

AVALIAÇÃO DE ELEMENTOS PARAMÉTRICOS DE VIGA

Raul Rosas e Silva

Everton Memória Sousa*

Departamento de Engenharia Civil

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro - Brasil

*Atualmente, Instituto de Engenharia Nuclear, Rio de Janeiro, Brasil

RESUMO

Apresentam-se elementos finitos para vigas no espaço baseados em interpolação Lagrangeana das translações e rotações das seções transversais. Tais elementos prestam-se à modelagem do comportamento estático e dinâmico, linear e não-linear, de pórticos tridimensionais. Os elementos podem possuir curvaturas e torção iniciais. Exemplos de análise estática geometricamente não-linear e de cálculo de frequências de vibração são apresentados. Demonstra-se que há sérias limitações na modelagem dos efeitos de cisalhamento, em particular à torção. Estas deficiências têm recebido pouca atenção, pois a maioria dos trabalhos nesta área se limitam a problemas de flexão no plano. São feitas sugestões para limites de utilização e melhoria destes elementos.

ABSTRACT

Finite elements for beams in space, using Lagrangian interpolation of cross-sectional translations and rotations, are developed for static and dynamic nonlinear analysis of space frames. The elements can have initial curvatures and torsion. Examples of geometrically nonlinear static analyses and natural frequency calculations are presented. It is shown that serious limitations arise in the modelling of shear deformation effects, specially with regard to torsion. Such deficiencies have received little attention in the literature, because most applications have been limited to plane bending. Suggestions for improvement of such elements are presented.

INTRODUÇÃO

O advento de elementos finitos baseados em funções de forma parametrizadas, geradas com referência à geometria simples de elementos básicos, veio simplificar em muito o tratamento de problemas envolvendo peças curvas. Além disso, tal formulação presta-se de maneira conveniente à modelagem de problemas de grandes deslocamentos, já que os estados sucessivos de deformação podem ser descritos através de mapeamentos similares ao usado na definição da geometria inicial.

Este trabalho apresenta elementos baseados em interpolação Lagrangeana, para uso na modelagem de vigas no espaço, com grandes curvaturas e torções iniciais, variáveis ao longo dos elementos [1]. Estes elementos podem ser usados na análise de pórticos espaciais. A formulação desenvolvida [1,2] permite considerar deslocamentos arbitrariamente grandes. A limitação está na lei constitutiva do material, que é suposta ser uma relação linear entre os tensores de tensões de Piola-Kirchhoff II e de deformações de Lagrange [3], quando se utiliza a chamada formulação Lagrangeana total (F.L.T.).

As hipóteses cinemáticas adotadas correspondem a uma versão tridimensional da viga tipo Timoshenko (com efeito de cisalhamento [4]), em que a seção transversal é indeformável mas não está restrita a permanecer normal à linha média após a deformação da estrutura. Isto é atingido de forma muito simples, através de uma interpolação independente de translações e rotações das seções. Além de considerações relativas à flexão no plano [1], que já são bastante divulgadas, importa destacar que tais elementos contêm deficiências na modelagem de efeitos de torção.

No que se segue, descreve-se brevemente a formulação do elemento (matrizes de rigidez e de massa), com certa atenção ao cálculo dos esforços em regime de grandes deslocamentos. Os fundamentos teóricos são também mencionados; para uma descrição mais detalhada, recomenda-se a Ref. [1], onde são encontrados ainda exemplos adicionais aos aqui apresentados.

FUNDAMENTOS

A forma matricial das equações do movimento de uma estrutura discretizada em elementos finitos, já linearizada para deslocamentos incrementais, pode ser escrita

$$\underline{\underline{M}} \overset{t+\Delta t}{\underline{\underline{u}}} + \left(\overset{t}{\underline{\underline{K}}}_L + \overset{t}{\underline{\underline{K}}}_{NL} \right) \underline{\underline{u}} = \overset{t+\Delta t}{\underline{\underline{t}}}_R - \overset{t}{\underline{\underline{F}}}_T \quad (1)$$

onde $\underline{\underline{M}}$ é a matriz de massa; $\underline{\underline{K}}_L$ e $\underline{\underline{K}}_{NL}$ são, respectivamente, a parte linear e a não-linear da matriz de rigidez; $\overset{t+\Delta t}{\underline{\underline{t}}}_R$ é o vetor do carregamento nodal aplicado externamente; $\overset{t}{\underline{\underline{F}}}_T$ é o vetor das forças nodais equivalentes às tensões dos elementos; $\overset{t+\Delta t}{\underline{\underline{u}}}$ é o vetor das acelerações nos pontos nodais e $\underline{\underline{u}}$ é o vetor dos deslocamentos nodais incrementais. Convenciona-se que as quantidades têm um índice superior esquerdo que indica a configuração em que estas ocorrem e índice inferior esquerdo a configuração em que as mesmas são medidas.

Os elementos de viga são formulados tridimensionalmente, podem ser curvos, e as dimensões de suas seções transversais, as quais devem

ser retangulares, podem variar ao longo do eixo [1,2]. Os elementos possuem translações das seções independentes das rotações, com o que se tem uma boa representação da geometria deformada dos elementos quando estes são submetidos a grandes deslocamentos e grandes rotações.

Supõe-se que uma seção transversal plana, inicialmente normal ao eixo da viga permanece plana, porém devido às deformações por cisalhamento esta seção não mais permanece normal à esse eixo. Este efeito é levado em conta porque a expressão dos deslocamentos de um ponto no interior do elemento, a qual será apresentada posteriormente, é função da diferença entre os vetores unitários de orientação das seções na posição inicial (${}^0v_s, {}^0v_t$) e na posição deformada (${}^t v_s, {}^t v_t$); as direções destes vetores correspondem às direções dos eixos principais de inércia. Para efeito de ilustração consideram-se os elementos da Fig. 2 a fim de que se possa visualizar as deformações de cisalhamento sofridas pelo elemento e também as condições de compatibilidade de deslocamentos $u_i (i=1,2,3)$ e rotações $\theta_i (i=1,2,3)$, nas interseções de elementos.

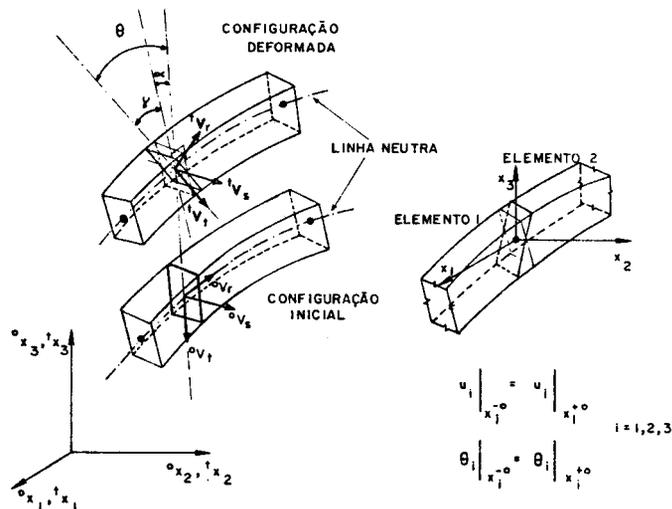


Fig. 1 Hipóteses cinemáticas

As coordenadas Cartesianas ${}^m x_i$ de um ponto arbitrário de uma viga com N pontos nodais em uma configuração m são expressas por

$$\begin{aligned}
 {}^m x_i &= \sum_{k=1}^N h_k {}^m x_i^k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^N a_k h_k {}^m v_{ti}^k + \\
 &+ \frac{s}{2} \sum_{k=1}^N b_k h_k {}^m v_{si}^k \quad (2) \\
 &\text{com } (i=1,2,3)
 \end{aligned}$$

onde $h_k(r)$ são funções de interpolação Lagrangeanas [1,2], $r, s, e t$ são as x_k coordenadas naturais, $m_{x_i}^k$ são as coordenadas Cartesianas de um ponto nodal k , a_k e b_k são as dimensões de seção transversal da viga no ponto nodal k , $m_{y_i}^k$ e $m_{z_i}^k$ são as componentes dos vetores unitários $m_{y_s}^k$ e $m_{z_t}^k$ nas direções s e t , respectivamente, do ponto nodal k , as quais não são necessariamente normais a linha média da viga. O cálculo dos vetores de orientação das seções nos pontos nodais do elemento para a configuração inicial, ($o_{y_r}^k, o_{y_s}^k$ e $o_{y_t}^k$), utiliza pontos auxiliares e é detalhado em [1].

Avaliando-se a expressão (2), sucessivamente, nos estados 0, t e $t+\Delta t$, obtêm-se os campos de deslocamentos totais t_{u_i} e deslocamentos incrementais u_i em função dos vetores de orientação das seções nodais.

MATRIZ DE RIGIDEZ

Conhecida a geometria atualizada, é possível obter as matrizes e vetores utilizados na análise linear e não-linear. As diferenciações e integrações em coordenadas Cartesianas globais o_{x_i} requerem a matriz de transformação Jacobiana o_J , que contém as derivadas das coordenadas Cartesianas iniciais o_{x_i} com respeito às coordenadas naturais r, s e t .

$$o_J = \begin{bmatrix} o_{x_{1,r}} & o_{x_{2,r}} & o_{x_{3,r}} \\ o_{x_{1,s}} & o_{x_{2,s}} & o_{x_{3,s}} \\ o_{x_{1,t}} & o_{x_{2,t}} & o_{x_{3,t}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

As matrizes de rigidez e o vetor de forças equivalentes são obtidos da avaliação das integrais abaixo, sobre o volume o_V de cada elemento, com posterior somatório para toda a estrutura.

$$o_{\underline{L}}^k u = \int_{o_V} o_{C_{ijrs}} o_{e_{rs}} \delta_o e_{ij} o_{dv} \quad (4)$$

$$o_{\underline{NL}}^k u = \int_{o_V} o_{S_{ij}} \delta_o n_{ij} o_{dv} \quad (5)$$

$$o_{\underline{T}}^T u = \int_{o_V} o_{S_{ij}} \delta_o e_{ij} o_{dv} \quad (6)$$

onde $o_{C_{ijrs}}$ é o tensor das relações constitutivas, $o_{S_{ij}}$ representa o tensor de Piola Kirchhoff II, e $o_{e_{ij}}$ e $o_{n_{ij}}$ correspondem às partes linear e não-linear do tensor das deformações incremental:

$$o_{e_{ij}} = o_{e_{ij}} + o_{n_{ij}} \quad (7)$$

$$o^e_{ij} = \frac{1}{2} \left[(o^{u_{i,j}} + o^{u_{j,i}}) + (o^{u_{k,i}} o^{u_{k,j}} + o^{u_{k,j}} o^{u_{k,i}}) \right] \quad (8)$$

$$o^n_{ij} = \frac{1}{2} (o^{u_{k,i}} o^{u_{k,j}}) \quad (9)$$

As equações (4) a (6) são avaliadas matricialmente, como se segue:

$${}_{o\sim L}^t K u = \left(\int_{o_V} {}_{o\sim L}^t B^T {}_{o\sim}^t C {}_{o\sim L}^t B \, o_{dv} \right) u \quad (10)$$

$${}_{o\sim NL}^t K u = \left(\int_{o_V} {}_{o\sim NL}^t B^T {}_{o\sim}^t S {}_{o\sim NL}^t B \, o_{dv} \right) u \quad (11)$$

$${}_{o\sim}^t F = \int_{o_V} {}_{o\sim L}^t B^T {}_{o\sim}^t S \, o_{dv} \quad (12)$$

Nas expressões (10) a (12), ${}_{o\sim L}^t B$ relaciona as deformações lineares com os deslocamentos, ao se usar a notação matricial:

$$\underline{e} = {}_{o\sim L}^t B \hat{u}$$

onde $\underline{e}^T = \left[o^{e_{11}} \quad o^{e_{22}} \quad o^{e_{33}} \quad 2o^{e_{12}} \quad 2o^{e_{23}} \quad 2o^{e_{13}} \right];$

$$\hat{u}^T = \left[u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad \theta_1^1 \quad \theta_2^1 \quad \theta_3^1; \dots; u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N \quad \theta_1^N \quad \theta_2^N \quad \theta_3^N \right];$$

$N = n^o$ de nós do elemento;

${}_{o\sim NL}^t B$ relaciona as derivadas dos incrementos das deformações com os deslocamentos,

$${}_{o\sim}^t u' = {}_{o\sim NL}^t B \hat{u}$$

onde

$${}_{o\sim}^t u'^T = \left[o^{u_{1,1}} \quad o^{u_{1,2}} \quad o^{u_{1,3}} \quad o^{u_{2,1}} \quad o^{u_{2,2}} \quad o^{u_{2,3}} \quad o^{u_{3,1}} \quad o^{u_{3,2}} \quad o^{u_{3,3}} \right];$$

${}_{o\sim}^t C$ representa as relações linearizadas entre tensões e deformações incrementais; ${}_{o\sim}^t S$ é a matriz contendo as tensões de Piola-Kirchhoff II; e ${}_{o\sim}^t S$ corresponde ao vetor destas tensões.

Na formulação Lagrangeana total a relação linear tensão-deformação é

$${}_{o\sim}^t S_{ij} = {}_{o\sim}^t C_{ijrs} \, {}_{o\sim}^t \epsilon_{rs} \quad (13)$$

É suposto que no sistema de coordenadas local somente existem uma tensão longitudinal e duas tensões de cisalhamento. Portanto a relação constitutiva do material no sistema local é representada pela matriz

$$\underline{t}_{\underline{C}} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & kG & 0 \\ 0 & 0 & kG \end{bmatrix}; \quad (14)$$

onde E é o módulo de Young, k é o fator de correção do cisalhamento e G é o módulo de elasticidade transversal. Como o equilíbrio das equações é obtido no sistema global de coordenadas, faz-se necessário a transformação da matriz constitutiva local para o sistema de coordenadas global.

MATRIZ DE MASSA

Os deslocamentos globais de um ponto no interior do elemento são funções dos deslocamentos de todos os N nós do elemento. Portanto, tem-se

$$\underline{u}(r,s,t) = \underline{t}_H \underline{\hat{u}}$$

onde \underline{u} é o vetor dos deslocamentos de um ponto no elemento, \underline{t}_H é a matriz de interpolação dos deslocamentos e $\underline{\hat{u}}$ é o vetor dos deslocamentos nodais.

Para a avaliação da matriz de massa calcula-se numericamente a integral abaixo

$$\underline{t}_M = \int_{O_V} \rho \underline{t}_H^T \underline{t}_H d^O V \quad (15)$$

onde ρ é a densidade de massa correspondente ao tempo 0. Note-se que no caso de elementos de viga submetidos a grandes rotações, \underline{t}_H deve ser estabelecido na configuração atualizada (este fato não tem sido suficientemente esclarecido na literatura). Portanto, a matriz de massa é dependente da configuração, neste caso.

AVALIAÇÃO DOS ESFORÇOS

Os esforços (forças e momentos, vide Fig. 2) são calculados numericamente integrando-se, as forças e momentos por unidade de área, nas direções s e t , mantendo-se r fixo.

A relação que existe entre as forças globais \underline{t}_i por unidade de área em um determinado ponto e as tensões de Cauchy \underline{t}_{Tij} neste ponto, pode ser expressa da seguinte maneira,

$$\underline{t}_i = \underline{t}_{T_{ji}} \underline{t}_{V_{rj}} \quad (i = 1,2,3; j=1,2,3)$$

onde os $\underline{t}_{V_{rj}}$ são as componentes do vetor unitário na direção normal à seção definida pela coordenada r .

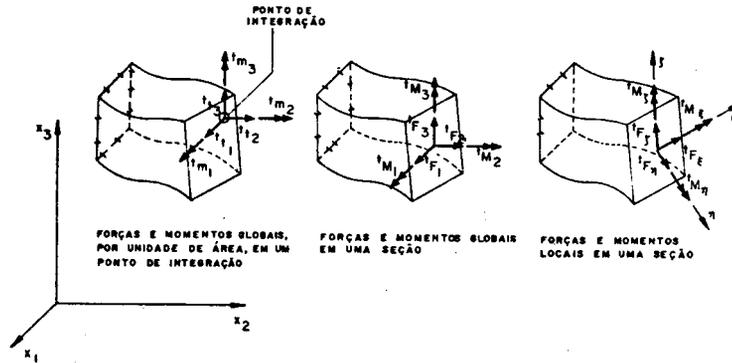


Fig. 2 Esforços em uma seção transversal

O cálculo dos momentos globais t_{m_i} por unidade de área em um ponto, (referidos à configuração atual), poderá ser avaliado através da equação indicial abaixo

$$t_{m_i} = E_{ijk} t_{x_j} t_{t_k}$$

onde E_{ijk} é o símbolo de permutação e t_{x_j} é o vetor posição do ponto de uma determinada seção, dado por

$$t_{x_i} = \frac{1}{2} (s b t_{V_{si}} + t a t_{V_{ti}})$$

Na expressão acima, s e t representam as coordenadas naturais; a e b são as dimensões da seção correspondente ao ponto de integração r , obtidas por interpolação das dimensões nas seções nodais.

Até agora foi visto como encontrar as forças e momentos por unidade de área em um ponto de integração. Para calcular as forças e os momentos totais é feita uma integração numérica das forças e momentos elementares $t_{t_i} dA$ e $t_{m_i} dA$. Assim, tem-se

$$t_{F_i} = \int_A t_{t_i} dA = \frac{ab}{4} \sum_{j,k} \alpha_j \alpha_k t_{t_i}(s_j, t_k)$$

$$t_{M_i} = \int_A t_{m_i} dA = \frac{ab}{4} \sum_{j,k} \alpha_j \alpha_k t_{m_i}(s_j, t_k)$$

onde s_j e t_k representam as coordenadas dos pontos de integração na seção; α_j e α_k são os respectivos pesos na integração por Gauss nas direções s e t , respectivamente; e t_{F_i} e t_{M_i} são as componentes das forças e momentos globais em uma seção, na configuração atualizada.

As componentes das forças totais no sistema local são calculadas pela transformação matricial

$$\underline{\underline{t}}_F = \underline{\underline{t}}_Q \underline{\underline{t}}_F$$

$$\underline{\underline{t}}_M = \underline{\underline{t}}_Q \underline{\underline{t}}_M$$

onde $\underline{\underline{t}}_F$ e $\underline{\underline{t}}_M$ representam as forças e momentos totais no sistema local, e $\underline{\underline{t}}_Q$ é a matriz de transformação das forças do sistema global para o local.

O procedimento apresentado para o cálculo das forças e momentos, tanto sejam globais ou locais, é utilizado para as formulações Lagrangeana total e atualizada. Em ambas as formulações as tensores de Cauchy são empregadas para a avaliação destes esforços.

EXEMPLOS

Exemplo 1: Viga em balanço em flexão pura

Uma viga em balanço sob ação de um momento concentrado na extremidade (M) foi esquematizada como mostra a Fig. 3, e analisada através da F.L.T. com uma discretização formada por um elemento cúbico, uma ordem de integração de Gauss 3x2x2 e 520 passos de carga iguais sem qualquer iteração de equilíbrio em cada passo. Este exemplo foi analisado por Surana [5], razão pela qual foram conservados os mesmos parâmetros por ele usados; módulo de elasticidade $E = 30 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0$, bases "b" e alturas "a" iguais a 1 cm, momento de inércia $I = 1/12 \text{ cm}^4$ e o comprimento $L = 12 \text{ cm}$.

A descrição e posições dos nós do elemento para as configurações inicial e deformadas da estrutura, correspondentes aos valores do parâme

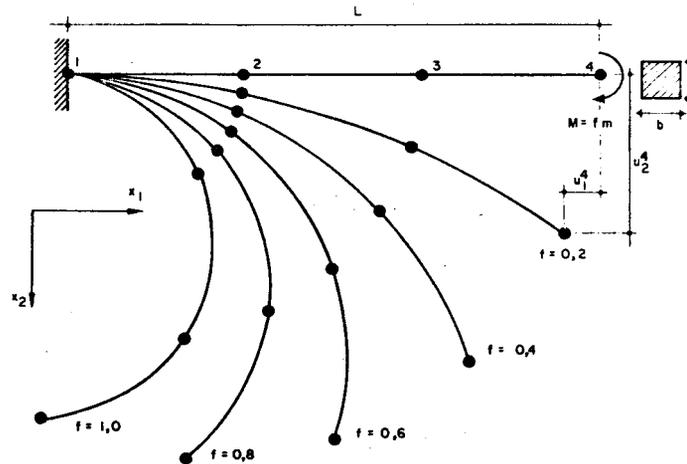


Fig. 3 Configurações da Estrutura para o Exemplo 1

tro de carga, $ML/\pi EI$, iguais a 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 e 1,0, estão expostos

na Fig. 3. Nas Fig. 4 e 5 são apresentados os gráficos para deslocamentos adimensionais nas direções horizontal e vertical e para a rotação da extremidade da viga, todos estes relacionados com o parâmetro de carga usado.

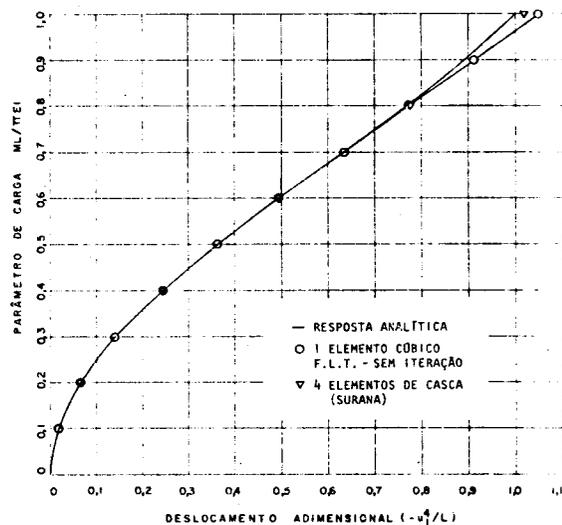


Fig. 4 Exemplo 1 - Deslocamento Horizontal

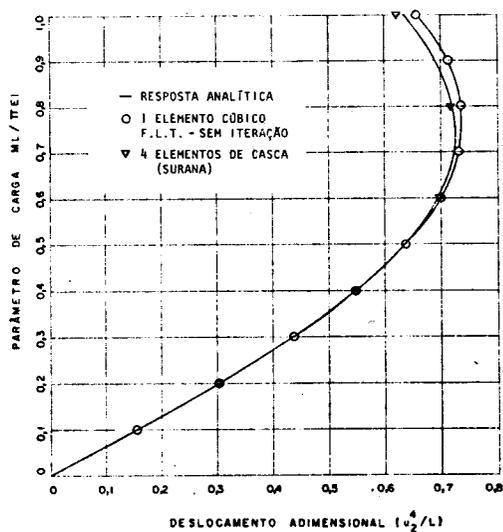


Fig. 5 Exemplo 1 - Deslocamento Vertical

A solução analítica, com a qual são comparados os resultados do programa, é baseada na observação que as configurações deformadas representam arcos de círculos, e pode ser obtida através de geometria elementar e da teoria de vigas. Os deslocamentos da extremidade obtidos analiticamente, são:

$$\frac{u_1}{L} = 1 - \frac{\text{sen}\theta}{\theta} \quad \text{e} \quad \frac{u_2}{L} = \frac{1}{\theta} (1 - \text{cos}\theta) \quad (16)$$

onde θ é o ângulo central correspondente à viga deformada. Também são apresentados os resultados obtidos por Surana [5], que resolveu este exemplo com uma discretização constituída por quatro elementos de casca.

Nota-se que as soluções encontradas pelo programa apresentam boa concordância com a resposta analítica para o parâmetro de carga f menor que 0,8, o que é razoável, pois para este valor de f a viga já se encontra bastante distorcida, como se pode ver na Fig. 3, e as funções de interpolação cúbicas não representam exatamente as relações (16), as quais envolvem as funções seno e cosseno. Para serem obtidos resultados mais exatos, para maiores valores de f , é preciso fazer uma discretização com mais elementos.

Exemplo 2: Pórtico espacial

Um pórtico espacial, em forma de tripé, foi idealizado como mostra a Fig. 6 onde é mostrada uma perspectiva isométrica do pórtico e uma vista superior. É formado por três barras, sendo duas engastadas inferiormente e a outra livre a rotação em torno do eixo coordenado x_1 , e livre a deslocamento na direção do eixo x_2 . A análise foi realizada com uma carga concentrada horizontal P , atuante no nó 4, na direção e sentido do eixo x_2 , através da F.L.T., com uma discretização formada por um elemento cúbico por membro e 600 passos de carga sem iterações de equilíbrio.

As configurações deformadas estão expostas na Fig. 7 para os valores 4, 16 e 40 do parâmetro de carga, PL^2/EI . Os resultados estão plotados na Fig. 8, onde são apresentadas as curvas que relacionam os deslocamentos adimensionais, $-u_3^0/L$ e u_4^2/L , com os diversos parâmetros de carga.

Exemplo 3: Frequências de vibração

Com a finalidade de avaliar as matrizes de rigidez e de massa implantadas para o elemento de viga no espaço, foram calculadas as frequências de vibração de uma viga em balanço, sendo empregada no primeiro caso uma seção quadrada e no segundo, uma seção retangular. Os parâmetros usados em ambos os casos foram: módulo de elasticidade $E = 2,1 \times 10^6$ Kgf/cm², coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$, fator de correção devido ao cisalhamento $k = 0,8333$, e comprimento da viga $L = 300$ cm. As dimensões para o caso de seções quadradas, foram de 13,16 cm para bases "b" e alturas "a", enquanto para as seções retangulares as bases mediam 30 cm e as alturas 10 cm. A discretização usada foi de 2 elementos cúbicos.

Os resultados foram comparados com as soluções analíticas apresentadas por Timoshenko, Young e Weaver [4], conforme a tabela I.

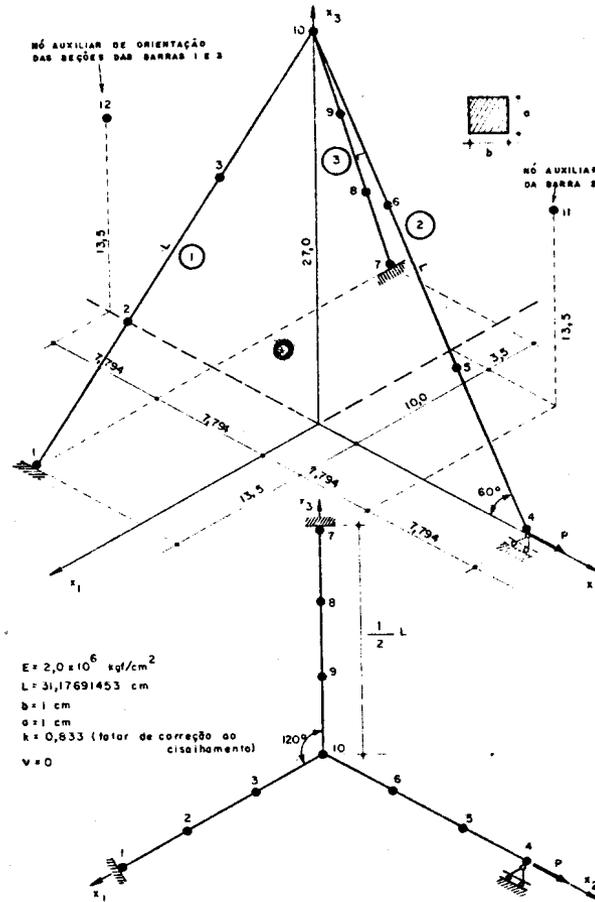


Fig. 6 Descrição da Estrutura para o Exemplo 2

Tabela I: Soluções analíticas para frequências (i=1,2,3...)

TRANSVERSAL	LONGITUDINAL	TORCIONAL
$\frac{K_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$	$\frac{2i-1}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$\frac{2i-1}{4L} \sqrt{\frac{GJ^*}{\rho I_p}}$

Na Tabela I, ρ é a densidade do material; as propriedades da seção são $A = \text{área}$, $I = \text{momento de inércia à flexão}$, $I_p = \text{momento de inércia polar}$, $J^* = \text{momento de inércia à torção}$; i é o índice de ordem da frequência; e K_i é calculado pela equação

$$\cos(K_i L) \cosh(K_i L) = -1$$

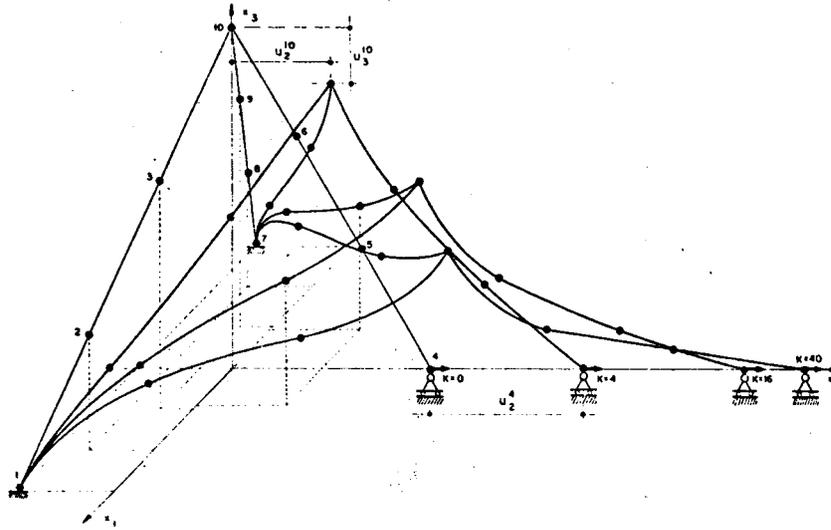


Fig. 7 Exemplo 2 - Configurações da Estrutura

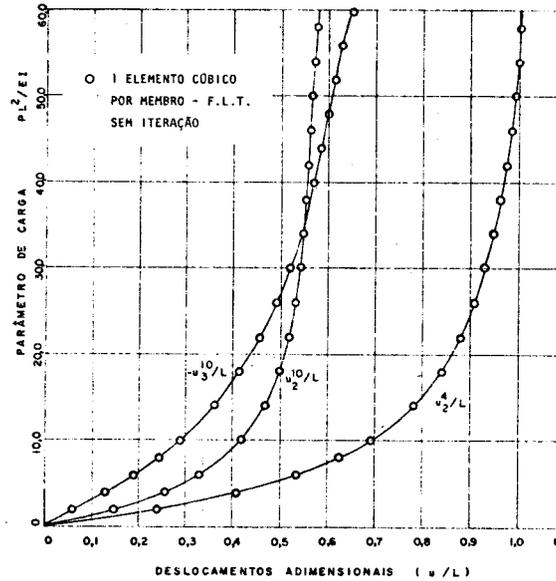


Fig. 8 Exemplo 2 - Curvas carga-deslocamentos

A fórmula para frequências de torção não foi obtida da literatura, mas reduz-se à de Timoshenko, Young e Weaver [4], no caso de seções circulares. Note-se, ainda, que as expressões analíticas são válidas para vigas esbeltas, desprezando a inércia rotatória e deforma-

ções de cisalhamento, efeitos levados em conta na solução computacional.

A matriz de massa utilizada neste exemplo é a chamada matriz de massa consistente, baseada nas mesmas funções de forma adotadas para descrever o campo de deslocamentos estático.

As tabelas II e III apresentam as respostas analíticas e computacionais para as dez frequências mais baixas computadas, com a identificação do tipo de modo de vibração, e a taxa de erro, em percentagem, da solução computacional em relação à calculada analiticamente. As frequências são apresentadas na ordem exposta pelo programa.

No caso de seção quadrada foi observada uma boa concordância entre as soluções apresentadas para as primeiras frequências correspondentes aos diversos modos de vibração. Os resultados apresentados para a seção retangular ($b/a = 3$) foram próximos aos analíticos para as frequências transversais e longitudinais, apresentando resultados de frequências torcionais insatisfatórios. Isto já era previsto, pois as funções de interpolação não envolvem efeitos associados ao empenamento das seções, levando portanto, a uma aproximação relativamente grosseira do comportamento de torção.

Note-se que com relação às frequências transversais e longitudinais mais altas, sua aproximação pode ser melhorada através do uso de um maior número de elementos. Já o erro na primeira frequência torcional não pode ser reduzido significativamente desta forma.

Tabela II. Comparação de Frequências - Seção Quadrada

MODO DE VIBRAÇÃO	TIPO	FRE QUÊNCIA		ERRO (%)
		ANALÍTICA	PROGRAMA	
1	(*)TRANSVERSAL	0,0342	0,0344	0,39
2	(*)TRANSVERSAL	0,0342	0,0344	0,39
3	TRANSVERSAL	0,2145	0,2249	4,84
4	TRANSVERSAL	0,2145	0,2249	4,84
5	TRANSVERSAL	0,6007	0,6742	12,23
6	TRANSVERSAL	0,6007	0,6742	12,23
7	(*)TORCIONAL	0,7015	0,6998	-0,24
8	(*)LONGITUDINAL	1,2076	1,2120	0,36
9	TRANSVERSAL	1,1772	1,5720	33,54
10	TRANSVERSAL	1,1772	1,5720	33,54

Tabela III. Comparação de Frequências - Seção Retangular

MODO DE VIBRAÇÃO	TIPO	FREQUÊNCIA		ERRO (%)
		ANALÍTICA	PROGRAMA	
1	(*)TRANSVERSAL Y	0,0260	0,0261	0,47
2	(*)TRANSVERSAL Z	0,0780	0,0778	-0,23
3	TRANSVERSAL Y	0,1630	0,1717	5,34
4	TRANSVERSAL Z	0,4890	0,4908	0,37
5	TRANSVERSAL Y	0,4564	0,5184	13,57
6	(*)TORCIONAL	0,4291	0,6998	63,09
7	(*)LONGITUDINAL	1,2076	1,2120	0,36
8	TRANSVERSAL Y	0,8945	1,2270	37,18
9	TRANSVERSAL Z	1,3693	1,3870	1,29
10	TORCIONAL	1,2872	2,1510	67,11

OBS: UNIDADE DE FREQUÊNCIA - CICLOS/SEGUNDO

(*) PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO, NUMA DETERMINADA DIREÇÃO, PARA CADA TIPO.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES

O Exemplo 3 mostra que o comportamento à torção foi deficiente, para seções retangulares com a relação entre lados muito diferente da unidade.

Na verdade, isto ocorreu porque o fator de correção ao cisalhamento k é baseado na calibragem do elemento (através da relação constitutiva, Eq. (14)) à situação de flexão simples. O valor $k = 0.8333$ (cujo inverso, $f = 1.2$, é mais usualmente encontrado em textos tradicionais) é por coincidência, apropriado para torção de uma seção quadrada.

Caso se buscasse melhorar a resposta em torção na seção retangular, seria necessário modificar o fator k . Com isso, no entanto, as frequências de flexão seriam afetadas. Por outro lado, o valor de k adequado para torção depende da relação entre os lados da seção.

Note-se, ainda, que no caso de elementos curvos não é possível, em geral, distinguir entre diferentes formas de vibração, não sendo possível tentar-se a adoção de valores de k diferentes de forma indireta, pela alteração da matriz B_L para graus de liberdade selecionados.

Os elementos de viga convencionais (p.e., em [6]) não apresentam tais dificuldades; entretanto, não se prestam tão bem a problemas de

grandes deslocamentos e grandes curvaturas.

Duas sugestões para melhorar o comportamento dos elementos Lagrangeanos paramétricos são expostas a seguir:

(1) Utilizar valores de k tabelados ou calculados em função da relação entre os lados da seção, válidos para torção. Desta forma, o elemento fica deficiente quanto ao efeito do cortante. Para vigas relativamente esbeltas, esta solução é satisfatória e envolve um mínimo de alterações na formulação e no algoritmo computacional; ou

(2) Executar uma integração analítica na seção, desprezando o efeito das curvaturas, de forma a separar o triplo produto $B_L^T C B_L$, no que tange ao cisalhamento, em duas parcelas, uma envolvendo o cortante a ou tra a torção. Isto é semelhante ao que se faz em cascas ao separar efeitos de flexão e membrana. Tal separação é possível aqui pois as tensões cisalhantes provenientes do cortante variam quadraticamente na seção, enquanto as provenientes da torção variam de forma linear. Isto, no entanto, iria requerer modificações de certa monta nos programas; além disso, ficaria prejudicada a capacidade de analisar problemas de grande curvatura.

REFERÊNCIAS

- [1] Sousa, E.M., "Análise Não-Linear de Pórticos Espaciais com Elementos Finitos de Curvatura e Espessura Variáveis", Tese de Mestrado, Depto de Engenharia Civil, PUC/RJ, abril de 1984.
- [2] Bathe, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.
- [3] Malvern, L.E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.
- [4] Timoshenko, S.P., Young, D.H., e Weaver, W., "Vibration Problems in Engineering", J. Wiley & Sons, 4ª Ed., New York, 1974.
- [5] Surana, K.S., "Geometrically Nonlinear Formulation for the Curved Shell Elements", Int. J. for Numerical Meth. in Engng., Vol. 19, 1983, pp. 581-615.
- [6] Przemieniecki, J.S., "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw Hill, New York, 1968.