

ANALISIS DE ESTRUCTURAS CELULARES CILINDRICAS  
POR INTEGRACION NUMERICA

Juan F. Giró  
Carlos A. Prato  
Luis A. Godoy

Departamento de Estructuras  
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - Universidad Nacional de Córdoba

RESUMEN

Se presenta un método semianalítico destinado al análisis de estructuras multicelulares cilíndricas basado en un procedimiento de separación de variables e integración numérica de las ecuaciones de láminas cilíndricas. Se obtienen así elementos que permiten analizar estructuras complejas con muy poco esfuerzo de modelización y cálculo. Se desarrolló un programa para computadora en base a este método.

ABSTRACT

A semianalytical method for the analysis of multicellular cylindrical structures is presented. It is based on a variable separation procedure and on numerical integration of the cylindrical shells equations. The elements obtained make possible the analysis of complex structures with very little modeling and processing effort. A computer program has been developed based on this method.

## INTRODUCCION

El análisis de estructuras celulares cilíndricas sometidas a presiones internas de variación arbitraria en planta y elevación es de gran importancia en el diseño de silos, teniendo en cuenta diversos estados de llenado posibles en su funcionamiento.

En la selección del método de análisis más apropiado para estas estructuras deben tenerse en cuenta los siguientes factores condicionantes:

- El tratamiento del problema como axilsimétrico debe descartarse ya que limitaría el estudio a casos de una única célula, quedando fuera del análisis las configuraciones de silos multicelulares, que son de muy frecuente utilización.
- Una formulación general del método de Elementos Finitos con elementos curvos permite mayor flexibilidad en las condiciones de apoyo y cargas, pero su uso resulta en general oneroso en términos del esfuerzo de modelización y de cálculo necesario, aún para tratar configuraciones relativamente simples de uso corriente.
- El método de Bandas Finitas Planas en el que la longitud de las bandas corresponde a la altura de la batería de silos constituye una alternativa interesante, pero su utilización requiere un elevado número de bandas planas para representar el comportamiento de estructuras cilíndricas.

En este trabajo se presenta un método semianalítico que en términos generales es similar al de Bandas Finitas Planas (MBF) en cuanto se refiere al uso de series de Fourier para representar la variación en el sentido del meridiano, pero que presenta como aspecto ventajoso el hecho que respeta el carácter cilíndrico de los tramos entre aristas. Así se ajusta mejor a la realidad física por un lado, con lo cual es posible reducir el número de elementos necesarios con respecto al caso de bandas planas, permitiéndose además una buena representación de las cargas y acomodarse a variaciones en el espesor de los elementos. La idea básica del procedimiento consiste en reducir la ecuación de láminas cilíndricas mediante separación de variables y series trigonométricas a ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas para cada modo longitudinal de deformación, las que son resueltas por integración numérica. Con esta técnica se arriba a la matriz de rigidez del sector cilíndrico, que se ensambla con los restantes como subestructuras o macroelementos y el problema es finalmente resuelto para cada modo de deformación por eliminación gaussiana.

Este método es en términos generales similar al propuesto por A. C. Scordelis [1], distinguiéndose esencialmente en la forma de obtener la matriz de rigidez de cada sector del cilindro.

En base a este planteo se desarrolló un programa para computadora que dispone de todas las facilidades necesarias para el análisis de silos de configuración multicelular y cuya breve descripción se presenta a continuación.

#### PLANTEO DEL PROBLEMA

Una configuración multicelular de silos cilíndricos (Fig. 1) es una estructura espacial cuya sección transversal normal a los ejes meridianos es constante, por lo que puede emplearse un desarrollo en serie de Fourier para representar la solución del problema en esa dirección.

El planteo queda así reducido a uno de dos dimensiones, pudiendo a su vez emplearse una modelización mediante elementos unidimensionales definidos por los arcos de las líneas medias de las células cilíndricas.

Esto significa que un desplazamiento genérico "w" puede expresarse como:

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^n W_i(y, z) \cdot \text{sen} \frac{i\pi x}{L} = \sum_{i=1}^n W_i(s) \cdot \text{sen} \frac{i\pi x}{L} \quad (1)$$

donde L es la altura del meridiano (dirección x) y n el número de armónicas. Los valores de w se obtienen así a partir de la superposición de las n soluciones obtenidas para W(s).

La solución del problema puede entonces dividirse en las siguientes etapas:

- a) Análisis armónico de la distribución de presiones a lo largo del meridiano, con el fin de representar las condiciones de carga a partir de una superposición de funciones senoidales. Para silos de almacenamiento de granos la curva de presiones puede aproximarse por expresiones como la propuesta por Janssen y representada en el ejemplo de la Fig. 2.
- b) Obtención de las matrices de rigidez de los elementos curvos unidimensionales empleados para modelizar la estructura para cada una de las armónicas consideradas en el análisis anterior.
- c) Armado de la matriz de rigidez global de la estructura y cálculo de los desplazamientos y solicitaciones que corresponden a cada armónica o modo de deformación.
- d) Combinación de las soluciones anteriores (Ec. 1) para obtener desplazamientos y solicitaciones en cualquier punto a lo largo del meridiano.

La ortogonalidad de las funciones armónicas, que hace a la serie de Fourier particularmente atractiva para el método de separación de variables, impone una restricción sobre las condiciones de apoyo de los extremos. En efecto,

FIGURA 1

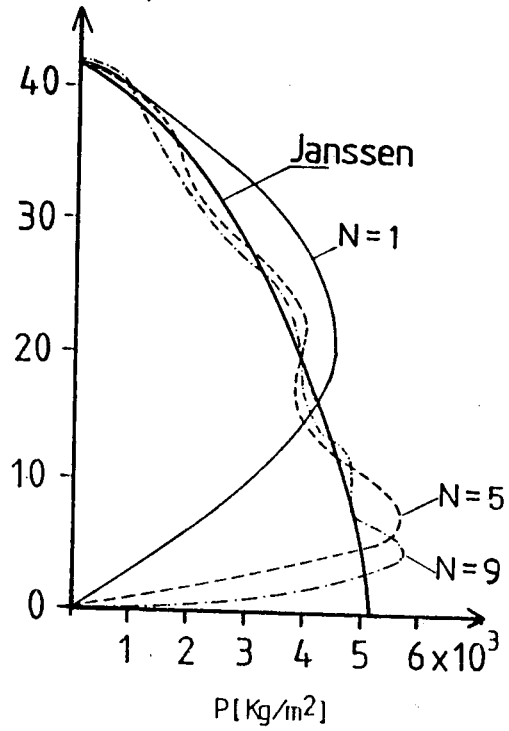
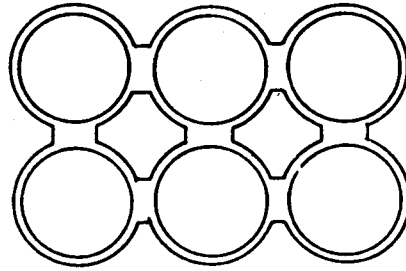


FIGURA 2

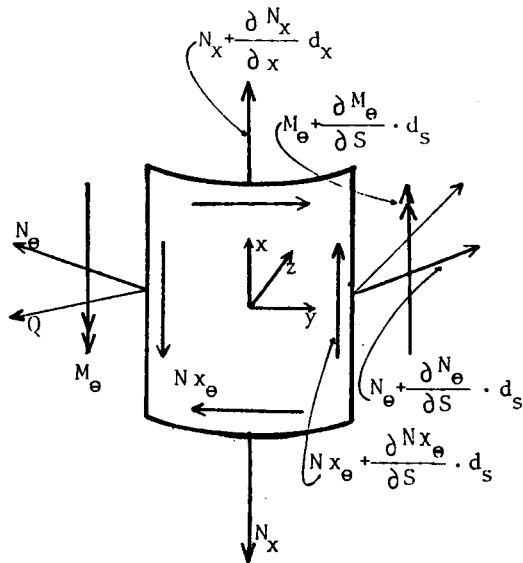


FIGURA 3

el análisis queda así limitado a estructuras que presenten una condición de apoyo simple en sus bordes extremos ya que los desplazamientos y esfuerzos han sido expresados a través de funciones senoidales.

#### ANÁLISIS DEL ELEMENTO

Las ecuaciones básicas que gobiernan el equilibrio de una lámina cilíndrica delgada elástica son:

$$\frac{\partial N_x}{\partial X} + \frac{\partial N_{xe}}{\partial S} + P_x = 0$$

$$\frac{\partial N_e}{\partial S} + \frac{\partial N_{xe}}{\partial X} + \frac{Q}{R} + P_y = 0$$

$$\frac{N_e}{R} - \frac{\partial \eta}{\partial S} - P_z = 0$$

$$\frac{\partial M_e}{\partial S} + Q = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial S} + \frac{\partial u_s}{\partial X} - \frac{2 N_{xe}}{c(1-\nu)} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial S} + \frac{u_z}{R} + \nu \frac{\partial u_x}{\partial X} - \frac{N_e}{c} = 0$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial S} - \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial X^2} + \frac{M_e}{D} = 0$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial S} + u_e - \frac{u_s}{R} = 0$$

donde:

$$N_x = c \left[ \frac{\partial u_x}{\partial X} + \nu \left( \frac{\partial u_s}{\partial S} + \frac{u_z}{R} \right) \right]; \quad c = \frac{E_h}{1-\nu^2}; \quad D = \frac{E_h^3}{12(1-\nu^2)}$$

y el vector de incógnitas queda entonces definido de la siguiente forma:

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} Nx_e \\ N_e \\ Q \\ M_e \\ u_x \\ u_s \\ u_z \\ u_e \end{Bmatrix}$$

Con el fin de eliminar la variable  $x$  (dirección del meridiano), se propone para las incógnitas  $N_e$ ,  $Q$ ,  $M_e$ ,  $u_s$ ,  $u_z$  y  $u_e$  variación semoidal a lo largo de ese eje, y para  $Nx_e$  y  $u_x$  variación cosenoidal. Es decir que:

$$F(x, s) = f'(s) \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} ; \text{ para } N_e, Q, M_e, u_s, u_z, u_e$$

(3)

$$\text{y}$$

$$f(x, s) = f'(s) \cdot \text{cos} \frac{n\pi x}{L} ; \text{ para } Nx_e \text{ y } u_x$$

y para las cargas exteriores representadas por  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$  se propone también una variación senoidal, es decir:

$$P(x, s) = P'(s) \cdot \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (4)$$

Reemplazando las expresiones (3) y (4) en el sistema de ecuaciones diferenciales (2) y definiendo  $\Lambda = \frac{n\pi}{L}$  se obtiene:

$$\Lambda \cdot N_x + \frac{d Nx_e}{d s} + P_x = 0$$

$$\frac{d N_e}{d s} - \Lambda \cdot Nx_e + \frac{Q}{R} + P_y = 0$$

$$\frac{N_e}{R} - \frac{d Q}{d s} - P_z = 0$$

$$\frac{d M_e}{d s} + Q = 0$$

$$\frac{d u_x}{d S} + A \cdot u_s - \frac{2 N_x \theta}{C (1 - \nu)} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d u_s}{d S} + \frac{u_z}{R} - \nu \cdot A \cdot u_x - \frac{N_\theta}{C} = 0$$

$$\frac{d u_\theta}{d S} + \nu \cdot A^2 \cdot u_z + \frac{M_\theta}{D} = 0$$

$$\frac{d u_z}{d S} + u_\theta - \frac{u_s}{R} = 0$$

y

$$N_x = C \left[ -A u_x + \nu \left( \frac{d u_s}{d S} + \frac{u_z}{R} \right) \right]$$

El sistema de ecuaciones (5) corresponde a un elemento unidimensional de radio constante R para una determinada armónica "n".

Asignando alternativamente a cada una de las componentes del vector  $\{V\}$  un valor unitario y a las restantes ceros, se obtienen ocho vectores de estado que definen otras tantas condiciones iniciales linealmente independientes en un extremo del elemento.

Para cada uno de estos vectores iniciales se integran numericamente las ecuaciones (5) a lo largo de la variable "s", determinando valores de  $\{V\}$  en puntos sucesivos hasta alanzar el otro extremo. Se integra así el sistema de ecuaciones en ocho oportunidades, conformando con los vectores de estado finales la matriz de transferencia [M] del elemento. Es decir que se vinculan ambos extremos a través de [M] y se tiene:

$$\{V\}_j = [M] \cdot \{V\}_i \quad (6)$$

y representando con  $\{U\}$  al subvector de los esfuerzos y con  $\{u\}$  al de los desplazamientos, la expresión anterior puede escribirse:

$$\begin{Bmatrix} U \\ u \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U \\ u \end{Bmatrix}_i \quad (7)$$

y reordenando la matriz de manera de vincular las fuerzas de los extremos con sus desplazamientos, se tiene

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ \vdots \\ U_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \vdots & K_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{21} & \vdots & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ \vdots \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} [K_{11}] &= -[M_{21}]^{-1} \cdot [M_{22}] \\ [K_{12}] &= [M_{21}]^{-1} \\ [K_{21}] &= [M_{12}] - [M_{11}] \cdot [M_{21}]^{-1} \cdot [M_{22}] \\ [K_{22}] &= [M_{11}] \cdot [M_{21}]^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

que son las particiones de la matriz de rigidez del elemento.

Para completar el análisis es necesario conocer las reacciones de los extremos que corresponden a la condición de cargas distribuidas (presiones) sobre el elemento biempotrado. Para ello se integra nuevamente el sistema de ecuaciones (5), pero esta vez a partir de un vector de estado inicial con todas sus componentes nulas y considerando las cargas exteriores representadas por  $P_x$ ,  $P_y$  y  $P_z$ . Así se obtiene en el extremo final un vector denominado  $\{\bar{R}\}$ , con el que puede ahora escribirse la siguiente expresión general:

$$\{V\}_j = [M] \cdot \{V\}_i + \{\bar{R}\} \quad (10)$$

y particionando la matriz  $[M]$  se tiene

$$\begin{Bmatrix} U \\ \vdots \\ u \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} M_{11} & \vdots & M_{12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{21} & \vdots & M_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U \\ \vdots \\ u \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} R \\ \vdots \\ r \end{Bmatrix} \quad (11)$$

e imponiendo en los extremos las condiciones de apoyo mencionadas, representadas por  $\{u\}_i = \{u\}_j = \{0\}$ , se obtienen las correspondientes reacciones. Estas son:



$$\begin{aligned} \{U\}_i &= - [M_{21}]^{-1} \cdot \{r\} \\ \{U\}_j &= - [M_{11}] \cdot [M_{21}]^{-1} \cdot \{r\} + \{R\} \end{aligned} \quad (12)$$

Con la determinación de la matriz de rigidez y vector de reacciones, que están referidos a sistemas de coordenadas locales del elemento, se completa el análisis correspondiente a la armónica "n". La matriz de rigidez y vector de reacciones serán luego transformados al sistema de referencia global de la estructura, para ser incorporados a la matriz de rigidez global y su correspondiente vector de cargas exteriores.

#### DESCRIPCION DEL PROGRAMA DE CALCULO

En base al planteo propuesto se implementó un programa para computadora destinado al análisis estructural de silos multicelulares.

En el desarrollo de este programa, y con el fin de superar los inconvenientes ya señalados que presentan otros métodos más generales, se tuvieron especialmente en cuenta los siguientes aspectos:

- a) Facilidad para la definición del modelo, a través de una cantidad mínima de datos.
- b) Ahorro en el esfuerzo de cálculo, con el fin de ser posible la implementación del programa aún en máquinas de reducida capacidad de proceso.
- c) Gran flexibilidad para presentar resultados en tantos puntos como sea necesario.

El programa sigue la secuencia de cálculo ya descripta al plantear el problema en el punto 2 (Pág. 3) y su diagrama de flujo general se presenta en la Fig. 4. Este fue escrito en lenguaje Fortran y responde a una concepción modular.

#### EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

Con el fin de juzgar el programa de cálculo desarrollado en base al método propuesto, se fijaron las siguientes pautas:

- Evaluación del comportamiento general del elemento de cilindro y de sus combinaciones en mallas diversas.
- Análisis de la estabilidad del proceso de integración numérica en condiciones extremas.
- Medición de los tiempos de proceso requeridos para resolver casos típicos.

## DIAGRAMA GENERAL

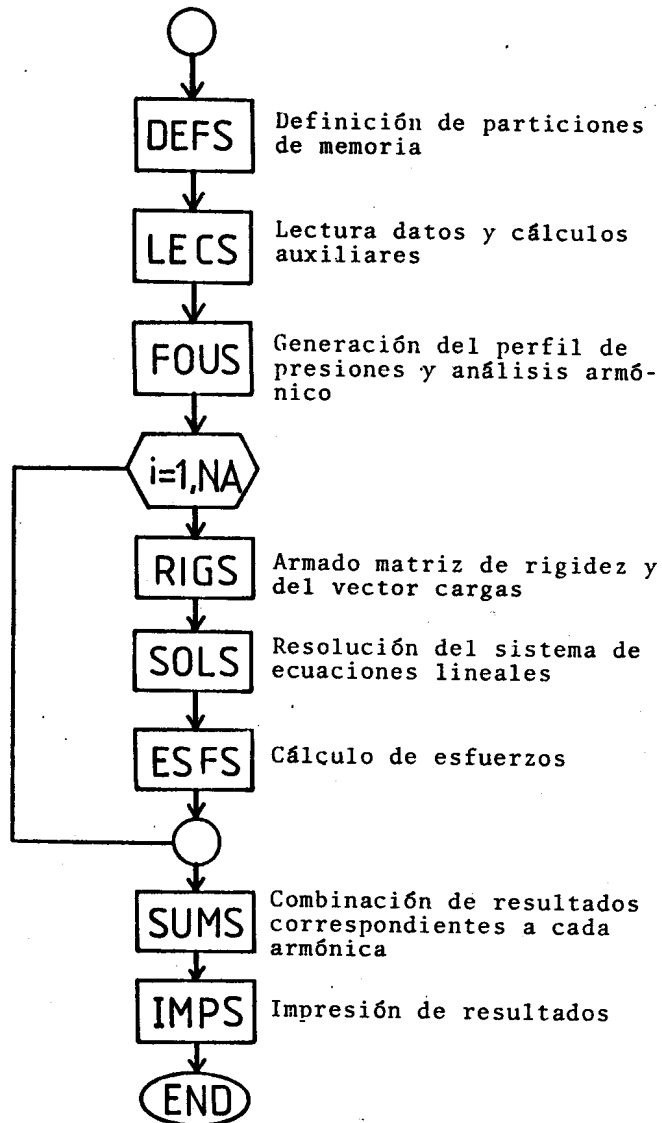


FIGURA 4

A partir de estas pautas se estudiaron numerosos casos de diversa complejidad que permitieron confirmar el correcto desempeño del programa, comentándose a continuación algunos de estos casos a título de ejemplo.

El elemento de cilindro fue inicialmente probado modelizando casos sencillos, tales como tubos sometidos a diversas condiciones de presión (uniforme, semilleno, etc). En estos casos los resultados obtenidos mostraron total coincidencia con los de las soluciones analíticas.

Con el fin de comparar resultados correspondientes a mallas de diversa heterogeneidad se emplearon modelos tales como los representados en la Figura 5. Estos modelos corresponden al análisis de una configuración multicelular de silos (Fig. 6) donde ha sido llenado el espacio central y representándose sólo una célula a través de las condiciones de apoyo apropiadas. En este caso  $r$  (radio) = 4,275 m y  $t$  (espesor de pared) = 0,20 m. El modelo "a" combina elementos de 15°, 45° y 90° mientras que el "b" está formado por cuatro elementos de 90°. En otros casos (no representados) se emplearon distintas mallas a ambos lados del eje de simetría, combinando elementos de 7,5°, 15°, 45° y 90°, obteniéndose para todos ellos resultados completamente coincidentes.

Los mismos modelos fueron de utilidad para confirmar el buen comportamiento del procedimiento implementado para la separación de variables, considerando diferentes alturas y distinto número de armónicas.

Los resultados de estos casos fueron comparados con los obtenidos por el método de bandas finitas planas, observándose una buena correspondencia en todos los casos. En la Tabla I se presentan los valores de  $M_0$  y  $N_0$  que corresponden a:  $n$ (armónicas) = 3 y  $h$ (altura) = 100 m;  $n = 1$  y  $h = 100$  m;  $n = 1$  y  $h = 40$  m, representándose los resultados del primer caso en la Figura 7. El cambio en la altura del silo fue particularmente interesante para la prueba del programa, ya que entre las alturas indicadas se observa un cambio notable en el comportamiento de  $N_0$ . Una interpretación de estos resultados se presenta en el trabajo de L. Godoy [2].

Un problema similar a los anteriores fue resuelto con una representación del perfil de presiones mediante siete armónicas, presentándose algunos resultados en la Tabla II. En este caso  $r = 6,175$  m,  $t = 0,35$  m y  $h = 42$  m.

Debido a la tendencia propia de la ecuación de láminas cilíndricas a amortiguar los efectos de una perturbación al avanzar desde el origen hacia el otro extremo, el procedimiento de integración numérica exhibe una tendencia a la amplificación de errores que finalmente se manifiestan en la obtención de una matriz de rigidez asimétrica para el elemento.

FIGURA 5

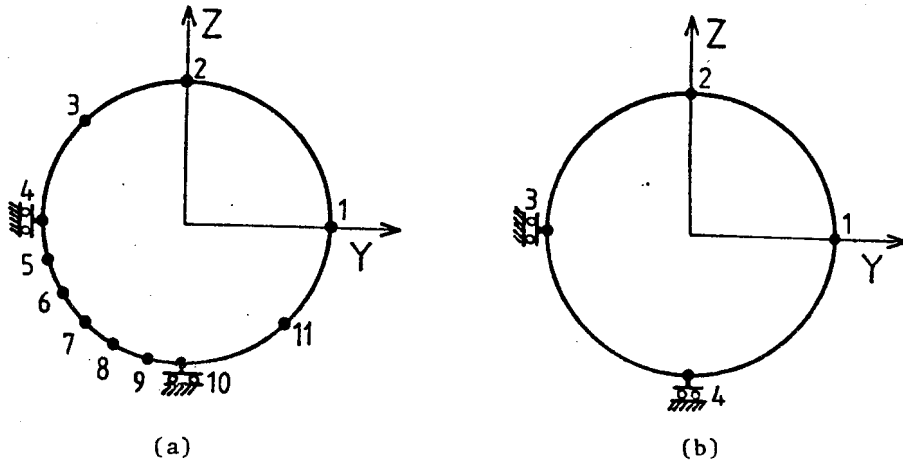


FIGURA 6

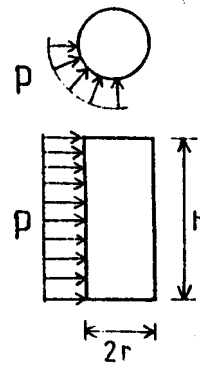
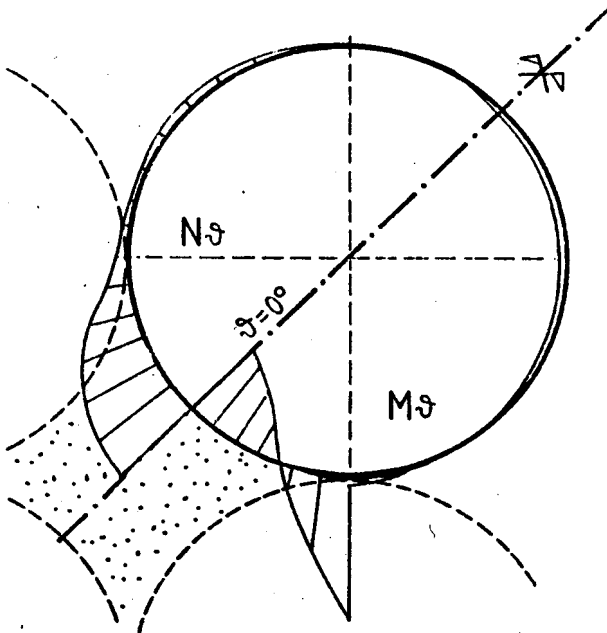
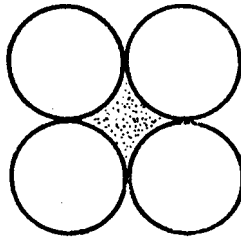


FIGURA 7

	$\theta^\circ$	h = 100 m, n = 3		h = 100 m, n = 1		h = 40 m, n = 1	
		MBF	MBFC	MBF	MBFC	MBF	MBFC
$N_e$ [ x $10^2$ kg/cm ]	7,5	1,73	1,68	1,99	1,93	-0,65	-0,71
	22,5	1,32	1,27	1,50	1,44	-0,83	-0,89
	37,5	0,52	0,47	0,54	0,48	-1,22	-1,26
	90	0,11	0,12	-0,06	-0,07	-0,81	-0,77
	180	--	--	0,10	0,10	--	--
$M_e$ [ x $10^4$ kg.cm/cm ]	0	2,89	2,75	3,34	3,17	2,12	2,06
	15	1,96	1,81	2,25	2,09	1,45	1,36
	30	-0,80	-0,94	-0,93	-1,09	-0,57	-0,69
	45	-5,20	-5,34	-5,99	-6,15	-3,88	-4,03
	45	-0,39	-0,37	-0,21	-0,18	0,80	0,99
	135	0,12	0,11	0,11	0,11	0,05	0,04

Tabla I - Perfil de presiones: constante

MBF = método bandas finitas planas  
 MBFC = método bandas finitas cilíndricas

$\theta^\circ$	x = 14 m, n = 7		x = 28 m, n = 7	
	$N_e [x10^2 \text{ kg/cm}]$	$M_e [x10^4 \text{ kgcm/cm}]$	$N_e [x10^2 \text{ kg/cm}]$	$M_e [x10^4 \text{ kgcm/cm}]$
0	-0,32	0,49	-0,31	0,46
15	-0,33	0,32	-0,32	0,30
30	-0,36	-0,16	-0,33	-0,15
45	-0,40	-0,97	-0,36	-0,91
105	-0,09	-0,13	-0,09	-0,12
165	0,07	0,12	0,07	0,12
225	0,03	0,01	0,02	0,00

Tabla II - Perfil de presiones ; Curva de Janssen  
Método : Bandas Finitas Cilíndricas (MBFC)

Ante la posibilidad de que esto se constituyera en una severa limitación a la aplicación del método propuesto se hicieron numerosas pruebas sobre el comportamiento de la matriz de rigidez para diferentes órdenes de armónicas en función de un coeficiente "c" que relaciona el espesor del elemento y la longitud de su línea media ( $c = \frac{t}{r \cdot \theta}$ ).

Los resultados expresados en términos de la mayor asimetría presente en la matriz no presentan una tendencia definida como para justificar su representación gráfica, pero demuestran que trabajándose con precisión doble no deberían esperarse dificultades con valores de "c" superiores a 0,05%. Como referencia puede observarse que los elementos de 90° de los modelos de la Fig. 5 tienen un  $c = 2,9\%$ , por lo que el límite indicado no ofrece ninguna limitación a la aplicación práctica del método.

Sin embargo, para ampliar su rango de aplicación se está implementando una técnica de supresión de errores consistente en la creación automática de puntos intermedios de ajuste de las soluciones, con un efecto equivalente a una modelización con una malla más fina.

En lo que hace a los tiempos de proceso puede señalarse que, según el caso, los procedimientos de integración y armado de las matrices de rigidez de los elementos consumen entre el 80% y el 95% de su valor total. Aquí debe considerarse que los elementos repetidos no se integran nuevamente (permanecen disponibles en una "librería") y que, por otra parte, el tipo de elemento empleado lleva a modelos de relativamente pocos grados de libertad.

#### CONCLUSIONES

Se considera al método implementado una herramienta poderosa para el análisis estructural de silos. En lo sucesivo se continuará trabajando en otorgar aún mayor flexibilidad a la entrada de datos y en estudiar alternativas para superar las restricciones que se presentan en las condiciones de apoyo de los extremos.

#### REFERENCIAS

- [1] Scordelis, A.C. and Lo, K.S.; "Computer Analysis of Cylindrical Shells", J.ACI, Vol. 61, N° 5, Mayo 1964.
- [2] Godoy L., Giró J. y Prato C.; "Análisis tensional de Silos Verticales mediante Elementos Finitos Semianalíticos", Dpto. Estructuras, UNC, trabajo presentado en Colloquia 85, Octubre 1985.