

EMPREGO DO MÉTODO DA COLOCAÇÃO NO ESTUDO
DINÂMICO DE ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS ALTOS

José Elias Laier
Professor Doutor - Depto. de Estruturas
Escola de Engenharia de São Carlos - USP
13560 - São Carlos - SP - Brasil

R E S U M O

O método da Colocação é empregado na solução do problema de vibrações livres de estruturas de edifícios altos (frequências naturais e modos normais), tomando-se por base a modelagem dada pela Técnica do Meio Contínuo.

A colocação é conduzida mediante polinômios ordinários de grau pouco elevado, em face da acentuada convergência verificada. Exemplo numérico inserido no final do texto ilustra esse fato.

A B S T R A C T

The Collocation Method is used to solve the free vibrations problem of tall building structures (natural frequencies and normal modes) by mean of the Continuum Medium Technique.

Collocation is done by canonic low order polinomial because the convergence is easily reached. This behaviour is emphasized by a numerical example.

1. INTRODUÇÃO

A técnica do Meio Contínuo constitui modelo de grande utilidade para a análise do comportamento de estruturas de edifícios altos, tanto em seus aspectos estáticos - ALBIGES [1], CHITTY [2], STAMATO [3] - como em seus aspectos dinâmicos - RUTENBERG [4], DANAY [5], LAIER [6]. O tratamento da dinâmica pela via da técnica em consideração conduz a um sistema de equações diferenciais, cuja integração fornece as grandezas de interesse. Num grande número de casos da prática, onde eventuais interações verticais entre os painéis de contraventamento podem ser negligenciadas, aquele sistema é composto de tão somente três equações, correspondentes aos movimentos horizontais do conjunto - duas translações e a rotação.

No caso da análise das vibrações livres, as equações resultantes, salvo casos muito particulares, não se mostram integráveis pela via analítica, sendo, por conseguinte, necessário lançar mão de expedientes de integração numérica. Nesse sentido sugere-se o método da Colocação - HURTY [7], LAU [8], LAIER [9]. Dada a natureza das equações envolvidas, a Colocação pode ser formulada em termos de polinômios de grau pouco elevado.

2. MODELAGEM SEGUNDO A TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO - EQUAÇÕES

Em situações bastante gerais, onde os painéis de contraventamento não apresentam nenhuma regularidade na disposição em planta, a equação de vibrações livres do conjunto apresenta a seguinte redação, LAIER [6]:

$$[J] \{D^{IV}\} - [S] \{D^{II}\} - \omega^2 [M] \{D\} = \{0\} \quad \dots (1)$$

onde a matriz $[J]$, de ordem 3×3 , contém os parâmetros de rigidez do conjunto de paredes, a matriz $[S]$, de ordem 3×3 , contém os parâmetros de rigidez do conjunto de pórticos, ω é a frequência angular, a matriz de massa $[M]$ e o vetor de deslocamento apresentam a escrita:

$$[M] = \begin{vmatrix} m & 0 & -mb_m \\ 0 & m & ma_m \\ -mb_m & ma_m & md_m^2 \end{vmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \dots (2)$$

sendo m a massa por unidade de altura do prédio, a_m e b_m representam as coordenadas do centro de massa em relação ao eixo de referência,

$$d_m^2 = I_m/m + a_m^2 + b_m^2 \quad \dots (3)$$

onde I_m é o momento de inércia por unidade de altura em relação do centro de massa; u , v e w são os movimentos do conjunto: duas translações e rotação.

As condições de fronteira do sistema de equações (1) são dadas por:

$$\begin{aligned} \{D(z=0)\} &= \{0\} \\ \{D^I(z=0)\} &= \{0\} \\ \{D^{II}(z=H)\} &= \{0\} \\ [J] \{D^{III}(z=H)\} - [S] \{D^I(z=H)\} &= \{0\} \end{aligned} \quad \dots (4)$$

sendo z a coordenada vertical. A primeira e segunda das (4) expressam a vinculação na base e as outras duas exprimem a ausência de sollicitação no topo por flexão e cortante.

Para maior comodidade de manipulação é conveniente tomar o sistema de referência segundo os eixos centrais do conjunto de parede, logrando-se assim a diagonalização da matriz $[J]$, STAMATO [3].

É oportuno assinalar, conforme já mencionado, que não é viável, mediante procedimentos clássicos, a integração analítica da equação de frequências (1) na forma explícita, tendo-se em vista não existir meios de serem expressas, na forma de radical, as raízes de equação algébrica de grau superior

ao quarto; e este é o caso da equação característica decorrente de (1). Assim sendo, torna-se necessário orientar o estudo para a via numérica. Nesse sentido vários métodos numéricos têm sido sugeridos, DANAI [5], LAIER [6] e até mesmo indicados procedimentos aproximados decorrentes da teoria da Perturbação, RUTEMBERG [4], que são mais propriamente indicados para casos onde as matrizes envolvidas mostram-se com predominância acentuada dos elementos da diagonal (ligeiro acoplamento). Todavia, procura-se, no presente trabalho, explorar as potencialidades do método da Colocação, já testado com grande sucesso nos estudos de natureza estática, RAMALHO [10], e também em estudos de comportamento dinâmico, LAIER [9].

3. MÉTODO DA COLOCAÇÃO

O método da Colocação pode ser entendido como sendo uma extensão natural do método da Diferenças Finitas, porquanto considera-se, no método da Colocação, um polinômio aproximador da função incôgnita de grau elevado varrendo, por assim dizer, todo o domínio de integração; enquanto, no método das Diferenças Finitas, adota-se um polinômio aproximador de grau reduzido, porém cobrindo apenas um dos subdomínio (como se percebe, existem entre tais métodos diferenças apenas de número e grau, e não de gênero, para usar uma linguagem gramatical).

Para integração da equação de frequências (1) mediante a técnica da Colocação supõe-se de início, HURTY [7], que os movimentos livres podem ser expressos segundo um desenvolvimento do tipo:

$$\{D\} = |A| \{\phi(z)\} \quad \dots (5)$$

sendo $\{D\}$ definido como em (2) e:

$$|A| = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{vmatrix} \quad \{\phi(z)\} = \begin{Bmatrix} \phi_1(z) \\ \phi_2(z) \\ \phi_n(z) \end{Bmatrix} \quad \dots (6)$$

onde A_i , B_i e C_i são os coeficientes incógnitos dos movimentos u , v e w respectivamente, e as funções $\phi_i(Z)$ são escolhidas convenientemente; n é o número de termos a ser adotado. No sentido, por exemplo, de atender simultaneamente as três primeiras condições de contorno expressas em (4), a função genérica $\phi_i(z)$ assim se expressa:

$$\phi_i(z) = z^{(i+2)} - \frac{(i+2)(i+1)}{2} z^2 \quad \dots (7)$$

e, dessa forma, o grau do polinômio aproximador considerado passa a ser genericamente dado por $n+2$. O índice i varia segundo números inteiros de 1 a n .

Os coeficientes incógnitos presentes na matriz $|A|$, em número de $3n$, podem ser levantados buscando-se um número de relações compatível. Por exemplo, devem ser, de início, atendidas as condições de fronteira ainda não consideradas, ou seja, a quarta das condições (4), tendo-se pois três relações nesse caso. Para se completar o número bastante de relações lança-se mão das relações de movimento (1) em $3n-3$ pontos do domínio de integração. Exemplificando, as três primeiras relações são dadas, conforme a quarta das (4), por:

$$[J] \cdot |A| \{\phi^{III}(z=H)\} - [S] \cdot |A| \{\phi^I(z=H)\} = \{0\} \quad \dots (8)$$

e as demais relações retratam, para cada ponto de cota z_i arbitrariamente escolhido, as condições de movimentos livres dadas em (1), ou seja:

$$[J] \cdot |A| \{\phi^{IV}(z=z_i)\} - [S] \cdot |A| \{\phi^{II}(z=z_i)\} - \omega^2 [M] \cdot |A| \{\phi(z=z_i)\} = \{0\} \quad \dots (9)$$

sendo oportuno atentar-se para o fato de que tais condições devem ser atendidas em $n-1$ pontos do domínio de integração, perfazendo-se, pois, as $3n$ relações bastante para resolver o problema nos coeficientes incógnitos contidos em $|A|$. A montagem do sistema global de equações não apresenta grandes dificuldades, porquanto os algoritmos são sobremaneira expeditos, podendo ser colocado na forma clássica:

$$| [K] - \omega^2 [M] | \{A\} = \{0\} \quad \dots (10)$$

sendo, agora, agrupados ordenadamente no vetor $\{A\}$ os coeficientes incôgnitos originalmente contidos na matriz $|A|$.

Para ilustrar o algoritmo de geração do sistema expresso em (10), considere-se, primeiramente, um ordenamento dos coeficientes incôgnitos em sub-vetores do tipo:

$$\begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{Bmatrix} \quad \dots (11)$$

e, com isso, a matriz do citado sistema fica particionada em sub-matrizes de ordem 3×3 com o seguinte aspecto:

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} \quad \dots (12)$$

sendo que

$$R_{ii} = \begin{vmatrix} (J_{11}\phi_i''' - S_{11}\phi_i') & (-S_{12}\phi_i') & (-S_{13}\phi_i') \\ (-S_{21}\phi_i') & (J_{22}\phi_i''' - S_{22}\phi_i') & (-S_{23}\phi_i') \\ (-S_{31}\phi_i') & (-S_{32}\phi_i') & (J_{33}\phi_i''' - S_{33}\phi_i') \end{vmatrix} \quad \dots (13)$$

em decorrência do expresso em (8), e os demais

$$R_{ii} = \begin{vmatrix} (J_{11}\phi_i^{IV} - S_{11}\phi_i'' - \sigma\phi_i) & (-S_{12}\phi_i'') & (-S_{13}\phi_i'' + \sigma b_m\phi_i) \\ (-S_{22}\phi_i'') & (J_{22}\phi_i^{IV} - S_{22}\phi_i'' - \sigma\phi_i) & (-S_{23}\phi_i'' - \sigma a_m\phi_i) \\ (-S_{31}\phi_i'' + \sigma b_m\phi_i) & (-S_{32}\phi_i'' - \sigma a_m\phi_i) & (S_{33}\phi_i^{IV} - S_{33}\phi_i'' - \sigma d^2\phi_i) \end{vmatrix} \quad \dots (14)$$

conforme (9); tomando-se, nesse caso, valores calculados para $z = z_i$. A notação J_{ij} e S_{ij} obedece a ordenação dada conforme (1), lembrando-se que a matriz $[J]$ já é suposta diagonalizada. A notação σ representa o produto $m\omega^2$.

A solução da equação (10), fornece os autovalores ω_i (frequências angulares naturais) e os autovetores $\{A\}_i$ correspondentes - modos normais de vibração; grandezas estas necessárias para o estudo da resposta estrutural segundo a técnica da superposição modal.

4. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A figura 1 exibe a planta da estrutura de um edifício analisado por RUTENBERG [4], onde os pórticos são indicados por letras dentro de pequenos quadrados, e os números dentro de pequenos círculos indicam as colunas típicas empregadas. Os pontos assinalados pelas letras B, M e S são, respectivamente, o centro elástico do conjunto de paredes, o centro de massa e o centro elástico do conjunto de pórticos.

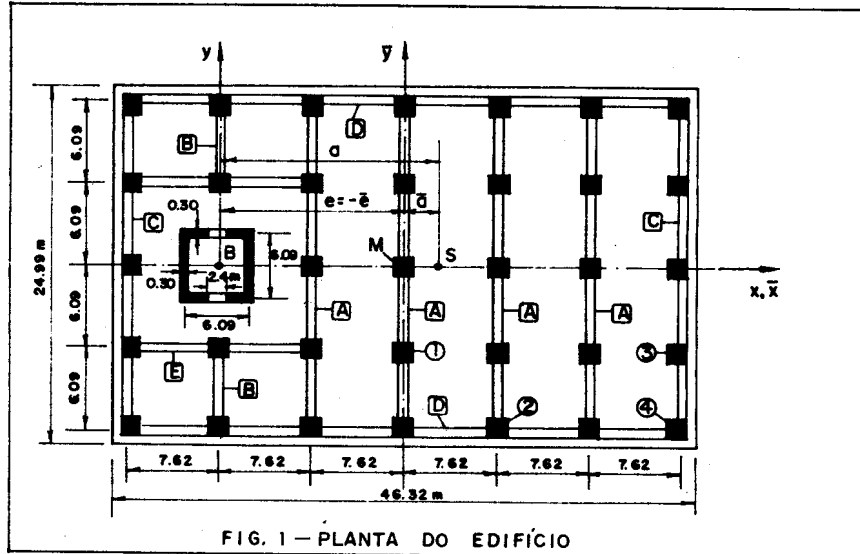


FIG. 1 - PLANTA DO EDIFÍCIO

O edifício é formado por 25 andares idênticos, espaçados igualmente por pés-direito de 3,66m ($H = 91,44m$). O módulo de elasticidade é tomado $E = 3000 \text{ KN/cm}^2$, e a massa por unidade

de altura vale $m = 1028 \text{ t/m}$; o que decorre da consideração de um peso próprio uniforme no andar da ordem $0,89 \text{ tf/m}^2$. As características geométricas do núcleo formado pelas paredes de seção U são (em relação aos eixos centrais do núcleo):

$$J_x = 29,95 \text{ m}^4 (= J_{bb}/E)$$

$$J_y = 1,825 \text{ m}^4 (= J_{aa}/E)$$

$$J_w = 369,6 \text{ m}^6 (= J_{cc}^*/E)$$

As características geométricas das colunas típicas são dadas na tabela 1; e na tabela 2 são apontadas as características e elásticas dos pórticos.

| COLUNA | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------|--------|--------|---------|---------|
| $J_y (\text{m}^4)$ | 0,0281 | 0,0158 | 0,0187 | 0,0105 |
| $J_x (\text{m}^4)$ | 0,0281 | 0,0234 | 0,00833 | 0,00694 |

Tabela 1 - Características Geométricas das Colunas

| PÓRTICO | A | B | C | D | E |
|----------------------|--------|---------|--------|--------|---------|
| $s_f/E (\text{m}^2)$ | 0,0348 | 0,00929 | 0,0232 | 0,0418 | 0,00697 |

Tabela 2 - Características Elásticas dos Pórticos

Com os dados indicados, as características elásticas do edifício, em relação ao sistema de referência colocado segundo os eixos centrais do conjunto de paredes, ficam:

$$J_{aa} = 5,475 \cdot 10^3 \text{ KN}\cdot\text{m}^2$$

$$\bar{J}_{bb} = 89,85 \cdot 10^3 \text{ KN}\cdot\text{m}^2$$

$$\bar{J}_{cc} = 2203,5 \cdot 10^3 \text{ KN}\cdot\text{m}^4$$

$$S_{aa} = 334,4 \text{ KN} \quad (S_{ab} = 0)$$

| COLOCAÇÃO Grau 20 | RUTENBERG Perturb. | DISCRETO | COLOCAÇÃO Grau 10 |
|----------------------|-----------------------|----------|----------------------|
| 2,250 | 2,308 | 2,359 | 2,249 |
| 1,932 | 1,848 | 2,084 | 1,932 |
| 1,055 | 0,744 | 0,7768 | 1,039 |
| 0,7365 | 0,544 | 0,5969 | 0,7174 |
| 0,6126 | 0,436 | 0,4571 | 0,6078 |
| 0,5594 | 0,304 | 0,3181 | 0,5590 |
| 0,4339 | - | 0,2800 | 0,3015 |
| 0,4184 | - | 0,2393 | 0,2982 |
| 0,2653 | - | 0,1885 | 0,2653 |
| 0,2377 | - | 0,1575 | 0,2248 |
| 0,2301 | - | 0,1529 | - |
| 0,1881 | - | 0,1267 | - |

Tabela 4 - Períodos Naturais (V/W) Seg.

Um exame dos períodos naturais confrontados na tabela 3 indica o bom comportamento numérico do método da Colocação. Por outro lado, os resultados lançados na tabela 4, exceção feita ao período fundamental, mostra não haver afinidade entre os resultados encontrados e aqueles apontados por RUTENBERG [4]. Tal fato não deve causar muita estranheza, porquanto esse autor lança mão do método de Perturbação, e, no caso em tela, as excentricidades são bastante pronunciadas, devendo-se pois esperar resultados um tanto pobres, principalmente no tocante à rotação.

5. CONCLUSÕES

O tratamento numérico das equações da técnica do Meio Contínuo pelo método da Colocação é bastante sugestivo, principalmente, em face da substancial redução no montante de operações, quando do emprego de polinômios de baixo grau. O exemplo numérico apresentado ilustra bem que mesmo para polinômios de baixo grau, o prejuízo em precisão nos resultados de maior interesse é, em termos práticos, negligenciável.

... expressa os agradecimentos ao apoio que tem recebido do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

BIBLIOGRAFIA

[1] - ALBIGÈS, M. & GOULET, J. - "Contreventement des Batiments" - Annales de L'Institute Technique du Batiment et des Travaux, Public. N. 149, pp. 473-500, Maio/(1960).

[2] - CHITTY, L. - "On the Cantilever Composed of a Series of Parallel Beams Interconnected by Cross Members" - Philosophical Magazine, Ser. 7, V. 38, pp. 685-699, (1947).

[3] - STAMATO, M.C. - "Associação Contínua de Painéis de Contraventamento" - Publ. Escola de Eng. de S.Carlos, N. 163, (1972).

[4] - RUTENBERG, A; TSO, W.K. e HEIDEBRECHT, A.Č. - "Dynamic Properties of Asymmetric Wall-Frame Structures" - Earth. Eng. Struct. Dyn., V. 5, pp. 41-51, (1977).

[5] - DANAY, A.; GLUCK, J. e GELLERT, M. - "A Generalized Continuum Method for Dynamic Analysis of Asymmetric Tall Buildings" - Earth Eng. Struct. Dyn., V.4, pp. 179-203, (1975).

[6] - LAIER, J.E. - "Análise das Vibrações Livres de Edifícios pela Técnica do Meio Contínuo" - Pub. Esc. Eng. S. Carlos-USP, Tese de Doutorado, (1978).

[7] - HURTY, W.C. e RUBINSTEIN, M.F. - "Dynamics of Structures" - Prentice-Hall, India, 1a. ed., (1967).

[8] - LAU, P.C.M. e BREBBIA, C.A. - "The Cell Collocation Method in Continuum Mechanics", Int. J. Mech. Sci., V.20, pp. 83-95, (1978).

[9] - LAIER, J.E. - "Vibrações Livres de Paredes Associadas" - XX Jornadas Sudamericanas de Engenharia Estructural,

Cordoba, Argentina, (1979).

[10] - RAMALHO, M.A. - "Integração das Equações da Técnica do Meio Contínuo por Polinômios de Interpolação" - Publ. Esc. Eng. S.Carlos, Dissertação de Mestrado, (1983).

[11] - MURASHEV, V.; SIGALOV, E. e BAIKOV, V. - "Design of Reinforced Concrete Structures" - Mir Pub., Moscou, 2^a ed., (1971).