

APLICACION DE LOS METODOS  $\alpha$  DE INTEGRACION TEMPORAL AL  
PROBLEMA DE TRANSMISION DEL CALOR CON CAMBIO DE FASE

Mario Storti  
Luis Crivelli  
Sergio Idelsohn

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la  
Industria Química-INTEC-CONICET  
Universidad Nacional del Litoral  
Santa Fe-Argentina

RESUMEN

En trabajos recientes [1,4,16] se ha propuesto un método de dominio fijo y sin parámetros de regularización para tratar el problema de transmisión del calor con cambio de fase. En este trabajo se estudia la aplicación de la familia de métodos  $\alpha$  de integración temporal a esa misma discretización. Particular atención se dedica al método explícito ( $\alpha=0$ ). El criterio de elección del paso de tiempo para obtener estabilidad es simple y confiable. Finalmente se presentan ejemplos numéricos que permiten comparar la eficiencia de los diferentes esquemas analizados.

ABSTRACT

In recent works a new fixed domain method without regularization parameters for heat conduction problems with phase change was presented. In this work the application of  $\alpha$ -methods of time-integration to that semidiscretization is studied. Particular attention is devoted to the explicit method; i.e.  $\alpha=0$ . The proposed bound for the time step is simple and reliable. Finally, several numerical examples are presented that enable us to compare the efficiency of the different schemes.

## INTRODUCCION

Los problemas de frontera móvil debido a cambio de fase del tipo de Stefan ocurren en muchas situaciones de interés ingenieril. Entre ellas podemos citar:

1. Ablación del blindaje térmico en la reentrada de vehículos y en las toberas de motores a reacción en el área de la industria aeronáutica.
  2. Congelamiento natural o inducido de suelos en ensayos geotérmicos.
  3. Fusión y solidificación de metales y aleaciones.
  4. Problemas de soldadura.
  5. Transferencia de calor en los elementos combustibles de una central nuclear bajo hipótesis de accidente.
- Etc.

Podemos definir al problema de Stefan como la resolución simultánea de una ecuación de tipo parabólico en dos dominios disjuntos separados por una interfase móvil. El movimiento de la interfase está acoplado a su vez a las soluciones en cada dominio. Por ejemplo, en el caso de cambio de fase, se debe satisfacer el balance de energía; esto es, la velocidad de movimiento de la interfase está dada por el flujo neto de calor que llega a la interfase.

Se han propuesto varios métodos para la resolución numérica de este problema. Podemos clasificarlos dentro de dos grandes líneas a saber:

1. Aquella que hace hincapié en el problema de Stefan tal cual como se describió más arriba, es decir, resolviendo la ecuación del calor en cada fase y siguiendo ("tracking") posteriormente la interfase.
2. Aquella en la cual el balance en la interfase sólo aparece en forma integrada dentro de la función entalpía. La interfase se obtiene a partir del campo de temperaturas una vez resuelto un sistema de ecuaciones en el vector de temperaturas modales. Se les llama métodos de dominio fijo.

Los métodos de seguimiento poseen la ventaja de que, gracias al uso de mallas deformables o nodos que se colocan sobre la interfase, permiten aproximar mucho mejor el campo de temperaturas cuyo gradiente, como es sabido, es discontinuo a través de la interfase. Sin embargo la mayoría de estos algoritmos sufren severas restricciones para pasar a dos o tres dimensiones y se caracterizan en general por una muy escasa robustez. Además es necesario conocer a priori la forma (en el sentido topológico) en que evolucionará la interfase).

Los métodos de dominio fijo combinados con una formulación por elementos finitos-Galerkin poseen una versatilidad que los hace muy aptos para su uso en problemas industriales. Dentro de esta línea se destacan los siguientes:

- a. Métodos de regularización: representan el calor latente por un calor específico altamente dependiente de la temperatura.

- b. Índice de congelamiento: se basa en un cambio de la variable principal de temperatura al índice de congelamiento ("freezing index").
- c. Formulación en entalpía: toman la entalpía como variable principal

El método de regularización es el más obvio dentro de los métodos de dominio fijo y al cual pertenecen los primeros trabajos que se publicaron en esta línea. Si bien en principio el parámetro de regularización es arbitrario, se encuentra que la solución depende fuertemente de él, lo que constituye su principal desventaja. Se ha encontrado que el parámetro de regularización no debe ser tan chico como para que el ancho de la interfase sea mucho menor que un elemento. Además si en un paso de tiempo la interfase avanza varios elementos el calor latente liberado por estos se pierde, lo que impone una severa restricción en el paso de tiempo. Sin embargo hasta el momento parece evidente que algún tipo de regularización es necesaria cuando se debe tratar la aparición de zonas pastosas ("mushy") i.e., zonas de medida no nula en las que la temperatura es igual a la de cambio de fase.

El uso del índice de congelamiento se restringe al caso en que las propiedades físicas no varían con la posición ni con la temperatura y la formulación en entalpía lleva a la aparición de zonas pastosas artificiales.

En trabajos recientes hemos planteado la resolución del problema de Stefan mediante un esquema, basado en temperaturas y sin parámetros de regularización. En la forma usual este método lleva, en cada paso de tiempo, a la resolución de un sistema no lineal en el vector de temperaturas de la forma:

$$\underline{R}(u) = 0$$

donde  $\underline{R}$  es el vector residuo del sistema de ecuaciones y  $\underline{u}$  el vector de temperaturas. Entre otros términos el residuo contiene al vector de entalpías nodales. Este vector es discontinuo como función del vector de temperaturas, lo que se traduce en un serio problema para la resolución del sistema.

Hemos encontrado [4,16] que el uso de técnicas especiales de integración en los elementos parcialmente fundidos mejora notablemente el comportamiento del residuo, disminuye el error y permite una evaluación simple de la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones anterior, mediante la evaluación de una matriz de capacidad adicional asociada a la interfase.

En este trabajo explotamos una ventaja más del esquema precedente ya que la evaluación simple de la matriz de capacidad permite el empleo de toda la gama de métodos  $\alpha$  de integración temporal.

#### SEMIDISCRETIZACION

Sea el problema de conducción del calor con cambio de fase:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (g) + Q \quad (1)$$

donde:

$$h = \left\{ \int_{T_0}^T \rho c_p(T) dT + h_0 \right\} + L \epsilon(T-T_m) = h^{SCF} + h^{CF} \quad (2.a)$$

$$\epsilon(T-T_m) = \begin{cases} 0; & \text{si } T > T_m \\ 1; & \text{si } T \leq T_m \end{cases} \quad (2.b)$$

$$\begin{aligned} q &= k \nabla T = \text{flujo calórico} \\ k &= \text{conductibilidad térmica} \\ Q &= \text{generación de calor por unidad de volumen,} \\ &\quad \text{unidad de tiempo} \end{aligned} \quad (3)$$

Aplicando el método de Galerkin hacemos:

$$T = \sum_{\mu=1}^N T_{\mu} N_{\mu}(\underline{x}) \quad (4.a)$$

$N$  = número de nodos

Obtenemos las  $N$  ecuaciones pesando la ecuación (1) con las  $N$  funciones de forma  $N_{\mu}(\underline{x})$ :

$$\int_{\Omega} (N_{\mu}(\underline{x}) \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{g} - Q) d\Omega = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, N \quad (4.b)$$

Integrando por partes obtenemos, cuando no hay cambio de fase, la formulación débil del problema:

$$h_{\mu} = f_{\mu} + g_{\mu} \quad (5)$$

Donde:

$$h_{\mu} = \int_{\Omega} N_{\mu}(\underline{x}) h(T(\underline{x})) d\Omega \quad (6)$$

$$f_{\mu} = \int_{\Omega} \underline{\nabla} N_{\mu}(\underline{x}) \cdot \underline{g} d\Omega \quad (7)$$

$$g_{\mu} = \int_{\Omega} N_{\mu}(\underline{x}) \cdot Q(\underline{x}) d\Omega + \int_{\Gamma} N_{\mu} q \cdot \hat{n} ds \quad (8)$$

$h_{\mu}$ ,  $f_{\mu}$  y  $g_{\mu}$  representan físicamente la entalpía nodal del nodo  $\mu$ , el flujo de conducción al nodo  $\mu$  y el flujo externo aplicado al nodo  $\mu$ . Esta misma formulación sigue siendo válida en presencia de un cambio de fase. Basta con agregar a la ecuación 4 el balance de energía en la interfase pesado convenientemente con la función  $N_{\mu}(\underline{x})$ . La ex-

presión para la entalpía nodal se convierte entonces en la integral de una función discontinua sobre el elemento, en aquellos elementos por los cuales pasa la interfase. Para efectuar esta integral en forma numérica deben aplicarse técnicas especiales de integración [4], [16].

#### DISCRETIZACION TEMPORAL

Una de las formas más comunes de integrar temporalmente la ecuación anterior es poner:

$$h_{\mu} = \frac{h_{\mu}(t+\Delta t) - h_{\mu}(t)}{\Delta t} \quad (9)$$

$$g_{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} g_{\mu}(t') dt' \quad (10)$$

$$f_{\mu} = f_{\mu}(t+\alpha \Delta t) = (1-\alpha) f_{\mu}(t) + \alpha f_{\mu}(t + \Delta t) \quad (11)$$

Estos son los llamados métodos  $\alpha$ .

Reordenando y reemplazando en la ecuación [5]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} h_{\mu}(t + \Delta t) - \alpha f_{\mu}(t+\Delta t) = \\ & = g_{\mu} + (1-\alpha) f_{\mu}(t) + \frac{1}{\Delta t} h_{\mu}(t) \end{aligned} \quad (12)$$

#### RESOLUCION DEL SISTEMA NO LINEAL

Si conocemos el valor de las temperaturas nodales en  $t$ , la ecuación [12] representa un conjunto de  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnita que son las temperaturas nodales en  $t+\Delta t$ , que se puede representar en la forma:

$$\underline{C}(\underline{T}(t + \Delta t)) = \underline{G}(\underline{T}(t)) \quad (13)$$

Donde  $\underline{T}$  es el vector de temperaturas nodales de dimensión  $N$  y  $\underline{C}$ ,  $\underline{G}$  son mapeos:

$$\underline{C} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N ; \quad \underline{G} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$$

La solución habitual a este problema no lineal es: conociendo una aproximación  $\underline{x}$  al vector  $\underline{T}(t+\Delta t)$  buscar una solución aproximada  $\underline{x}$  como:

$$\underline{x}^{i+1} = \underline{x}^{i+1} + \Delta \underline{x}^i$$

$$\underline{C}(\underline{x}^i) + \underline{S} \Delta \underline{x}^i = \underline{C}(\underline{T}(t))$$

$$[\underline{S}]_{\mu\nu} = \frac{\partial C_{\mu}}{\partial T_{\nu}}$$

que representa un sistema lineal de ecuaciones de  $n+n$  que se puede resolver si la matriz  $\underline{S}$  es inversible.

Si bien la parte de la matriz tangente que corresponde a los flujos de conducción no presentan ninguna dificultad, la parte de las entalpías nodales encierra una irregularidad al ser  $h(T)$  discontinua en  $T=T_m$  la temperatura de cambio de fase. Más todavía, separando las entalpías en dos términos:

$$h_{\mu} = h_{\mu}^{SCF} + h_{\mu}^{CF} = \int_{\Omega}^{N_{\mu}} h^{SCF} d\Omega + \int_{\Omega}^{N_{\mu}} h^{CF} d\Omega$$

Vemos que  $h^{SCF}$  corresponde a la entalpía nodal de un problema, eventualmente no lineal, pero sin cambio de fase y por lo tanto no hay problemas en el cálculo de las derivadas con respecto a las temperaturas nodales:

$$M_{\mu\nu}^{SCF} = \frac{\partial h_{\mu}^{SCF}}{\partial T_{\nu}} = \int_{\Omega} N_{\mu}(\underline{x}) C_p(T(\underline{x})) N_{\nu}(\underline{x}) d\Omega$$

Por lo tanto el problema reside en el cálculo, si es que existe de:

$$M_{\mu\nu}^{CF} = \frac{\partial h_{\mu}^{CF}}{\partial T_{\nu}}$$

En un trabajo reciente hemos demostrado que:

$$M_{\mu}^{CF} = \int_{T=T_m} N_{\mu}(\underline{x}) N_{\nu}(\underline{x}) L \frac{ds}{|\nabla T|}$$

donde  $ds$  representa el diferencial de arco (a superficie en  $\mathbb{R}^3$ ), sobre la superficie  $T=T_m$ .

La obtención de esta matriz de capacidad de interfase permite la implementación del método explícito poniendo  $\alpha = 0$  en (12) y aproximando:

$$\begin{aligned} h_{\mu}(t+\Delta t) - h_{\mu}(t) &= \underline{M}_{\mu} (\underline{T}(t+\Delta t) - \underline{T}(t)) \\ &= \Delta t (g(t) + f(t)) \end{aligned} \quad (14)$$

Como es usual en el uso de métodos explícitos los términos de  $M$  se "amontonan" (lumping) en la diagonal redefiniendo:

$$M_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & ; \text{ si } \mu \neq \nu \\ \sum_{\nu} M_{\mu\nu} & \mu = \nu \end{cases} \quad (15)$$

De esta forma la resolución del sistema anterior se hace obvia quedando:

$$\Delta T_{\mu} = \frac{1}{M_{\mu\mu}} (g_{\mu} + f_{\mu}) \Delta t \quad (16)$$

#### ESTABILIDAD DEL ESQUEMA

Es sabido que el esquema explícito es inestable para  $\Delta t > \Delta t_{cr}$ , de manera que todas las simplificaciones son de escasa utilidad si no se obtiene una cota que sea confiable, simple y no demasiado conservativa para el  $\Delta t_{cr}$ . Un análisis simple de la estabilidad se basa en la estabilidad de la solución alrededor de una solución estacionaria. Sea de  $g = \text{constante}$  ( $f_g(t)$ ) y  $T^*$  la solución estacionaria correspondiente:

$$0 = g + f(T^*) \quad (17)$$

Queremos hallar la solución  $T(n\Delta t)$  con la condición  $T(0) = T_0$  y  $\|T(0) - T^*\| < \epsilon$ . Si el esquema es estable  $T$  se aproximara exponencialmente a  $T^*$  de manera que  $\|T^n - T^*\|_{*} < \epsilon$  para  $n > 0$  y podremos hacer un desarrollo de Taylor alrededor de  $T^*$ :

$$\begin{aligned} T(n\Delta t) &= u^n + T^* \\ M(u^{nM} - u^n) + \Delta t K u^n &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{\partial f_{\mu}}{\partial T_{\nu}}$$

$M$  y  $K$  son simétricas, definida y semidefinida positivas respectivamente de manera que podemos analizar el problema en forma espectral tomando los autovectores y autovalores de la matriz:

$$A = M^{-1/2} K M^{-1/2} \quad (19)$$

Es sencillo ver que  $A$  es simétrica y semidefinida positiva de manera que definimos una base ortonormal de  $R$  formada por autovectores de  $A$ , con autovalores no negativos y que los supondremos ordenados:

$$\begin{aligned} A v_i &= \omega_i v_i ; i = 1, \dots, N \\ 0 \leq \omega_i &; \omega_i \leq \omega_j \text{ para } i < j \\ \forall \omega \in \mathbb{R}^N : \omega &= \sum_{i=1}^N \alpha_i v_i \\ v_i \cdot v_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (20)$$

Como  $(v_i)_{i=1}^N$  es una base de  $R^N$ :

$$\underline{M}^{1/2} \underline{u}_n = \sum_{i=1}^N \alpha_{i,n} \underline{v}_i$$

Reemplazando en (18) el sistema se desacopla y para cada  $i$  obtenemos un sistema recursivo:

$$(\alpha_{i,n+1} - \alpha_{i,n}) + \Delta t \omega_i \alpha_{i,n} = 0 \quad (21)$$

La solución es:

$$\alpha_{i,n} = (1 - \Delta t \omega_i)^n \alpha_{i,0} \quad (22)$$

Es decir que la expresión para el vector de temperaturas será:

$$T(n\Delta t) = \underline{T}^* + \sum_{i=1}^N (1 - \Delta t \omega_i)^n \alpha_{i,0} \underline{M}^{-1/2} \underline{v}_i$$

Resulta obvio que la evolución será estable mientras que la base del exponente se mantenga, en módulo, menor que 1. En consecuencia:

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\max \{\omega_i\}} = \frac{2}{\omega_N} \quad (23)$$

En los problemas sin cambio de fase se toma como cota para  $\omega_N$ :

$$\omega_N \leq \beta \frac{\text{NELE}}{e=1} \frac{k_e}{\rho_e C_{p_e} h_e^2} \quad (26)$$

donde  $\beta$  es un número adimensional, del orden de 1 que depende del elemento, número de dimensiones del problema,  $h_e$  es el tamaño del elemento y  $e$  es un índice sobre los elementos.

Para cualquier  $w \in \mathbb{R}^N$ ; expresamos  $\underline{M}^{1/2} w$  en la base de los  $\underline{v}_i$  y obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\frac{\underline{w}^T \underline{K} \underline{w}}{\underline{w}^T \underline{M} \underline{w}} = \frac{(\sum \alpha_{i-i} \underline{v}_i)^T \underline{A} (\sum \alpha_{i-i} \underline{v}_i)}{(\sum \alpha_{i-i} \underline{v}_i)^T (\sum \alpha_{i-i} \underline{v}_i)} = \frac{\sum \alpha_{i-i}^2 \omega_i}{\sum \alpha_{i-i}^2} \leq \omega_N \quad (27)$$

Además para  $\underline{w} = \underline{M}^{-1/2} \underline{v}_N$  la igualdad se cumple de forma que:

$$\frac{2}{\Delta t_{cr}} = \max_{\underline{w} \in \mathbb{R}^N} \frac{\underline{w}^T \underline{K} \underline{w}}{\underline{w}^T \underline{M} \underline{w}} \quad (28)$$

Sea  $\underline{M} = \underline{M}^{SCF}$ ;  $\Delta t_{cr}^{SCF}$  ( $\Delta t_{cr}^{CF}$ ) el paso de tiempo crítico para el problema sin (con) cambio de fase. Entonces como  $\underline{M}^{CF}$  es semidefinida positiva:

$$\frac{2}{(\Delta t)_{cr}^{CF}} = \max_{w \in \mathbb{R}^N} \frac{\frac{w}{M} \frac{K}{SCF} \frac{w}{M}}{w \left( \frac{M}{SCF} + \frac{M}{CP} \right) w} \leq \max_{w \in \mathbb{R}^N} \frac{\frac{w}{M} \frac{K}{SCF} \frac{w}{M}}{\frac{w}{M} \frac{K}{SCF} \frac{w}{M}} = \frac{2}{\Delta t_{cr}^{SCF}} \quad (29)$$

Esto permite asegurar que la misma estimación (26) para el paso de tiempo crítico en el problema sin cambio de fase nos servirá para el problema con cambio de fase.

Este resultado se hace claro físicamente si pensamos que el cambio de fase sólo agrega capacidad calorífica adicional al sistema (en un problema estructural esto es equivalente al agregado de una masa) por lo tanto los tiempos característicos del sistema deben bajar.

Además una estimación como la (26) seguirá siendo válida ya que se basa en que los tiempos característicos más pequeños de la estructura (mayores  $\omega_i$ ) están asociados a la estructura más fina de la discretización; por ejemplo a los elementos más pequeños. Esto seguirá siendo válido para el problema con cambio de fase con lo que queda de mostrado que la estimación (26) sigue siendo óptima aún con el agregado del cambio de fase.

#### EJEMPLOS NUMERICOS

El problema físico a simular numéricamente es la fusión de un medio semiinfinito,  $x > 0$ . Las propiedades del material son:

$$k = 1 \frac{W}{m \cdot K} \quad ; \quad \rho \text{ cp} = 1 \frac{\text{joule}}{m^3 \cdot K}$$

$$L = 1 \frac{\text{joule}}{m^3} \quad ; \quad T_m = 1^\circ C$$

Inicialmente el medio se encuentra a una temperatura  $T(x,t) = 0$  y se le impone una temperatura  $T_w = 2^\circ C$  en la pared. El problema es obviamente unidimensional y está caracterizado por un número de Stefan moderado:

$$\text{Ste} = \frac{\rho_c (T_w - T_m)}{L} = 1$$

Se discretiza la región  $x < 2.5$  m con 9 elementos. Los detalles de la malla se pueden observar en las figuras 1 y 2. El elemento más pequeño tiene una longitud de 0.1 m de manera que:

$$\max_{e=1}^9 \frac{k_e}{\rho_e c_e h_e^2} = \frac{1.0}{1.0 (0.1)^2} = 100 \text{ seg}^{-1}$$

Para el elemento unidimensional lineal podemos tomar  $\beta = 4$  por lo que las cotas anteriores indican que:

$$(\Delta t)_{Cr}^{CF} \geq (\Delta t)_{Cr}^{SCF} \geq \frac{2}{4 \times 100} = 0.005 \text{ seg}$$

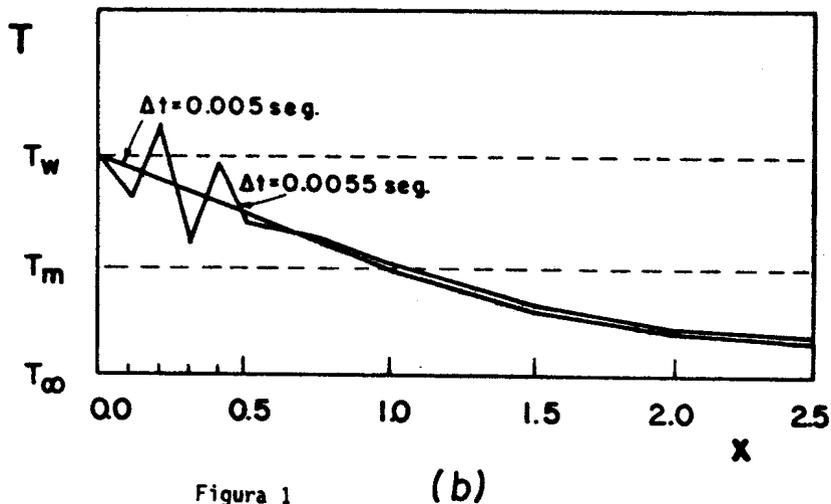
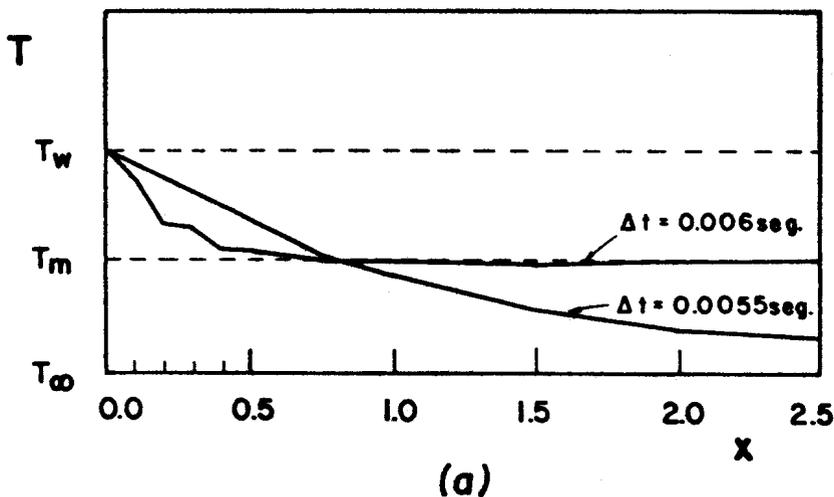
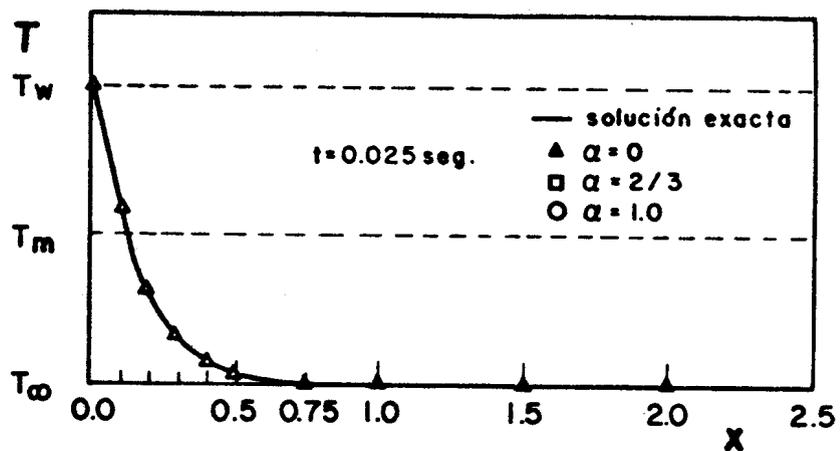
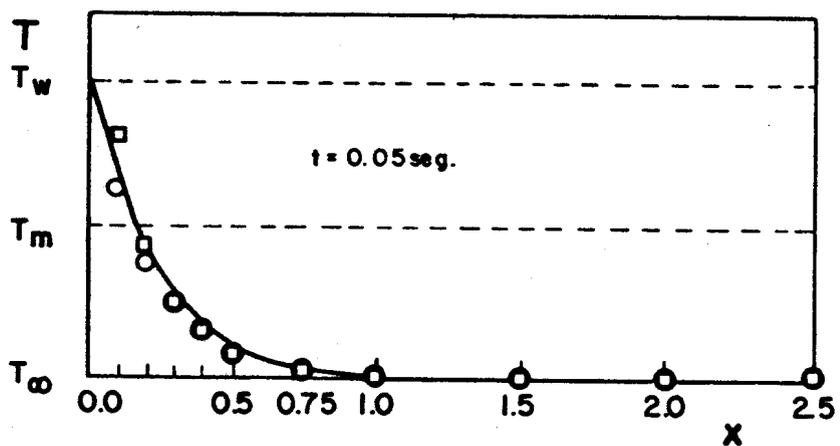


Figura 1

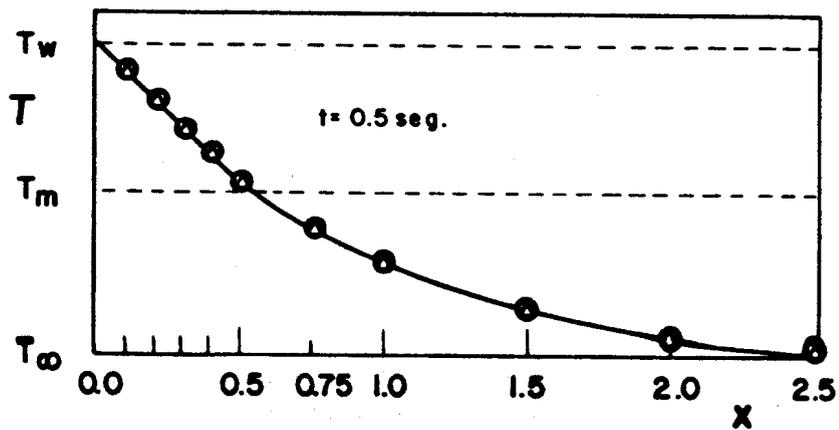
En la figura 1.a vemos los resultados obtenidos con el método explícito para  $\Delta t = 0.06$  seg y  $\Delta t = 0.055$  seg en  $t=200 \Delta t$ . La curva para  $\Delta t = 0.06$  seg muestra oscilaciones espúreas que indican que ya estamos en el rango inestable, por el contrario la solución para  $\Delta t = 0.055$  seg no contiene oscilaciones de manera que podemos considerar que  $0.0055 < (\Delta t)_{Cr} < 0.006$ . En la figura 1.b vemos los resultados para  $\Delta t = 0.05$  seg y  $\Delta t = 0.055$  seg para el mismo problema, pero sin cambio de fase. Análogamente podemos aseverar que  $0.005 < (\Delta t)_{Cr} < 0.055$ . Todos estos resultados numéricos confirman los criterios de estabilidad expuestos anteriormente. Por una parte vemos que se cumple la relación (29) y la cota para los  $\Delta t_{Cr}$  que surge a partir de las relaciones (25) y (26). Además comprobamos que los tiempos críticos con y sin cambio de fase difieren a lo su



(a)



(b)



(c)

Figura 2

mo en un 10%.

En la figura 2 se observan, por otra parte, las temperaturas nota les obtenidas para  $\alpha = 0, 2/3$  y  $1$  en  $t = 0.025, 0.05$  y  $0.5$  seg comparadas con la solución exacta. Para  $\alpha = 0$  se utilizó  $\Delta t = 0.025$  y para  $\alpha = 0$  se utilizó  $\Delta t = 0.025$  y para  $\alpha = 2/3$  y  $1$   $\Delta t = 0.05$ . En la figura 1.a están graficadas la solución exacta y la obtenida con  $\alpha = 0$  para  $t = 0.025$ . Ambas coinciden dentro de un error  $0.002^\circ\text{K}$ . En la figura 1.b se compara la solución exacta con las obtenidas con  $\alpha = 2/3$  y  $\alpha = 1$  para  $\Delta t = 0.05$  seg. La discrepancia es máxima para los primeros nodos y llega a  $0.24^\circ\text{K}$  para  $\alpha = 2/3$  y a  $0.02$  para  $\alpha = 1$ . Este gran error se debe, obviamente, a que estamos en el primer paso de tiempo. Sin embargo vemos la gran utilidad del método explícito para seguir las frecuencias más altas al comienzo del transitorio. Para todos los métodos el error va disminuyendo al aumentar  $t$ . Para  $t = 0.2$  el error es de  $0.06$ , para  $\alpha = 1$ ,  $0.02$  para  $\alpha = 2/3$  y  $0.015$  para  $\alpha = 0$ . Para  $t = 0.5$  los errores son de  $0.03$  para  $\alpha = 1$ ,  $0.01$  para  $\alpha = 0$  y  $\alpha = 2/3$ . En base a esto podemos afirmar que el método explícito es muy conveniente para obtener resultados para tiempos pequeños y cargas con componentes de frecuencia muy altas (función escalón en este caso). Para tiempos mayores el error es el mismo si comparamos el método explícito para  $\alpha = 2/3$  sin embargo el método implícito es menos costoso ya que permite pasos de tiempo más grandes, y es más confiable, ya que es incondicionalmente estable.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] "Numerical Analysis of the Fusion of Nuclear Combustible Rods under Loca-type Accidents", S. Idelsohn, L. Crivelli, 7mo Congreso Brasileiro de Engenharia Mecanica, Uberlandia, Brazil, Diciembre 13-16 1983.
- [2] "Solución Numérica del Problema de Transmisión del Calor con Cambio de Fase", Crivelli, L., Idelsohn, S., Rev.Int. Met.Num.Cal.y Dis.Ing. 1., 43-66 (1985).
- [3] "A Temperature-based Finite Element Solution for Phase Change Problems", Crivelli, L., Idelsohn, S. Int.J.Num.Meth.Eng. 23, 1, 99-120 (1986).
- [4] "Making Curved Interphases straight in Phase Change Problems", M. Storti, L. Crivelli, S. Idelsohn a aparecer en Int.J.of Num.Meth. Eng..
- [5] "An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures". Belytschko, T. en BEL, HUG (1983).
- [6] "Computational Methods for Transient Analysis", Belytschko T., Hughes, T.R. (ed. 3) Elsevier Science Publishers, Amsterdam, (1983).
- [7] "Stability Study for Time-dependent Linear Parabolic Equations and its Applications to Hermitian Methods", Desautaux, J., Nassif N.R. en Topics in Numerical Analysis, Dublin, 293-316 (1976).
- [8] "Implicit Finite Element Method", Geradin, M., Hogge, M., Idelsohn S., en BEL.HUG (1979).
- [9] "Analysis of Transient Algorithms with Particular Reference to

- Stability Behaviour", Hughes, T.J.R. en BEL, HUG (1979).
- [10] "Partitioned Analysis of Coupled Systems", Park, K.C., Felippa, C.A. en BEL.HUG.
- [11] "An Implicit-Explicit Numerical Solution Scheme for Phase Change Problems", Sparrow, E.M., Chuck, W., Num.Heat.Tr. V7., 1-15 (1984)
- [12] "A Modified Variable Time Step Method for the One-dimensional Stefan Problem", R. Gupta, D. Kumar Com. Meths. App. Mech. Eng., 23, 101-109 (1980).
- [13] "Variable Time Step Methods for One-dimensional Stefan Problems with Mixed Boundary Conditions", R. Gupta, D. Kumar. I.J. Heat Mass Tr. 24, 251, 259 (1981).
- [14] "A Second Order Finite Element Method for the One-dimensional Stefan Problem", R. Bonnerot, P. Jamet Int. J. Num. Meth. Eng. 8, 811-820, (1974).
- [15] "Numerical Computational of the Free Boundary for the Two-dimensional Stefan Problem by Space-time Finite Elements", R. Bonnerot, P. Jamet, J. Computational Phys. 25, 163-181 (1977).
- [16] "Numerical Implementation of a Discontinuous Finite Element for Phase Change Problems", M. Storti, L. Crivelli, S. Idelsohn, a aparecer en Adv.Eng.Soft.