caso de incluir los términos de aceleración en el fluido.

Formulación de velocidades (Presión eliminada de las ecuaciones básicas)

Por analogía con la mecánica de sólidos incompresibles puede reescribirse la condición de incompresibilidad (15) como

$$\dot{\epsilon}_{11} = \frac{p}{\alpha} \quad (21)$$

donde  $\alpha$  es un número grande que hace las veces del módulo de compresibilidad en el fluido. Evidentemente, para valores de  $\alpha \rightarrow \infty$  la condición de incompresibilidad queda satisfecha. La ec. (20) permite eliminar directamente "a priori" la presión como incógnita en función de las velocidades nodales como

$$p = \alpha \dot{\epsilon}_{11} = \alpha \underline{\underline{m}}^T \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \alpha \underline{\underline{m}}^T \underline{\underline{B}} \underline{\underline{a}} \quad (22)$$

Sustituyendo adecuadamente la ec. (22) en la ecuación integral de equilibrio (14), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en las velocidades nodales

$$(\underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}}) \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{f}} \quad (23)$$

donde

$$\underline{\underline{K}} = \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{m}} \alpha \underline{\underline{m}}^T \underline{\underline{B}} dv \quad (24)$$

Hay que destacar que la utilización con éxito de esta sencilla y económica formulación obliga a imponer la singularidad de la matriz  $\underline{\underline{K}}$  para garantizar la obtención de soluciones no nulas del campo de velocidades para valores de  $\alpha$  elevados. Dicha singularidad puede obtenerse simplemente efectuando una subintegración numérica de los términos de  $\underline{\underline{K}}$  (técnicas de integración reducida). Más información sobre estas técnicas y sobre esta formulación pueden encontrarse en las referencias [6], [11].

#### Formulación de velocidad-presión II

Aplicando el método de residuos ponderados a la ec. (21) utilizando funciones de peso iguales a las de interpolación del campo de presiones (ec. (17)) se obtiene la siguiente expresión para la ecuación de incompresibilidad

$$\underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{a}} - \frac{1}{\alpha} \underline{\underline{C}} p = 0 \quad \text{con} \quad \underline{\underline{C}} = \int_V \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{N}} dv \quad (25)$$

Dicha ecuación, juntamente con la primera del sistema de la ec. (19), completa el conjunto de ecuaciones en velocidades y presiones para la solución del problema.

Este procedimiento tiene la ventaja de que pueden tomarse valores del parámetro  $\alpha$  elevados sin riesgo de que se produzca el efecto de sobrerigidez numérica comentado en la formulación de velocidades presentado en el apartado anterior.

La posibilidad, ya comentada, de que la presión pueda ser discontinua entre elementos permite eliminar de la ec. (25) la presión en función de las velocidades nodales como

$$\underline{\underline{p}} = \alpha \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{\underline{Q}}^T \underline{\underline{a}} \quad (26)$$

Sustituyendo la ec. (26) en la primera de las ecs. (19) se



obtiene el sistema en velocidades siguiente

$$[ \underline{K} + \alpha \underline{Q} \underline{C}^{-1} \underline{Q}^T ] \underline{a} = \underline{f} \quad (27)$$

Puede demostrarse que la ecuación anterior coincide en algunos casos con la (23). Esta coincidencia ha permitido encontrar interesantes analogías entre las formulaciones mixtas en velocidades y presiones y las formulaciones en velocidades, basadas en la introducción de un coeficiente de compresibilidad  $\alpha$  y el uso de integración reducida [12].

Existen otras formulaciones alternativas para el tratamiento por elementos finitos de problemas de flujo incompresible, y aplicables al caso de flujo viscoplastico de metales, tales como formulaciones mixtas en velocidades, tensiones desviadoras y presión [12], u otras basadas en funciones de corriente [11]. Por motivos de espacio no entraremos aquí en detalles de dichas formulaciones. Más información sobre las mismas puede encontrarse en las referencias indicadas.

#### FLUJO VISCOPLASTICO CON EFECTO ACOPLADO DE LA TEMPERATURA

Está perfectamente comprobado que en la mayoría de los procesos de deformación de metales se genera una gran cantidad de energía de deformación que da lugar a incrementos de temperatura importantes en el metal. Por otra parte, la temperatura afecta a su vez a las propiedades mecánicas del material, con lo que el proceso es altamente acoplado, y la deformación del metal debe estudiarse conjuntamente con el desarrollo térmico.

El estudio acoplado flujo-temperatura implica resolver las ecuaciones del flujo viscoplastico conjuntamente con la del balance térmico, que para un fluido incompresible se escribe como

$$\rho c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u_i T_{,i} \right] = \nabla^T (k \nabla T) + Q \quad (28)$$

donde  $T$  es la temperatura,  $\rho$ ,  $c$ , y  $k$  la densidad, el calor específico, y la conductividad térmica, respectivamente,  $\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right]^T$  y  $Q$  el calor generado en el proceso de deformación que se calcula por

$$Q = \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (29)$$

donde  $m$  es la proporción de trabajo plástico que se transforma en calor (usualmente  $m=0.9$ ) y  $J$  el equivalente mecánico del calor. El sistema de ecuaciones térmicas se completa con las condiciones en los valores de temperatura y el flujo de calor prescrito en los contornos del dominio a analizar [5].

Discretizando el campo de temperatura en elementos finitos como  $T = \underline{N} \underline{T}$  y aplicando el método de residuos ponderados

rados a la ec. (28) tomando como funciones de peso las de interpolación del campo de temperatura, se obtiene tras realizar una integración por partes del término de conductividad, el sistema de ecuaciones siguiente

$$\underline{\underline{M}} \dot{\underline{\underline{T}}} + (\underline{\underline{H}} + \hat{\underline{\underline{H}}}) \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{f}} \quad (30)$$

La matriz  $\hat{\underline{\underline{H}}}$  es asimétrica debida a los términos de convección térmica. Una descripción detallada de todas las matrices y vectores anteriores puede encontrarse en la referencia [5].

En problemas en régimen estacionario basta con prescindir en la ec. (30) del término afectado con la derivada con respecto al tiempo.

La ec. (30) tiene que resolverse conjuntamente con las ecuaciones del flujo obtenidas por cualquiera de las formulaciones descritas en apartados anteriores. Si el proceso de deformación es a baja velocidad y se prescinde de los términos convectivos no simétricos en las ecuaciones de flujo, suele ser más adecuado operar siguiendo un proceso escalonado resolviendo las ecuaciones simétricas del flujo, independientemente de las térmicas, para una temperatura constante y con el campo de velocidades obtenido resolver la ec. (30) para calcular la temperatura, volver a las ecuaciones de flujo y seguir así sucesivamente hasta que se obtenga una solución convergente. (ver refs. [4], [10]). La solución conjunta de la ec. (30) con las de flujo ha sido estudiada en las referencias [5] y [6].

#### TRATAMIENTO DEL ENDURECIMIENTO POR DEFORMACION

La dependencia de la tensión de fluencia con la deformación puede tenerse en cuenta integrando adecuadamente las velocidades de deformación a lo largo del tiempo. En general

$$\alpha_y = \alpha_y(\bar{\epsilon}) \quad (31)$$

siendo  $\bar{\epsilon}$  el invariante de deformaciones que se obtiene por integración de la ec. (7). Para realizar dicha integración, hay que distinguir claramente entre un proceso de deformación Euleriano (malla de elementos fija) o Lagrangiano (malla variable con el tiempo). En el primer caso se tienen que tener en cuenta los efectos de convección en la derivada material de  $\bar{\epsilon}$  y, por consiguiente

$$\frac{D}{Dt} \bar{\epsilon} = \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x_i} = \dot{\bar{\epsilon}} \quad (32)$$

siendo  $\dot{\bar{\epsilon}}$  un valor conocido a través del campo de velocidades obtenido. Obsérvese que la ec. (32) es análoga a la (32) para el balance térmico. Para la integración de (32) puede discretizarse el campo de invariantes de deformación  $\bar{\epsilon}$  de la forma

$$\bar{\epsilon} = \sum_{N=1}^n \bar{\epsilon}_N \quad (33)$$

Aplicando el método de residuos ponderados a la ec. (32) y haciendo uso de (33) se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\hat{M} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\xi} + \hat{H} \hat{\xi} + f(a) = 0 \quad (34)$$

donde las matrices  $\hat{M}$  y  $\hat{H}$  tienen la misma estructura que la  $M$  y  $H$  en el problema térmico (ver ec. (38)). La ec. (34) debe resolverse de forma acoplada con las de flujo-temperatura ya estudiadas.

Si se utiliza una malla Lagrangiana, en la que las coordenadas se van actualizando en cada incremento de tiempo, los términos convectivos desaparecen en la ec. (32) y el invariante de deformación puede integrarse directamente en el tiempo como

$$t + \Delta t \hat{\xi} = \hat{\xi} + \int_t^{t+\Delta t} \dot{\hat{\xi}}(a) dt = \hat{\xi} + \Delta t \dot{\hat{\xi}}(a) \quad (35)$$

#### TRATAMIENTO DEL ROZAMIENTO

La consideración del fenómeno del rozamiento entre moldes y matrices en problemas de conformado es de gran importancia. Basicamente, existen tres procedimientos alternativos para incluir el efecto del rozamiento.

- a) El primer procedimiento consiste simplemente en establecer una relación proporcional de tipo Coulomb entre las reacciones tangenciales y normales en las superficies de contacto. En cada iteración, por consiguiente, se modifica la reacción tangencial de acuerdo con el valor del coeficiente de rozamiento y la reacción normal. Las reacciones tangenciales se introducen como fuerzas en la iteración siguiente mientras que la condición de contorno se reduce a movimiento nulo en dirección normal. El proceso iterativo prosigue hasta que en todos los nodos de contacto se satisface la condición de rozamiento, lo que normalmente implica incrementar notablemente el número de iteraciones.
- b) Introducción de elementos especiales de rozamiento de espesor prácticamente nulo similares a los que se utilizan en problemas de fricción entre superficies, como es el caso de la mecánica de rocas. En dichos elementos se define una ecuación constitutiva que establezca la relación entre las tensiones normales y tangenciales de forma lineal o no lineal. Un ejemplo de este tipo de elementos de rozamiento puede encontrarse en la referencia [13].
- c) Un modelo más simplificado consiste en introducir entre las dos superficies de contacto una capa de elementos de espesor finito, sobre la que se supone que actúan las fuerzas de rozamiento. Para ello, puede utilizarse un modelo sencillo que consiste en imponer en los puntos de integración una proporcionalidad entre las tensiones tangencial y la normal de la forma

$$\tau_t = \pm \bar{\mu} \sigma_n \quad (36)$$

donde  $\bar{\mu}$  es el coeficiente de rozamiento y el signo + o - depende de la velocidad relativa de las dos superficies en contacto. Zienkiewicz y otros [4] proponen una simplificación de la ec. (36) estableciendo simplemente una sencilla proporcionalidad entre la tensión de fluencia y la presión como

$$\sigma_y = \pm \bar{\mu} p \quad (37)$$

con lo que las fuerzas de rozamiento pueden introducirse "a priori" en el proceso de deformación.

#### ESTUDIO DE PROBLEMAS DE EMBUTICION DE PLANCHAS. FORMULACION DE LAMINAS VISCOSAS

La formulación del flujo viscoplástico puede aplicarse con facilidad para tratar problemas de conformado de planchas metálicas. Para ello, es sumamente útil hacer uso de la analogía flujo-elasticidad, explicada anteriormente, aplicada al caso de la teoría clásica de láminas. La formulación resultante se denomina de láminas viscosas [7]. Una de las particularidades más interesantes de dicha formulación es que, a diferencia del caso de la elasticidad bi y tridimensional, la condición de incompresibilidad no reviste problema alguno ya que, debido a la hipótesis de tensión plana de la teoría de láminas, puede satisfacerse haciendo simplemente el coeficiente de Poisson igual a 0.5 en la ecuación constitutiva y modificando convenientemente el espesor de la lámina de acuerdo con los valores de la deformación transversal, calculada a posteriori de manera que se cumpla la condición de volumen constante [6], [7].

#### Formulación de láminas viscosas de revolución

Muchos problemas de embutición de planchas de interés presentan simetría de revolución. Presentaremos brevemente las bases de la formulación de láminas viscosas con simetría de revolución. Obviamente, la eficiencia de dicha formulación se basa en la eficiencia de la formulación elástica análoga. Haremos uso aquí de la formulación de lámina elástica utilizando el sencillo elemento finito de dos nodos desarrollado por Zienkiewicz y otros [14].

En la Fig. 2 se muestra la geometría de un elemento de lámina de revolución de dos nodos. El vector de velocidades en la formulación de láminas viscosas análoga se interpola en la forma clásica como

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^2 N_i \underline{a}_i \quad (38)$$

donde

$$\underline{u} = [u, w, \theta]^T, \quad \underline{a}_i = [u_i, w_i, \theta_i]^T \quad (39)$$

y  $N_i = N_i(\xi) I_3$ , siendo  $N_i(\xi)$  la función de forma unidimensional del nodo  $i$  (ver Fig. 2).

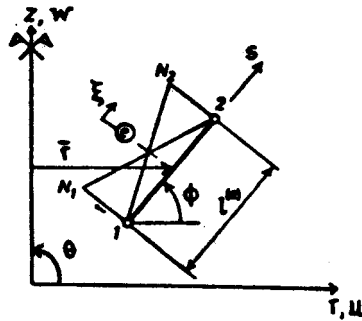


Fig. 2. Elemento finito unidimensional de dos nodos para utilización en la formulación de láminas viscosas de revolución.

En la ec. (39),  $u$ ,  $w$  y  $\theta$  son las velocidades horizontal, vertical y rotacional de un punto de la superficie media de la lámina y el índice  $i$  denota valores nodales.

El vector de velocidades de deformación generalizadas se expresa en función de las velocidades nodales como

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \sum_{i=1}^2 \underline{B}_i \underline{\dot{z}}_i \quad (40)$$

donde

$$\dot{\underline{\epsilon}} = [\dot{\epsilon}_r^0, \dot{\epsilon}_\theta^0, \dot{K}_r, \dot{K}_\theta, \dot{\gamma}]^T \quad (41)$$

siendo  $(\dot{\epsilon}_r^0, \dot{\epsilon}_\theta^0)$ ,  $(\dot{K}_r, \dot{K}_\theta)$  y  $\dot{\gamma}$  las velocidades generalizadas de membrana, flexión y cortante, respectivamente. Por otra parte, la matriz  $\underline{B}_i$  viene dada por [15]

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} N_{i,s} \sin \phi & N_{i,s} \cos \phi & 0 \\ \frac{N_i}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_{i,s} \\ 0 & 0 & -N_i \frac{\sin \phi}{r} \\ -N_{i,s} \cos \phi & N_{i,s} \sin \phi & -N_i \end{bmatrix} \quad (42)$$

con  $N_{1,s} = \frac{dN_1}{ds}$ .

Es interesante recalcar que la condición de incompresibilidad se satisface calculando las velocidades de deformación radial y circunferencial en cada punto como

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_r &= \dot{\epsilon}_r^0 + \dot{z}' \dot{k}_r \\ \dot{\epsilon}_\theta &= \dot{\epsilon}_\theta^0 + \dot{z}' \dot{k}_\theta\end{aligned}\quad (43)$$

y evaluando seguidamente de la condición de velocidad de deformación volumétrica nula

$$\dot{\epsilon}_z = -(\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta) \quad (44)$$

Por consiguiente, en cada estadio de la deformación el espesor puede modificarse de acuerdo con los valores de  $\epsilon_z$  de forma que el volumen total sea constante.

Por otro lado, la relación entre esfuerzos y velocidades de deformación puede escribirse como

$$\underline{g} = \hat{D} \dot{\underline{\epsilon}} \quad (45)$$

$$\text{siendo } \underline{g} = [N_r, N_\theta, M_r, M_\theta, Q]^T \quad (46)$$

donde  $(N_r, N_\theta)$ ,  $(M_r, M_\theta)$  y  $Q$  son los esfuerzos axiales, momentos flectores y esfuerzo cortante, respectivamente. La matriz  $\hat{D}$  de la ec. (45) se obtiene directamente de la teoría clásica de láminas (haciendo el coeficiente de Poisson igual a 0.5) como [15]

$$\hat{D} = \int_{-h/2}^{+h/2} \underline{S}^T \underline{D} \underline{S} dz' \quad (47)$$

donde  $h$  es el espesor de la lámina y

$$\underline{D} = 2\mu \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Las ecs. (38)-(45) pueden utilizarse para obtener el sistema discretizado de ecuaciones de equilibrio, por sustitución en el principio de trabajos virtuales, como

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{f} \quad (49)$$

viniendo la matriz de rigidez y el vector de fuerzas elementales dadas por

$$\begin{aligned}\underline{K}_{ij}^{(e)} &= 2\pi \int_{1e} \underline{B}_i^T \hat{D} \underline{B}_j r ds \\ \underline{f}_i^{(e)} &= 2\pi \int_{1e} N_i \underline{t} r ds + 2\pi r_i p_i\end{aligned}\quad (50)$$

donde  $l^e$  es la longitud del elemento y  $t$  y  $p_i$  son los vectores de fuerzas distribuidas y de fuerzas puntuales nodales respectivamente.

Adviértase que debido a la dependencia de la viscosidad con la deformación, el cálculo de la matriz de rigidez implica una doble integral (ver ec. (47)). Esto se efectúa en la práctica utilizando una cuadratura numérica de Gauss.

Se ha demostrado [14] que para análisis de láminas delgadas el elemento de dos nodos considerado requiere utilizar una integración numérica de un solo punto de Gauss para el cálculo de los términos de cortante de la matriz de rigidez. De hecho, se obtienen excelentes resultados si toda la matriz se calcula con un solo punto de integración [14], lo que permite obtener una forma explícita directa de la matriz de la ec. (50) como

$$\underline{K}_{ij}^{(e)} = 2\pi \bar{B}_i^T \hat{D} \bar{B}_j \bar{r} l^{(e)} \quad (51)$$

donde la barra indica valores en el centro del elemento

La formulación de láminas viscosas puede extenderse fácilmente al estudio de la deformación de planchas metálicas de forma arbitraria haciendo uso de la teoría general de láminas elásticas en 3 dimensiones. Más información sobre este tema puede encontrarse en las referencias [7] y [15].

#### INCLUSION DE EFECTOS ELASTICOS

En muchos problemas de conformado y embutición de metales puede interesar tener en cuenta el efecto de las deformaciones elásticas. Situaciones de este tipo ocurren en el estudio del inicio del proceso de deformación del material en problemas de extrusión o laminado y en el estudio de deformaciones residuales en problemas de embutición, entre otros. La inclusión de los efectos elásticos en la formulación del flujo viscoplástico no es excesivamente complicada aunque confiere un nuevo carácter al proceso de solución que es indudablemente más costoso. Examinaremos seguidamente dos procedimientos para tener en cuenta dichos efectos.

##### Método simplificado para incluir las deformaciones elásticas

Supuesto el flujo incompresible, la ecuación constitutiva (4) se modifica como

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^p + \dot{\epsilon}_{ij}^v = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} \quad (52)$$

donde  $G$  es el módulo de rigidez elástico del material y  $\dot{\sigma}_{ij}$  la derivada Jaumann de las tensiones desviadoras de Cauchy que viene dada por [21]

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{ij} + u_k \sigma_{ij,k} - \sigma_{ik} w_{kj} - \sigma_{jk} w_{ki} \quad (53)$$

siendo

$$W_{1j} = \frac{1}{2} (u_{j,1} - u_{1,j}) \quad (54)$$

La ec. (52) puede escribirse como

$$\sigma_{1j}^i = 2\mu (\dot{\epsilon}_{1j} - \dot{\epsilon}_{1j}^e) = 2\mu (\dot{\epsilon}_{1j} - \frac{1}{2G} \sigma_{1j}^i) \quad (55)$$

Por consiguiente, las velocidades de deformación elásticas  $\dot{\epsilon}_{1j}^e$  pueden interpretarse como unas velocidades de deformación iniciales y su efecto puede asimilarse al de las deformaciones producidas por efectos térmicos en un problema elástico. Dicho efecto puede tenerse en cuenta sencillamente modificando sucesivamente el vector de fuerzas en las ecuaciones de elementos finitos como

$$\tilde{f} = f + \int_V B^T D \tilde{\epsilon}^e dv \quad (56)$$

El vector adicional de fuerzas dependiente de  $\tilde{\epsilon}^e$  añade una nueva no linealidad al problema. No obstante, puede comprobarse que, en general, debido a la poca relevancia de las deformaciones elásticas el número de iteraciones necesario para convergencia no aumenta excesivamente.

Método directo para incluir las deformaciones elásticas

El procedimiento directo para tener en cuenta las deformaciones elásticas en las ecuaciones del flujo viscoplástico implica resolver simultáneamente las ecuaciones del flujo incompresible con la ecuación constitutiva (55). Para ello, es útil hacer uso de una formulación mixta en velocidades, tensiones desviadoras y presiones. Puede demostrarse que, aplicando adecuadamente el método de residuos ponderados a cada una de las ecuaciones básicas del problema, se obtiene un sistema de ecuaciones en las variables mencionadas que puede resolverse directamente. Más información sobre este tema puede encontrarse en las referencias [16] y [17].

#### INCLUSION DE LOS EFECTOS DE DEGRADACION DEL MATERIAL POR FORMACION DE HUECOS

Uno de los puntos debiles de la formulación del flujo viscoplástico puro es su incapacidad para predecir la degradación y fallo del material deformado. Por consiguiente, dicha formulación no puede reproducir, en principio, fenómenos tan importantes en procesos de embutición de chapa como lo es la rotura del material.

Recientemente, se ha comprobado que en metales ductiles los mecanismos de fractura que producen ablandamiento y rotura última del material son debidos a la formación, crecimiento y agrupación de huecos microscópicos. Los huecos se forman principalmente por fractura o deslizamiento interfacial de las particulas y, tras ello, crecen debido a la intensidad de la deformación plástica. Finalmente, se producen agrupaciones entre huecos cuando los ligamentos.



entre huecos vecinos se debilitan suficientemente.

Una formulación racional que describe la formación crecimiento y agrupación final de huecos puede desarrollarse en base al modelo propuesto por Gurson [18]. Dicho modelo tiene la estructura formal de las ecuaciones de la plasticidad no asociada y considera los efectos de la dilatación por efectos plásticos. El proceso de fractura ductil se describe como una pérdida aparente de volumen de material activo con una correspondiente disminución de la tensión macroscópica media. Dicho modelo ha sido utilizado por Chu [19] en el contexto de análisis elastoplástico de problemas de embutición de chapa metálica. Recientemente, Oñate y Kleiber [20] han demostrado como la consideración de dicho modelo en la formulación del flujo plástico conduce a un sistema de ecuaciones análogo al de la elasticidad comprensible clásica. Por consiguiente, puede hacerse uso directo de programas de elementos finitos desarrollados para elasticidad en dos y tres dimensiones intercambiando los conceptos de desplazamiento y deformación por velocidad y velocidad de deformación, respectivamente (similarmente a la formulación de flujo plástico clásica) y los de módulo de rigidez y coeficiente de Poisson por los parámetros análogos obtenidos a partir de la formulación de flujo plástico con la ecuación constitutiva de Gurson. Más información sobre este tema puede encontrarse en la referencia [20].

#### EJEMPLOS

##### Ejemplo 1. Extrusión plana con efectos térmicos

En este ejemplo se estudia un caso de extrusión plana teniendo en cuenta los efectos acoplados de la temperatura. Las características geométricas y mecánicas del problema se muestran en la Fig. 3. Puede apreciarse en dicha figura, la alta dependencia de las propiedades del material con la temperatura. El coeficiente  $m$  de la ec. (29) se ha tomado igual a 0.9. Para el análisis se han utilizado 39 elementos Lagrangianos de 9 nodos con integración selectiva [11]. Las paredes de la matriz se han supuesto infinitamente deslizables (rozamiento nulo). En la Fig. 5a se muestran las líneas isotérmicas obtenidas para diferentes valores de la velocidad de entrada. Se deduce de dichos resultados la gran influencia de la velocidad de extrusión en la distribución de temperaturas. En la Fig. 4 se muestran los valores de la presión de extrusión obtenidos para las velocidades de extrusión consideradas.

##### Ejemplo 2. Extrusión inversa en dos dimensiones

Se ha analizado un problema de extrusión inversa con simetría de revolución con efecto acoplado de temperatura. Las características geométricas y mecánicas del problema así como la malla de elementos finitos de 9 nodos utilizada se muestran en la Fig. 6a. Las propiedades del material se han tomado independientes de la temperatura y se ha considerado un flujo plástico puro. El rozamiento con las paredes de la matriz se ha tenido en cuenta incluyendo una línea delgada de elementos de rozamiento de acuerdo con el

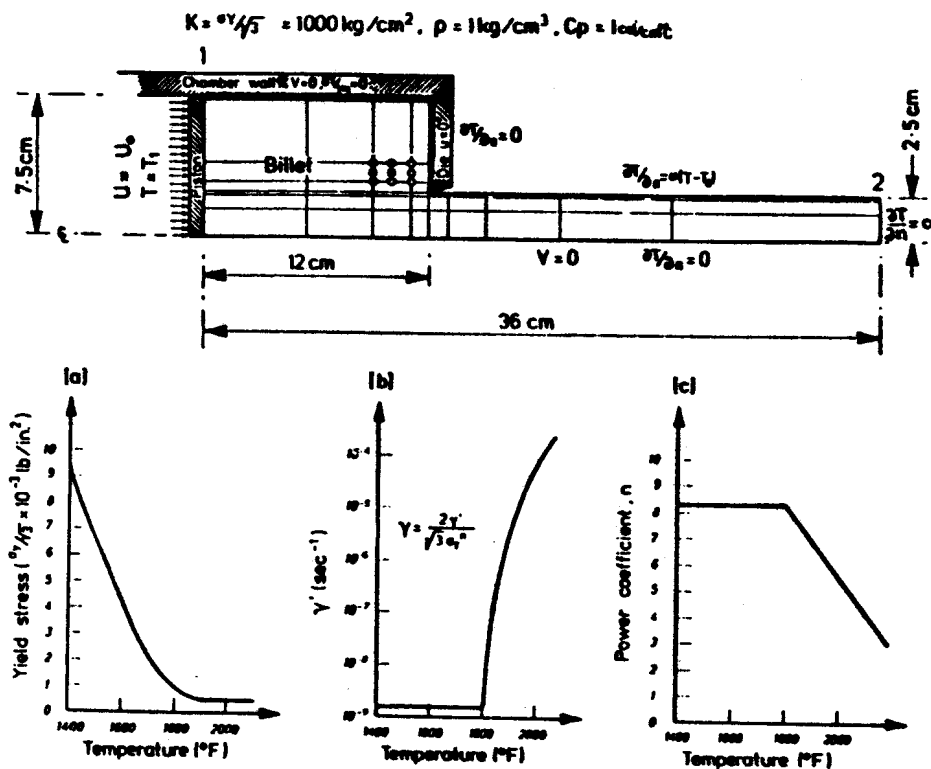


Fig. 3. Extrusión plana con efectos térmicos. Geometría, malla de 39 elementos de 9 nodos y propiedades del material.

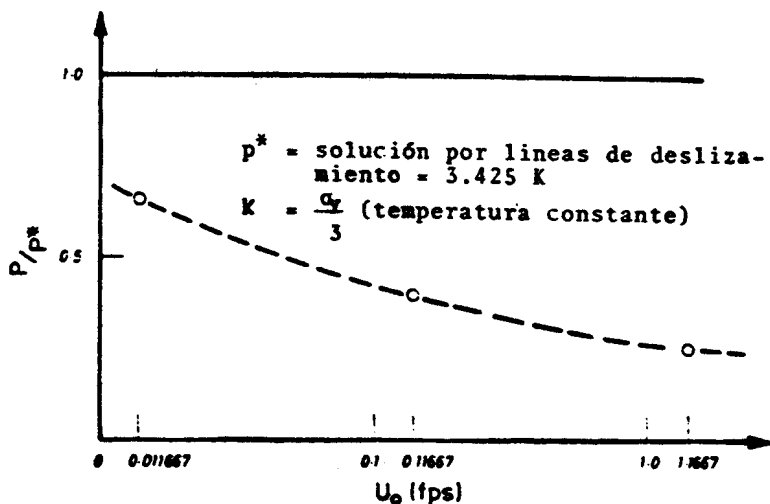


Fig. 4. Variación de la presión de extrusión con la velocidad.

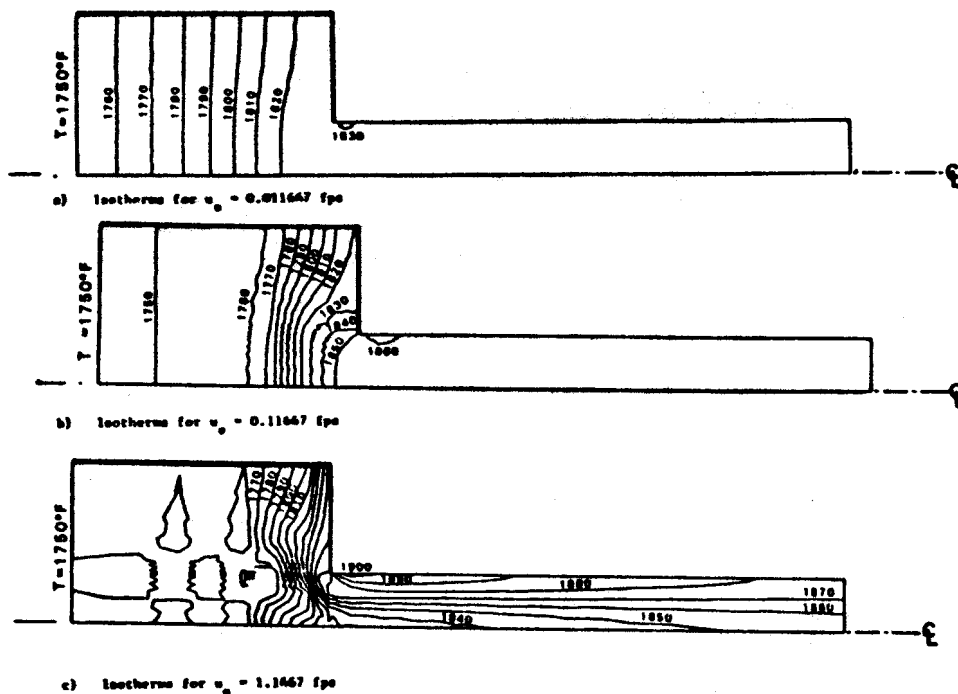


Fig. 5a. Líneas isotermas para varias velocidades de entrada ( $T_1 = 1.7509$  F).

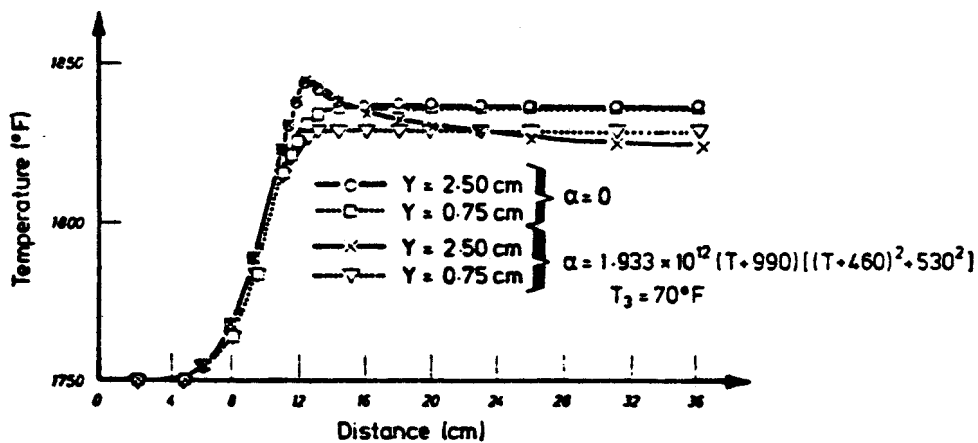


Fig. 5b. Distribución de la temperatura para  $y = 0.75$  y  $2.5$  con y sin efectos de radiación ( $u_0 = 0.11667$  fps).

método tercero explicado en el apartado en que se trató este tema anteriormente. En la Fig. 6 se muestra el valor de la presión de extrusión obtenida así como la distribución de isotermas para una velocidad de extrusión de 12 cm/s.

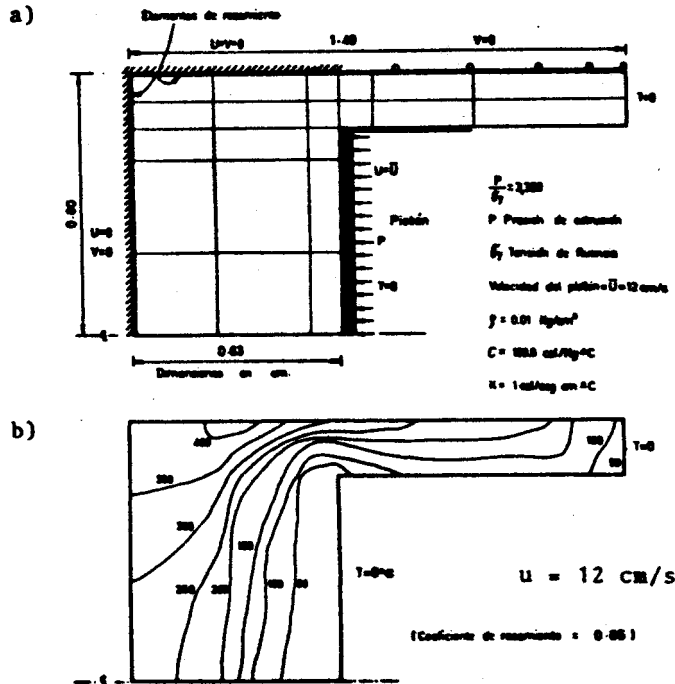


Fig. 6. Extrusión inversa plana. a) Geometría y propiedades del material. b) Líneas isotermas para  $u = 12 \text{ cm/s}$ .

### Ejemplo 3. Laminado en caliente de un planchon rectangular

Se estudia el caso de laminado en caliente de un planchon (slab) rectangular como un problema de flujo plástico puro en dos dimensiones.

En la Fig. 7 se muestra la geometría, propiedades del material y malla de elementos finitos utilizada. Obsérvese la alta dependencia de la tensión de fluencia con la temperatura. El rozamiento entre rodillo y planchon se ha tenido en cuenta utilizando de nuevo el procedimiento de incluir una capa delgada de elementos en esa zona en la que se impone una proporcionalidad directa entre la presión y la tensión de fluencia como se ha explicado anteriormente. En la Fig. 8 se muestra el campo de velocidades obtenido para

una velocidad del rodillo de 28.73 cm/s. En la Fig. 9 se han representado las líneas isoterma para dos valores diferentes de la temperatura a la entrada en el rodillo de 700 y 400 grados Kelvin. Puede observarse el mayor incremento porcentual de temperatura para el caso de la temperatura de 400º debido al mayor trabajo de deformación necesario para laminar un material más frío. Finalmente, en la Fig.10 se muestran los valores de la fuerza y par de laminado para los dos valores de la temperatura de entrada y diferentes coeficientes de rozamiento.

Propiedades del material

$K=0.4302 \text{ cal/cm}^2 \text{ }^\circ\text{K}$   
 $\rho=0.00275 \text{ Kg/cm}^3$   
 $c=239.01 \text{ cal/Kg } ^\circ\text{K}$   
 $\alpha_1=0.7314 \times 10^{-3} \text{ cal/cm}^2 \text{ }^\circ\text{K}$   
 $\alpha_2=0.717 \times 10^{-2} \text{ cal/cm}^2 \text{ }^\circ\text{K}$

$$q_y (\text{MN/m}^2) = \frac{1}{c_1} \left( \frac{z}{c_2} \right)^{1/c_3} \sqrt{\left( \frac{z}{c_2} \right)^{2/c_3} + 1}$$

$z = \frac{c}{E} e^{c_1/RT}$  con:

$c_1 = 0.01901 \text{ m}^2/\text{MN}$   
 $c_2 = 7.92 \times 10^9 \text{ 1/seg.}$   
 $c_3 = 5.0$   
 $c_4 = 1.39 \times 10^5 \text{ J/g mole}$   
 $R = 8.311 \text{ J/g mole}$

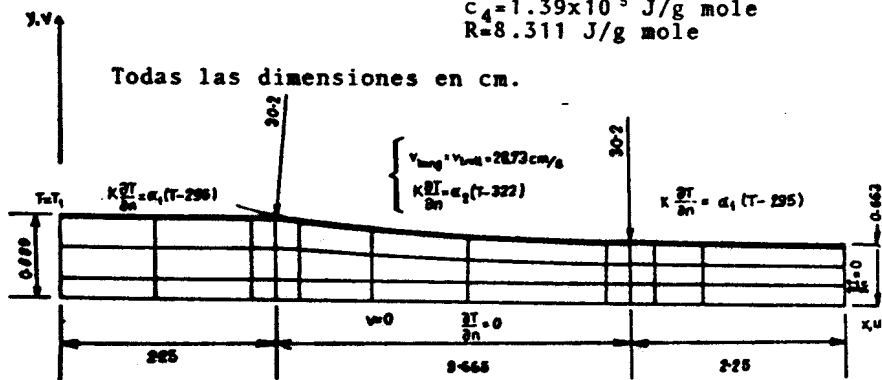


Fig. 7. Laminado en caliente. Geometría, propiedades del material y malla de elementos finitos de 9 nodos.

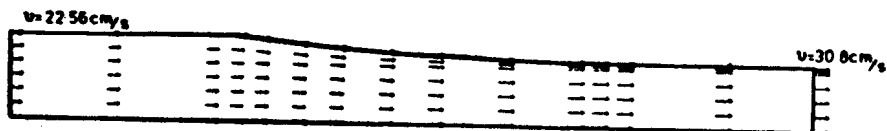


Fig. 8. Distribución de velocidades para  $T_1 = 400^\circ \text{ K}$ . Contacto rígido entre rodillo y planchon.

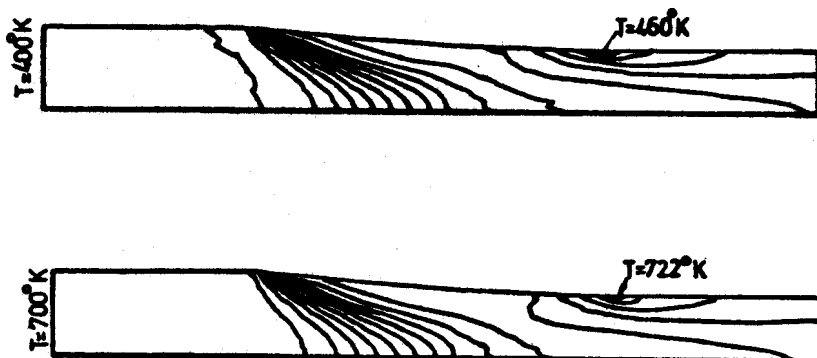


Fig. 9. Líneas isotermas para diferentes temperaturas a la entrada en el rodillo.

$\bar{\mu}$	0.01	0.1	0.5	Contacto rígido	T °K
fuerza de laminado kN.	52.51	100.73	129.73	138.33	400
	22.41	34.54	45.83	52.14	700
par de laminado kNxcn./cm.	66.71	202.77	262.31	283.60	400
	34.45	70.53	92.75	104.89	700

Fig. 10. Valores de la fuerza y par de laminado para varios coeficientes de rozamiento entre rodillo y planchón y varias temperaturas de entrada.

Ejemplo 4. Embutición profunda de una plancha circular con un punzón semiesférico.

Como último ejemplo, se presenta el análisis de un problema de embutición profunda de una plancha metálica circular. La geometría de la plancha y del punzón puede verse en la Fig. 11a. Obsérvese que la plancha puede deslizar entre los extremos de la matriz que la sujeta. Para el análisis se utilizaron 40 elementos de lámina de revolución de 2 nodos. Se tuvo asimismo, en cuenta el efecto del endurecimiento por deformación con la siguiente relación uniaxial entre la tensión de fluencia y la deformación efectiva.

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 5.4 + 27.8(\bar{\epsilon})^{0.504} \text{ T/in}^2 & \text{para } \bar{\epsilon} < 0.36 \\ \sigma_y &= 5.4 + 24.4(\bar{\epsilon})^{0.375} \text{ T/in}^2 & \text{para } \bar{\epsilon} > 0.36 \end{aligned}$$

El análisis se efectuó para varios coeficientes de rozamiento entre planchón/punzón y punzón/matriz. El efecto del rozamiento se ha tenido en cuenta mediante un adecuado ajuste de las reacciones tangencial y normal en las superficies de contacto hasta satisfacer una condición de rozamiento tipo Coulomb.

Los resultados para la variación de la fuerza de embutición con la deformación del planchón para varios coeficientes de rozamiento se presentan en la Fig. 11a. Finalmente, en la Fig. 11b. se muestra la distribución de deformaciones transversales para varias posiciones deformadas del planchón para un coeficiente de rozamiento entre todas las superficies de 0.04.

### CONCLUSIONES

La formulación del flujo viscoplastico, en combinación con el método de los elementos finitos, es un procedimiento efectivo para el análisis numérico de la mayor parte de los problemas de conformado de metales de interés práctico. La formulación permite incluir de forma sencilla efectos complejos como el acoplamiento térmico, el endurecimiento por deformación y el rozamiento. La analogía entre las ecuaciones del flujo viscoplastico a bajas velocidades y las de la elasticidad incompresible es de gran utilidad para la utilización directa de programas de elementos finitos desarrollados para problemas de elasticidad. Esta analogía se muestra particularmente efectiva para obtener la formulación de láminas viscosas para estudio de problemas de embutición de chapa, a partir de la teoría de láminas elásticas clásica. Las líneas de desarrollo futuro de la formulación del flujo viscoplastico apuntan hacia un estudio más detallado de las posibilidades de incluir los efectos elásticos para problemas concretos y la consideración de los fenómenos de degradación del material por efecto de la deformación a partir de la teoría de la plasticidad con huecos, como se ha apuntado en este trabajo.

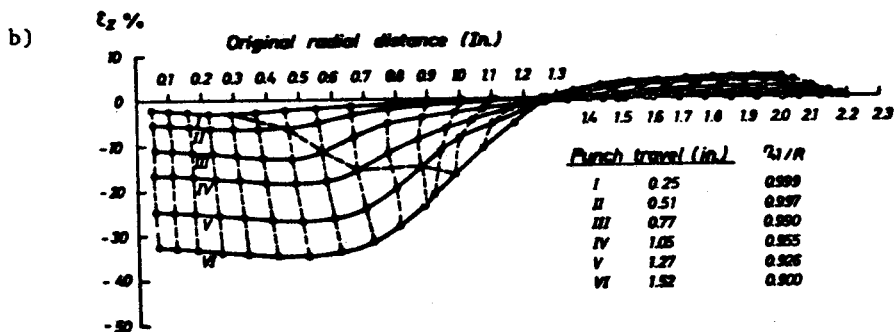
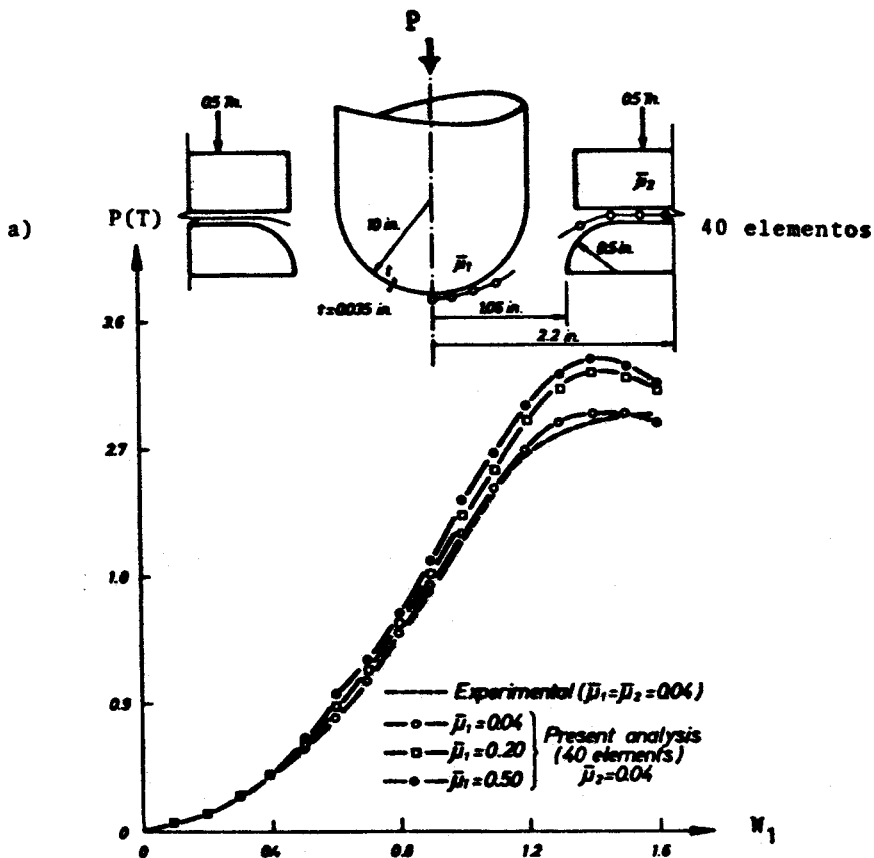


Fig. 11. Embutición profunda de una plancha circular. a) Variación de la fuerza de embutición para varios coeficientes de rozamiento. b) Variación de la deformación transversal con el recorrido del punzón ( $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0.04$ ).



REFERENCIAS

- [1] Zienkiewicz, O.C., y Corneau, I.C. "Viscoplasticity, Plasticity and Creep in Elastic Solids-A Unified Numerical Solution approach". Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 8, 1979, pags. 821-845.
- [2] Zienkiewicz, O.C. "Viscoplasticity, plasticity, creep and viscoplasticity flow (problems of small, large and continuing deformation)". Int. Conf. on Computational Methods in Nonlinear Mechanics. Texas, Austin, 1974.
- [3] Zienkiewicz, O.C. y Godbole, P.N. "Flow of Plastic and Visco-plastic Solids with Special Reference to Extrusion and Forming Processes." Int. J. Meth. Engng., Vol. 8, 1974, pags. 3-16.
- [4] Zienkiewicz, O.C., Jain, P.C. y Oñate, E. "Flow of Solids during Forming and Extrusion. Some Aspects of Numerical Solutions". Int. J. Solids Struct., Vol. 14, 1978, pags. 15-38.
- [5] Zienkiewicz, O.C., Oñate, E. y Heinrich, J.C. "A General Formulation for Coupled Thermal Flow of Metals Using Finite Elements". Int. J. Num. Engng., Vol. 17, 1981, pags. 1497-1514.
- [6] Oñate, E. "Plastic Flow of Metals, I. Thermal Coupling Behaviour. II. Thin Sheet Forming". Ph. D. Thesis, University College of Swansea, 1978.
- [7] Oñate, E. y Zienkiewicz, O.C. "A Viscous Shell Formulation for the Analysis of this Sheet Metal Forming". Int. J. Mech. Sc., Vol. 25, 1983, pags. 305-335.
- [8] Numerical Analysis of Forming Processes. J. Wiley, 1984.
- [9] Proceedings of the International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes. Pineridge Press, 1982.
- [10] Jain, P.C. "Plastic Flow in Solids (Static, Quasistatic and Dynamic Situations Including Temperature Effects)". Ph. D. Thesis, University College of Swansea, 1976.
- [11] Zienkiewicz, O.C. "El Método de los Elementos Finitos". Ed. Reverté, Barcelona, 1979.
- [12] Taylor, R.L. y Zienkiewicz, O.C. "Mixed Finite Element Solutions of Fluid Flow Problems". Cap. 1, en Finite Element in Fluids, Vol. 4, Ed. Gallagher et al., John Wiley, 1982, pags. 1-20.
- [13] Carol, I., Gens, A., y Alonso, E.E. "Un Elemento Junta Tridimensional para Análisis de Macizos Rocosos Diaclasados"; en Aplicaciones del Método de los Elementos Finitos en Ingeniería, Vol. 3, Eds. E. Alonso, A. Gens, y E. Oñate, Publ. de la Univ. Polit., Cataluña, 1986, pp. 153-172.

- [14] Zienkiewicz, O.C., Bauer, J., Morgan, K. y Oñate, E. "A Simple and Efficient Element for Axisymmetric Shells" Int. J. Num. Meth. Engng., vol. 11, 1977, pags. 1545-1559.
- [15] Oñate, E. y Perez Lama, R. "Possibilities of the finite element viscous shell approach for analysis of sheet metal forming problems." In Simulations of Metal Forming Processes by the Finite Element Method, Springer-Verlag, 1986.
- [16] Shimazeki, Y. y Thompson, E. G. "Elasto-viscoplastic Flow with Special Attention to boundary conditions". Int. J. Num. Engng., Vol. 17, 1981, pags. 97-112.
- [17] Thompson, E.G. y Berman, H. M. "A Study State Analysis of elasto-viscoplastic Flow during rolling". Numerical Analysis of Forming Processes. J. Wiley, 1984.
- [18] Gurson, A.L. "Continuum Theory of Ductile Rupture by void nucleation and growth. Y. Yield Criteria and flow Rules for porous ductile materials. J. Ing. Mat. Tech. Vol. 99, 1989, pags. 2-15.
- [19] Chu, C.C. "An Analysis of localized Necking in punched stretching". Int. J. Solids Struct., Vol. 16, 1980, pgs. 913-931.
- [20] Oñate, E. y Kleiber, M. "Plastic Flow of Void Containing Metals. Applications to Axisymmetric Sheet Forming Problems". Proceedings of the II International Conference on Numerical Methods in Industrial Forming Processes. Chalmers Univ. Gothmeburg, Suecia, Agosto, 1986.
- [21] Malvern, L.E. "Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium". Prentice- Hall, 1969.