

INESTABILIDAD ELASTICA Y ELASTO-PLASTICA  
EN PLACAS DELGADAS TENSIONADAS CON UNA  
FISURA CENTRAL

Mario A. Diez  
Luis A. Godoy

Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias  
Exactas, Físicas y Naturales.  
Universidad Nacional de Córdoba.  
Córdoba - Argentina.

RESUMEN

En láminas planas delgadas, sometidas a un campo de tracción, con una fisura central normal a la dirección de las tracciones, se originan, en la vecindad de la fisura, tensiones de compresión (debidas al efecto del módulo de Poisson del material) que dan origen a un fenómeno local de inestabilidad. El presente trabajo, está orientado a investigar la influencia de imperfecciones geométricas y de plasticidad en zonas altamente tensionadas de la lámina, sobre las trayectorias de equilibrio. Los resultados se obtienen por medio de un código de elementos finitos de tipo desplazamientos. Para describir la cinemática no lineal se emplea una formulación Lagrangiana Total y se supone que el material sigue el modelo de plasticidad de von Mises.

ABSTRACT

In thin plates with a central crack under a tensile stress field, compressive stresses develop in the vicinity of the crack (due to Poisson ratio) which induce local buckling of the plate. The present work investigates the influence on the equilibrium path of geometric imperfections and plasticity in zones under high stresses of the plate. The results are obtained via a finite element displacement code. The non-linear kinematic relations are described by a Total Lagrangian formulation, and the material is assumed to follow the von Mises plasticity model.

## 1. INTRODUCCION

Los problemas estructurales de láminas planas sometidas a un campo de tracción y con una fisura central, normal a la dirección de las tracciones como se ilustra en la figura 1, han sido principalmente estudiadas en el contexto de mecánica con fracturas, con el fin de evaluar la concentración de tensiones en los extremos de la fisura. Un efecto adicional que se produce en este tipo de miembros es la aparición de tensiones de compresión en la misma dirección de la fisura y en la vecindad de ésta, debidas al efecto del módulo de Poisson del material. Como consecuencia de esas tensiones de compresión, es posible en algunos casos suponer la ocurrencia de inestabilidad local en esas láminas delgadas. Además de los efectos indeseables asociados a la inestabilidad local misma, otras características de la lámina pueden ser afectadas significativamente por la inestabilidad local, tales como el modo de fractura y las frecuencias naturales, conduciendo a un colapso estructural prematuro.

El primer estudio teórico sobre este tema, en concimiento de los autores, se debe a Rolls (1), quien en 1969 publicó su tesis doctoral sobre el tema. Rolls empleó el método de elementos finitos para discretizar las ecuaciones de bifurcación del equilibrio de una placa elástica delgada, y trató la fisura como un borde libre, refinando la malla de elementos en la vecindad del extremo de fisura. Los modos de inestabilidad, obtenidos de un análisis de autovalores, resultaron fundamentalmente modos simétricos y antisimétricos. Rolls propuso además modelos simplificados de barras para obtener estimativas de cargas de bifurcación. La confirmación experimental de la ocurrencia de inestabilidad en este tipo de láminas fue obtenido por Dixon y Strannigam (2) y Zielsdorff y Carlson (3). Modelos analíticos han sido propuestos por investigadores soviéticos, principalmente Litvinenkova (4). Un estudio detallado de cargas de bifurcación fue presentado por Markström y Storåkers (5) en 1980, quienes emplearon un modelo finito rectangular en la misma forma que en (1). Para fisuras centradas y de borde, la referencia (5), contiene estudios paramétricos de cargas críticas con distintas relaciones geométricas.

Los estudios anteriores se han concentrado en la evaluación de cargas críticas elásticas. Sin embargo una vez establecido el nivel de carga de bifurcación, subsisten algunos interrogantes: en primer lugar, cuál es el comportamiento poscrítico de la lámina fisurada, y en qué medida las imperfecciones iniciales en la geometría afectan la respuesta. Si bien es cierto que los estudios experimentales sugieren que este tipo de estructuras no es sensible a imperfecciones en el sentido de reducir su carga crítica (5), es importante conocer el nivel de desplazamientos y tensiones que se producen en la lámina para cargas superiores a la de bifurcación. En segundo lugar, y asociado al último aspecto resulta de interés predecir en que medida la fluencia del material afecta la distribución de tensiones y consecuentemente establecer nuevos estados límites en la componente estructural.

El presente trabajo está orientado a investigar algunos de los aspectos mencionados, que no son abordados mediante un análisis elástico de bifurcación, en particular la influencia de imperfecciones iniciales geométricas sobre la trayectoria de equilibrio y la aparición de plasticidad en zonas altamente tensionadas de la lámina. Los resultados se obtienen en forma numérica empleando el método de elementos finitos de tipo desplazamientos.

## 2. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

La respuesta no lineal de una lámina delgada se ha obtenido mediante el empleo del método de elementos finitos de tipo desplazamientos. Modelos para el análisis no lineal geométrico de láminas planas están bien establecidos en la actualidad y las principales referencias pueden encontrarse en los textos clásicos sobre el tema (6,7). En el presente trabajo se utilizaron dos elementos rectangulares, con 8 y 9 nudos respectivamente, formulados por Bathe y Bolourchi (8). Estos elementos están basados en el principio de trabajos virtuales, empleando la teoría de pequeñas deformaciones pero grandes desplazamientos y giros. Como hipótesis de comportamiento de la lámina se supone que, las rectas que originalmente son normales a la superficie media siguen siendo rectas después de la deformación y que, las tensiones transversales normales son nulas. A diferencia de la referencia (5), en la que se usan las ecuaciones de von Karman considerando sólo la componente normal de desplazamientos,  $u_3$ , en el elemento (8), se incluyen también las componentes de desplazamientos en el plano de la lámina. En cada nudo del elemento, las coordenadas generalizadas son los desplazamientos  $u_1, u_2, u_3$  y las rotaciones de la normal,  $\beta_1, \beta_2$ ; (ver figura 2.a), así, los elementos resultan con 40 y 45 grados de libertad respectivamente. Los sentidos positivos adoptados para desplazamientos y esfuerzos se indican en la figura 2.b. Para describir la cinemática no lineal, se emplea una formulación Lagrangiana Total.

En un primer análisis, se consideró que el material responde a ecuaciones constitutivas lineales para un sólido elástico e isotrópico. En la segunda parte se ha supuesto que el material se comporta como elastoplástico perfecto, con superficie de fluencia según el criterio de von Mises.

En todos los casos se ha estudiado una placa con una fisura central dipuesta en forma simétrica, como lo ilustra la figura 1. Dada la simetría de la placa sólo se discretiza un cuarto de la misma.

En los estudios de Markström y Storåkers (5), se demuestra que la carga crítica menor está asociada a modos simétricos de deformación; en base a ello, se adoptaron condiciones de simetría (ver figura 3.), que restringen el pandeo de la placa a modos simétricos. En cuanto al contorno exterior, se ha supuesto la lámina simplemente apoyada en los bordes cargados y libre en los otros dos.

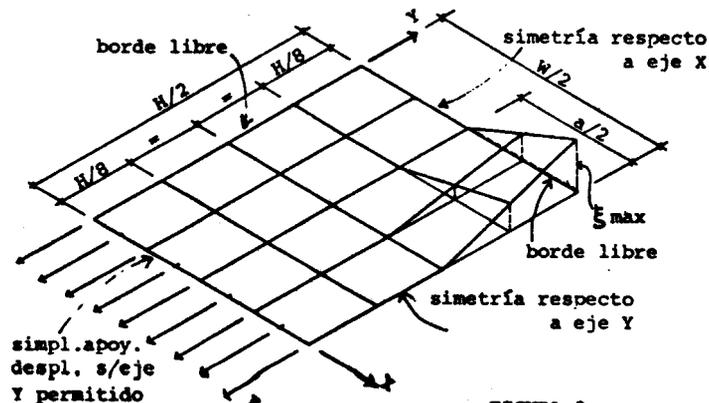


FIGURA 3

La fisura ha sido considerada en la misma forma que en las referencias (1,5), o sea como un borde libre. Aunque existe la posibilidad de emplear elementos triangulares para discretizar el extremo de la fisura, donde uno de sus lados está colapsado, (es decir los nudos no se ubican al centro del lado sino desplazados una distancia un cuarto de éste hacia la fisura, con lo cual es posible modelar la singularidad del campo tensional (9) ), tal facilidad no ha sido incorporada en el presente análisis. De modo que se ha refinado la malla de elementos en la vecindad de la singularidad estudiándose la convergencia de la solución. Tal procedimiento no provee valores aceptables para el extremo mismo de la fisura, pero sí para el resto de la lámina.

Se ha definido la placa con una imperfección inicial de amplitud máxima  $\xi$ , con la forma aproximada del modo simétrico de inestabilidad local. Por simplicidad se considera una variación lineal de la imperfección en ambos sentidos con valor máximo al centro de la placa, como se indica en la figura 3. Se analiza la placa bajo sollicitación de una carga uniformemente distribuida,  $S_0$ , y actuante en el plano medio de la sección en la dirección del eje  $x_1$ . Dicha carga se materializó por fuerzas concentradas resultantes aplicadas en los nudos ubicados en el extremo de la lámina.

### 3. RESPUESTA NO LINEAL ELASTICA

En la figura 4.a., se muestra la trayectoria no lineal elástica correspondiente a una placa definida por las constantes del material, módulo de Young  $E = 2,1 \times 10^5$  N/mm<sup>2</sup> y relación de Poisson  $\nu = 0,3$ ; y cuyas dimensiones son: largo  $H = 2000$  mm., ancho  $W = 2000$  mm.; espesor  $t = 10$  mm. y longitud de fisura  $A = 1000$  mm.. La imperfección inicial se ha fijado de amplitud máxima  $\xi = t/20$ . La placa fue discretizada en 16 elementos con 8 nudos. Se grafica el desplazamiento  $u_3$  del punto central de la placa y las fuerzas actuantes en los distintos intervalos de carga, cuyo valor se incrementó desde cero hasta un máximo valor que se adoptó aproximadamente igual al 50% mayor que el valor de la carga crítica correspondiente a esa misma placa estudiada por Markström y Storåkers(5). El intervalo total de carga se dividió en 10 incrementos.

Puede observarse que para cargas inferiores al 20% del intervalo total estudiado, la trayectoria obtenida con un análisis no lineal cinemático, prácticamente coincide con la correspondiente respuesta suponiendo cinemática linealizada.

Sin embargo, para valores de carga mayores, la trayectoria no lineal, presenta cada vez mayores desplazamientos. Se observa una zona donde existe un fuerte cambio de pendiente y donde la trayectoria obtenida se aleja de la teórica debido a la influencia de imperfecciones de la placa. Para cargas superiores a la crítica, los desplazamientos siguen una trayectoria ascendente, lo cual refleja que la placa tiene un comportamiento post-crítico estable. Así, a un 40% de incremento en la carga, corresponde un 300% de incremento en desplazamientos. Nótese que un estudio de bifurcación sólo define el valor de la carga crítica pero no provee información alguna acerca de la respuesta estructural para estados superiores.

Se puede además observar en la figura 4.a., la convergencia de la solución que se logra refinando la malla de elementos con 8 nudos. Como caso extremo, se grafica el comportamiento seguido por la placa discretizada en 4 elementos, en la que no se alcanza a identificar el fenómeno de inestabilidad descrito anteriormente. Por otra parte, si comparamos las trayectorias para discretizaciones de 16 y 30 elementos, la diferencia en los valores de carga, para idénticos desplazamientos, no superan el 10% del valor de carga total asociada a las mismas. Como contra

partida, el tiempo computacional para la resolución de una malla de 30 elementos es 170% superior a la de 16 elementos; por ello se decidió realizar los estudios sucesivos empleando una malla de 16 elementos.

Un análisis similar de convergencia de la solución, pero para elementos con 9 nudos, figura 5.a., permite comprobar que con la malla de 4 elementos se logra una respuesta razonablemente exacta y en donde se puede observar el fenómeno de pandeo de la placa.

En la figura 4.b., se han representado para un estado de carga intermedio correspondiente a  $45 \text{ N/mm}^2$ , las tensiones de compresión  $\sigma_{22}$ , que dan origen al fenómeno de la inestabilidad local. En la figura 4.c., se representa el área donde actúan las tensiones de compresión  $\sigma_{22}$ , para dos escalones de carga. De las figuras anteriores se desprende que los valores máximos de  $\sigma_{22}$ , se alcanzan en el centro de la placa y en los bordes mismos de la fisura y se extienden hasta aproximadamente la mitad de la longitud de la fisura en el sentido longitudinal.

La misma componente de tensión  $\sigma_{22}$ , en el punto central de la placa donde la tensión alcanza el valor máximo, ha sido graficada en la figura 4.d., en función de la carga actuante  $\sigma_b$ . Como puede observarse, la relación  $\sigma_b$ - $\sigma_{22}$ , se mantiene lineal hasta un cierto valor de carga. Mayores valores de carga llevan asociados incrementos de tensiones  $\sigma_{22}$  cada vez menores debido a la pérdida de rigidez local en la placa y consecuente una redistribución de tensiones. Dixon y Stranigam (2), han definido un límite inferior al problema tratado como la carga  $\sigma_b$  para la cual la respuesta en términos de deformaciones (6 tensiones) ya no es lineal.

En las figuras 6 y 7, se han graficado las respuestas para distintos valores de imperfecciones iniciales de la placa discretizada en mallas de 16 elementos con 8 y 9 nudos respectivamente. Para pequeñas imperfecciones iniciales,  $\xi_{\text{max}} = t/40$ , la trayectoria se acerca al eje de cargas exteriores actuantes, aproximándose así a un comportamiento de bifurcación. Imperfecciones iniciales mayores producen curvaturas más suaves en la trayectoria no lineal eliminándose así, la intersección de dos trayectorias que aparecen en bifurcación. Para valores de desplazamientos del punto central superiores a una vez el espesor de la placa, las respuestas para distintas imperfecciones prácticamente se confunden para elementos de 8 como de 9 nudos. De modo que distintos valores de imperfecciones iniciales producen en la placa respuestas similares en estado de deformación avanzado.

#### 4. RESPUESTA NO LINEAL ELASTO-PLASTICA

En la segunda parte del estudio se han empleado discretizaciones de 16 elementos considerando elementos con 8 y 9 nudos. Se ha adoptado un valor máximo de imperfección inicial  $\xi = t/20$ . En las figuras 8.a. y 9.a., se representa la trayectoria no lineal  $\sigma_b$ - $u_3$  del punto central de la placa, pero para material elasto-plástico perfecto con  $\sigma_y = 240 \text{ N/mm}^2$ . Las trayectorias elástica y elasto-plástica coinciden para estados de carga bajos, pero para valores superiores que el 50% de la carga total estudiada, los desplazamientos obtenidos en la trayectoria elasto-plástica para estados iguales de carga son mayores. La trayectoria no lineal para cargas superiores a la crítica elástica es ahora débilmente estable: así, para un incremento en 300% del desplazamiento, sólo es necesario un aumento de la carga de aproximadamente 20%.

La razón de esa aproximación a una trayectoria poscrítica neutra está asociada a la aparición de plasticidad en zonas de la placa, limitándose así, las posibilidades de redistribuir tensiones a esas zonas. La plastificación ocurre en la zona traccionada en el sentido  $x_1$

comprendido entre el extremo de la fisura y el borde de la placa. La fisura origina en la placa una redistribución de tensiones y para niveles de carga superiores al 80% de la carga crítica adoptada, la zona de pasaje disminuye dado que una parte está en fluencia, este fenómeno aumenta con el incremento de carga exterior y da origen a la disminución de la capacidad portante de la placa. En las figuras 8.b. y 10.b., se ha graficado la tensión de compresión  $\sigma_{22}$  en el punto de integración del elemento, ubicado en la parte central de la placa, en función de la carga actuante  $\sigma_b$ , para el mismo caso anterior de elementos con 8 y 9 nudos.

##### 5. CONCLUSIONES

La influencia de imperfecciones geométricas iniciales y la aparición de plasticidad en zonas altamente tensionadas en una lámina plana delgada con una fisura central han sido analizadas utilizando un modelo de elementos finitos.

De los resultados obtenidos, se extraen las siguientes conclusiones:

1. La placa constituida de un material cuya respuesta es elástica, presenta un comportamiento post-crítico estable.
2. Para distintas amplitudes de imperfecciones iniciales, las trayectorias de equilibrio de la placa, convergen en la zona post-crítica.
3. Considerando una placa constituida de un material de respuesta elasto-plástica perfecta, ésta presenta una trayectoria para cargas superiores a la crítica, débilmente estable.
4. El elemento de 9 nudos considerado, permite obtener buena aproximación con pocos elementos. Aun una malla de 4 elementos permite detectar el fenómeno de inestabilidad. Mallas gruesas con el elemento de 8 nudos no permiten detectar la inestabilidad.
5. A los efectos de investigar el fenómeno de inestabilidad, no parece necesario realizar un estudio detallado de las tensiones en el extremo de la fisura.

REFERENCIAS

- (1) Rolls, M. 'The elastic stability of discontinuous structural systems'. Ph. D. Thesis, University College, London, 1969.
- (2) Dixon, R. and Strannigam, J. S. 'Stress distribution and buckling in thin sheets with central slits', Proc. 2nd Int. Conf. on fracture, Brighton, 1969.
- (3) Zielsdorff, G. S. and Carlson, R. L. 'On the buckling of thin tensioned sheets with cracks and slots', Engineering Fracture Mechanics, 1972, 4, 939.
- (4) Litvienkova, Z. N. 'On the stability of a stretched plate with an inner crack', IZV. ANUSSR, Mekh. tver. tela, 1973, 5, 148.
- (5) Markstrom K. y Storakers, B. 'Buckling of cracked members under tension', Int. J. Solids and Structures, 1980, 16, 217 - 229.
- (6) Bathe, K. J. 'Finite Element Procedures in Engineering Analysis' Prentice Hall, New Jersey, 1982.
- (7) Zienkiewicz, O. C. 'The Finite Element Method', 3rd Ed., Mc. Graw Hill, London, 1977.
- (8) Bathe, K. J. and Bolourchi, S. 'A geometric and material non-linear plate and shell element', J. Computers and Structures, 1980, 11, 23-48.
- (9) Benshell, R. D. and Shaw, K. G. 'Crack tip finite elements are unnecessary'. Int. J. Numerical Methods in Engineering, 1975, 9, 495-507.

REFERENCIAS DE FIGURAS

- Figura 1. : Dimensiones de la placa con una fisura central.
- Figura 2.a.: Elemento de placa rectangular con 9 nudos.  
Nota: en el elemento con 8 nudos no se considera el nudo central.
- Figura 2.b.: Tensiones, desplazamientos y giros positivos en el elemento de placa rectangular.
- Figura 3. : Esquema adoptado de cuarto de placa  
 $H/2 = 1000 \text{ mm.}; W/2 = 1000 \text{ mm.}; t = 10 \text{ mm.}; a/2 = 500 \text{ mm.}$   
 $P = 0 - 1.500.000 \text{ N};$   
 $E = 2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2; \nu = 0,3$
- Figura 4.a.: Convergencia de desplazamiento del nudo central de la placa en la dirección  $u_3$ , utilizando elementos con 8 nudos.  
\* Valor de carga crítica según Markström y Storåkers (5).
- Figura 4.b.: Tensiones de compresión  $\sigma_{22}$ , que actúan en la cuarta parte de la placa, para un estado de carga intermedio correspondiente a  $P = 45 \text{ N/mm}^2$
- Figura 4.c.: Zonas bajo tensiones de compresión  $\sigma_{22}$ , para dos estados de carga determinados.
- Figura 4.d.: Tensiones de compresión  $\sigma_{22}$  actuantes en el centro de la placa, en función de la carga exterior solicitante, considerando elementos con 8 nudos.
- Figura 5.a.: Convergencia de desplazamientos del punto central de la placa en la dirección  $u_3$  utilizando elementos con 9 nudos.
- Figura 5.b.: Tensiones de compresión  $\sigma_{22}$  actuantes en el centro de la placa en función de la carga exterior solicitante considerando elementos con 9 nudos.
- Figura 6. : Convergencia de desplazamientos  $u_3$  del punto central de la placa para distintas amplitudes de imperfecciones iniciales utilizando elementos con 8 nudos.
- Figura 7. : Convergencia de desplazamientos  $u_3$  del punto central de la placa para distintas amplitudes de imperfecciones iniciales utilizando elementos con 9 nudos.
- Figura 8.a.: Comparación de desplazamientos del punto central para distintos modelos de material utilizando elementos con 8 nudos.
- Figura 8.b.: Comparación de los valores de tensión  $\sigma_{22}$ , actuantes en el punto de integración para comportamientos del material diferente utilizando elementos con 8 nudos.
- Figura 9.a.: Comparación de desplazamientos del nudo central para distintos modelos del material, utilizando elementos con 9 nudos.
- Figura 9.b.: Comparación de los valores de tensión  $\sigma_{22}$  actuantes, en el punto de integración para comportamientos del material diferente utilizando elementos con 9 nudos.

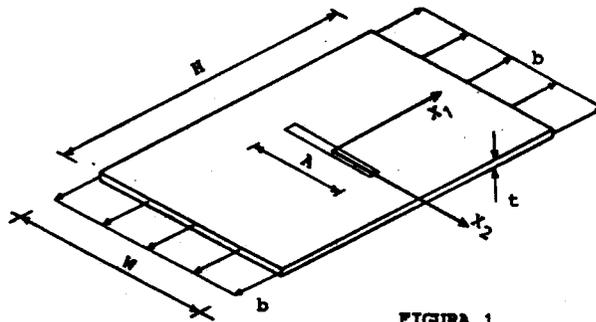


FIGURA 1

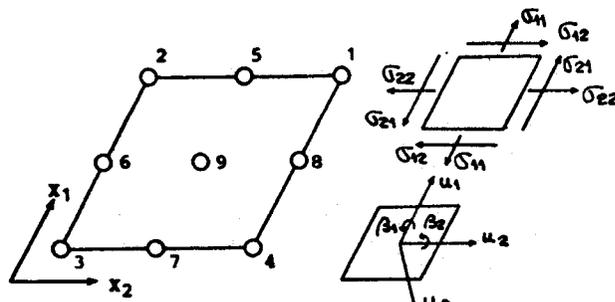


FIGURA 2.a.

FIGURA 2.b.

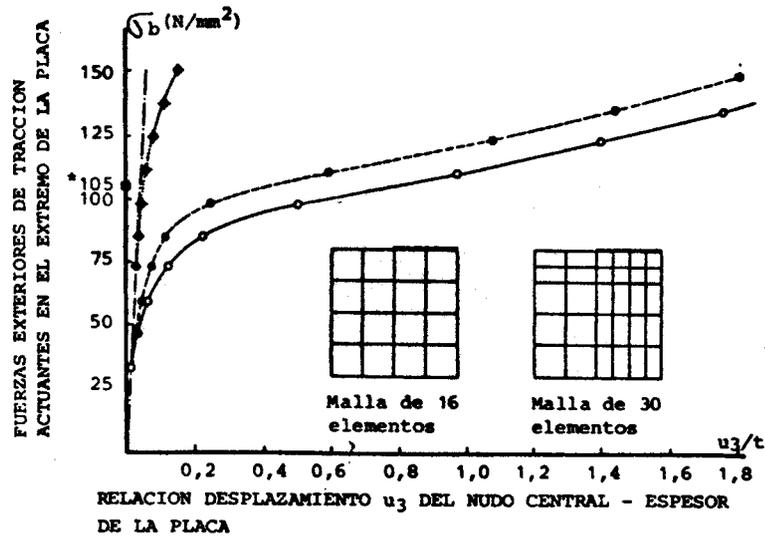


FIGURA 4.a.

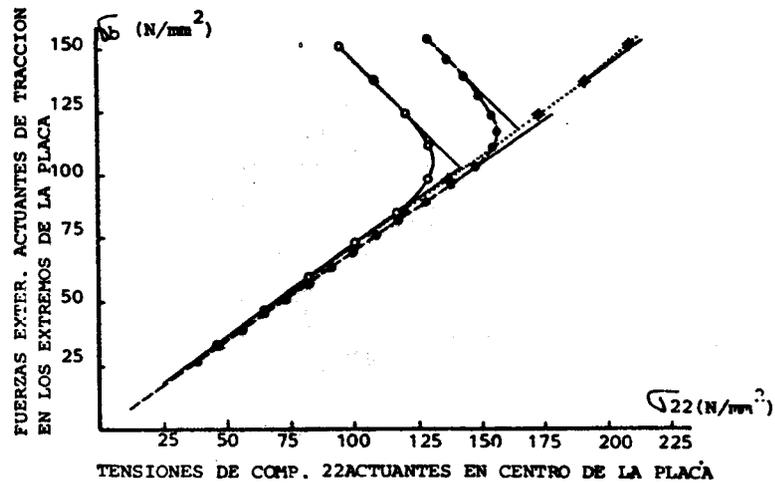


FIGURA 4.d.

- Material lineal elástico
- ◆— Material no lineal cinemático, malla de 4 elemen.
- Material no lineal cinemático, malla de 16 elemen.
- Material no lineal cinemático, malla de 30 elemen.

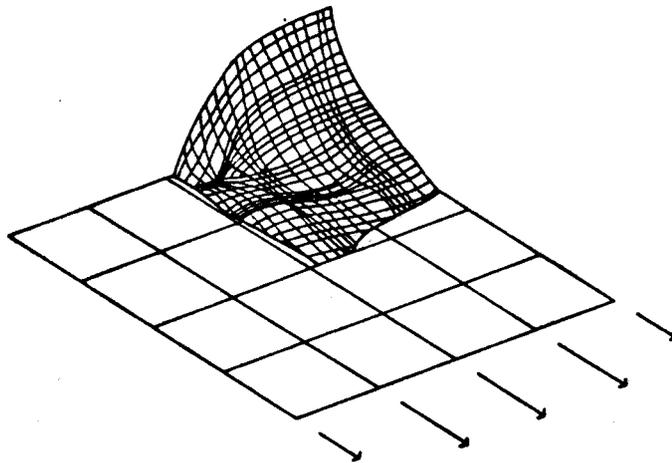
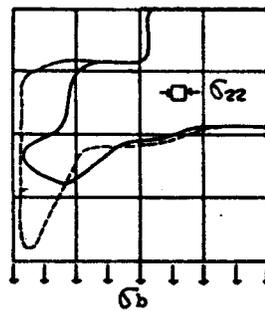


FIGURA 4.b.



---  $\sigma_b = 52 \text{ N/mm}^2$ .  
—  $\sigma_b = 48 \text{ N/mm}^2$ .

FIGURA 4.c.

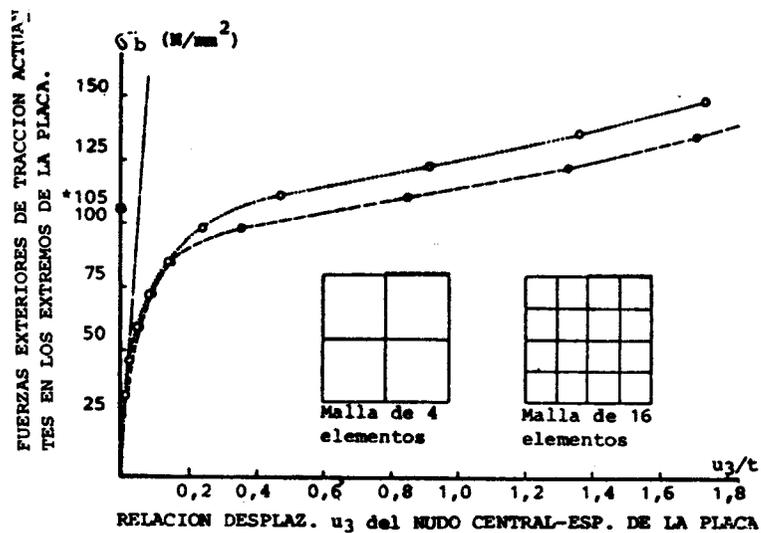


FIGURA 5.a.

- Cinemática lineal
- ...o... No lineal cinemático - 4 elementos
- o— No lineal cinemático - 16 elementos

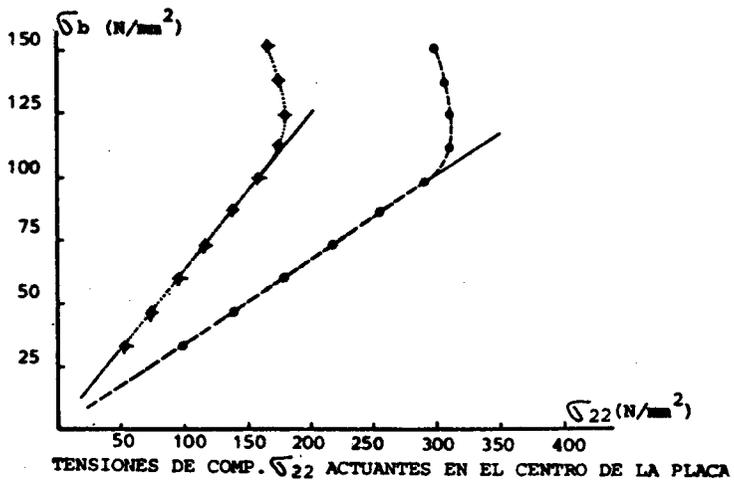


FIGURA 5.b.

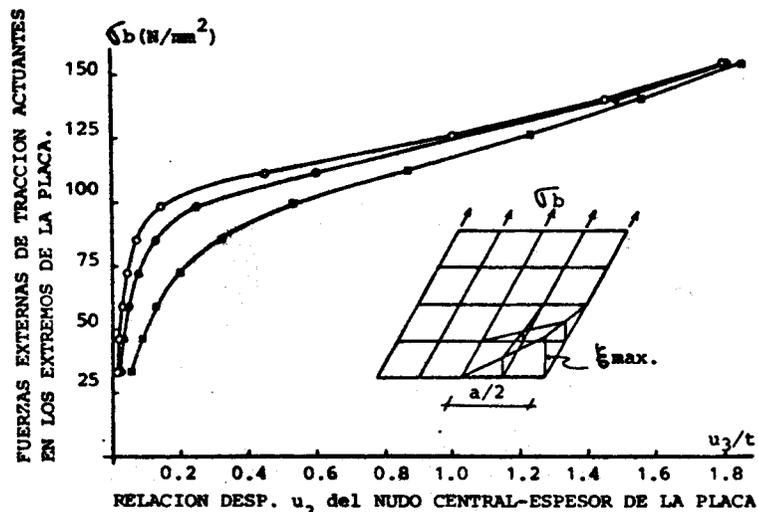


FIGURA 6

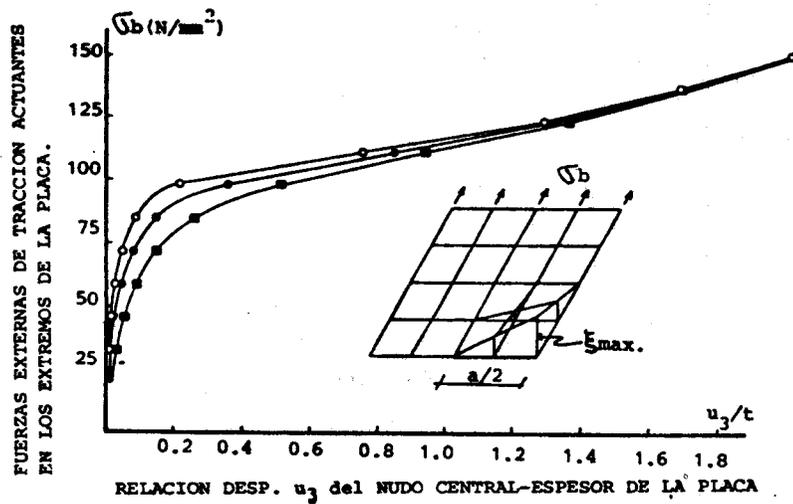
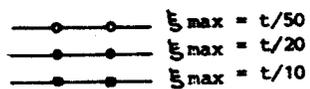


FIGURA 7

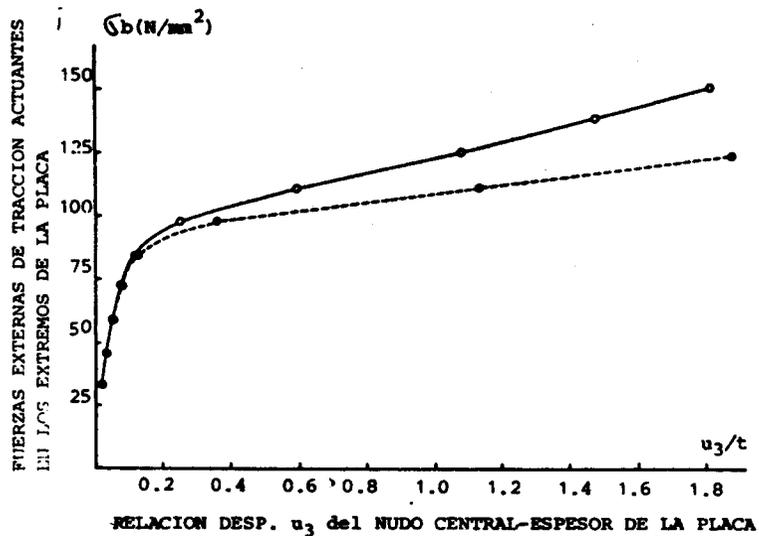


FIGURA 8.a.

—○— Respuesta no lineal elástica.  
 -●- Respuesta no lineal elasto-plástica  $\sigma_y = 240 N/mm^2$

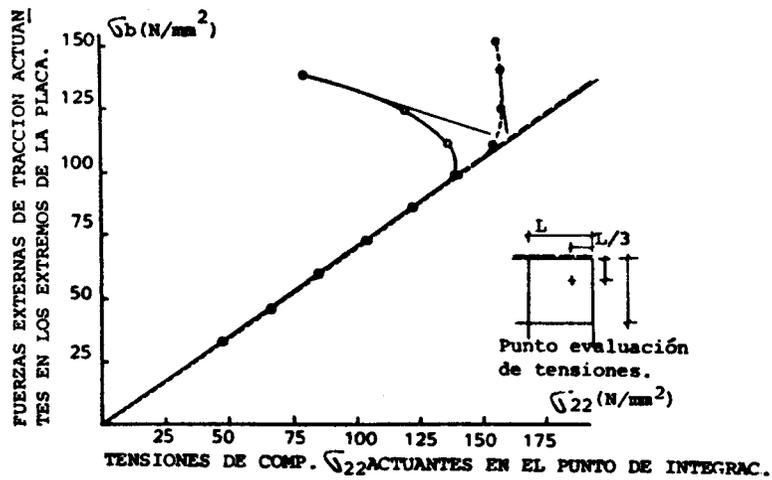


FIGURA 8.b.

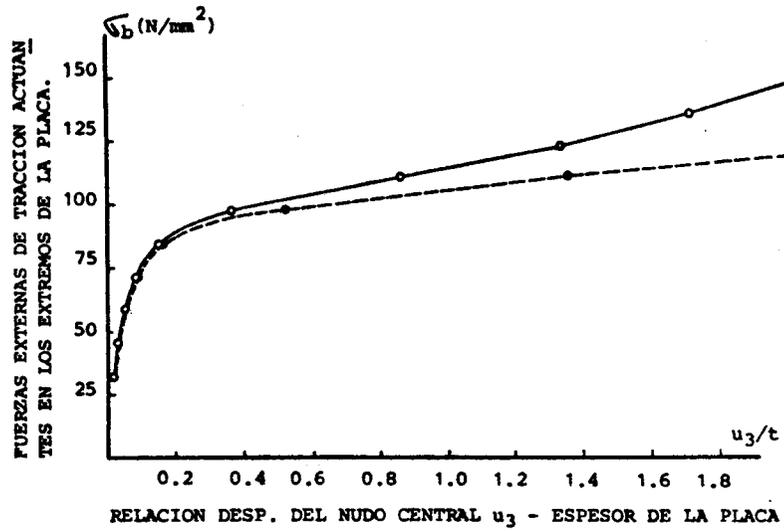


FIGURA 9.a.

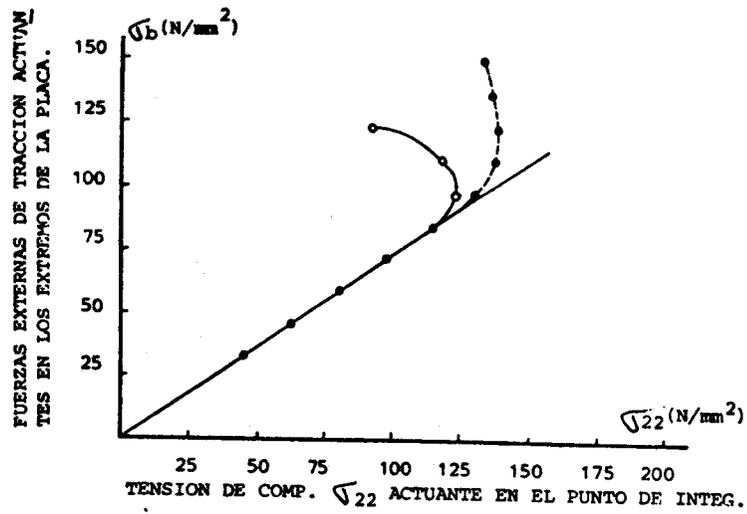


FIGURA 9.b.