

ANÁLISE NÃO-LINEAR GEOMETRICA DE ESTRUTURAS PELO MÉTODO  
DE SUPERPOSIÇÃO MODAL COM BASE LANCZOS-RITZ

Sérgio R. Pinheiro Medeiros - COPPE/UFRJ

Edison C. Prates de Lima - COPPE/UFRJ

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um procedimento para a análise não-linear geométrica de estruturas, utilizando o método de superposição modal. Os vetores de base empregados na transformação de coordenadas são gerados de uma forma não iterativa a partir de um algoritmo do tipo Lanczos.

No método de superposição modal tem sido tradicionalmente utilizado os autovetores como vetores de base. Este procedimento tem como principal inconveniente o elevado custo computacional, devido ao caráter iterativo da solução do problema de autovalor. A adoção de uma base de Ritz reduz drasticamente este custo sem afetar a precisão dos resultados.

O algoritmo proposto é aplicado na solução de problemas estruturais e comparado com o método de superposição modal clássico e com os métodos de análise não-lineares do tipo Newton-Raphson, ficando evidenciada a significativa eficiência do mesmo.

## 1. INTRODUÇÃO

A aplicação do Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) com utilização de técnicas incrementais-iterativas na análise estática não-linear geométrica de estruturas requer um esforço computacional sensivelmente maior que o necessário para a correspondente análise estática linear. A necessidade de realização de várias análises, durante as diversas etapas de um projeto, desencoraja a utilização mais frequente dessas técnicas não-lineares, devido aos altos custos envolvidos na solução dos problemas práticos.

Em consequência, nos últimos anos tem-se buscado métodos de análises mais eficientes para determinadas classes de problemas. Dentro deste enfoque, verificou-se que a análise de estruturas esbeltas (vigas, pórticos e placas) com comportamento pré-crítico fracamente não-linear pode ser satisfatoriamente realizada através de uma transformação de coordenadas que utilize os modos de flambagem do problema de autovalor correspondente [1]. Este método apresenta vantagens do ponto de vista do esforço computacional em relação aos métodos incrementais-iterativos tradicionais. No entanto, a solução de um problema de auto-valor envolve procedimentos iterativos que penalizam desnecessariamente a eficiência do mesmo.

O propósito deste trabalho é propor a construção de uma matriz de transformação de coordenadas constituída por uma base de vetores de Ritz gerados de uma forma não-iterativa através do algoritmo de Lanczos [2,3,4].

São apresentadas várias aplicações numéricas que permitem comparar os resultados obtidos com o procedimento proposto em relação ao método de superposição modal com matriz de transformação de autovetores e aos métodos incrementais-iterativos do tipo Newton-Raphson.

## 2. MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL (M.S.M.)

Usando o método dos elementos finitos para discretizar o contínuo, e expressando o campo de deslocamento  $\underline{U}$  em função dos "n" deslocamentos nodais  $\underline{r}$  tem-se:

$$\underline{U} = \underline{\phi} \underline{r}, \quad (1)$$

onde  $\underline{\phi}$  são funções de interpolação definidas separadamente sobre o elemento finito e satisfazendo as compatibilidades cinemáticas entre os elementos adjacentes do domínio.

As relações deformação-deslocamento em termos do M.E.F. são [1]

$$\underline{\varepsilon}(\underline{r}) = \underline{B}^0 \underline{r} + \underline{B}'(\underline{r}) \underline{r}, \quad (2)$$

onde  $\underline{\varepsilon}$  é o vetor que descreve o estado de deformação,  $\underline{B}^0$  é função de  $\underline{\phi}$  e  $\underline{B}'(\underline{r})$  é função de  $\underline{\phi}$  e  $\underline{r}$ .

A deformação virtual é [1]

$$\delta \underline{\varepsilon} = (\underline{B}^0 + 2\underline{B}'(\underline{r})) \delta \underline{r}. \quad (3)$$

Supondo-se o material elástico linear

$$\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\varepsilon}, \quad (4)$$

onde  $\underline{\sigma}$  é o vetor energeticamente conjugado a  $\underline{\varepsilon}$  que descreve o estado tensional e  $\underline{E}$  não é função de  $\underline{\varepsilon}$ . Levando-se em consideração (1) - (4) e o fato de  $\delta \underline{u}$  ser arbitrário, tem-se como consequência na aplicação do princípio dos trabalhos virtuais à estrutura

$$\int_V [\underline{B}^0 + 2\underline{B}'(\underline{r})]^t \underline{E} [\underline{B}^0 + \underline{B}'(\underline{r})] dv \underline{r} = \underline{R}, \quad (5)$$

onde  $\underline{R}$  são os campos de forças cinematicamente equivalentes às forças aplicadas  $\underline{F}$ .

A equação (5) traduz o equilíbrio entre as tensões internas e as forças aplicadas na configuração deformada.

Em seguida, admitindo-se a existência de uma família de carregamento  $\lambda \underline{R}$  [1], próximo de  $\lambda \underline{R}$ , cuja solução linear  $\lambda \underline{r}$ , também satisfaça à (5), dentro de uma faixa finita de valores de  $\lambda$ , pode-se representar  $\lambda \underline{R}$  como

$$\lambda \underline{R} = (\underline{R}_1 + \Delta \underline{R}). \quad (6)$$

Os verdadeiros deslocamentos, satisfazendo à (5), para o carregamento (6) podem ser escritos como

$$\underline{r}(\lambda) = \lambda \underline{r}_1 + \Delta \underline{r}. \quad (7)$$

como  $\underline{r}_1$ , simultaneamente, é solução linear e satisfaz (5) e levando em consideração que  $\|\underline{r}_1\| \gg \|\Delta \underline{r}\|$  (devido à proximidade de  $\underline{R}$  e  $\underline{R}_1$ ), a equação (5) pode ser reescrita como

$$\lambda \underline{K}_e \underline{r}_1 + \underline{K}_e \Delta \underline{r} + \lambda \underline{K}_g(\underline{\sigma}_1) \Delta \underline{r} = \lambda \underline{R}_1 + \lambda \Delta \underline{R} \quad (8)$$

onde

$$\underline{K}_e = \int_V \underline{B}^{ot} \underline{E} \underline{B}^o dv = \underline{K}_e^t \quad (9)$$

e

$$\begin{aligned} \underline{K}_g(\underline{\sigma}_1) \Delta \underline{r} &= 2 \int_V \underline{C}(\underline{\sigma}_1) \Delta \underline{r} dv = 2 \int_V \underline{B}^{t'}(\Delta \underline{r}) \underline{\sigma}_1 dv = \\ &= \underline{K}_g^t(\underline{\sigma}_1) \Delta \underline{r}. \end{aligned} \quad (10)$$

A terceira parcela do lado esquerdo de (8) representa o acoplamento não-linear dominante  $\underline{\sigma}_1$  e a mudança na geometria representada pelos deslocamentos  $\Delta \underline{r}$ .

$$\underline{r}(\lambda) = \lambda \underline{r}_L + \underline{r}_d,$$

onde  $\underline{r}_L$  é a solução estática linear para o carregamento  $\underline{R}$  e  $\underline{r}_d$  é uma parcela não-linear em  $\lambda$ .

Substituindo (11) em (8) chega-se a

$$\underline{K}_e \underline{r}_d + \lambda^2 \underline{K}_g(\underline{\sigma}_1) \underline{r}_L + \lambda \underline{K}_g(\underline{\sigma}_1) \underline{r}_d = 0. \quad (11)$$

Finalmente, levando em conta a proximidade de  $\underline{R}$  e  $\underline{R}_1$ , e fazendo uma mudança de coordenadas para a base modal em (12) encontra-se

$$\underline{r}(\lambda) = \lambda \underline{r}_L + \sum_{i=1}^P \underline{x}^i \gamma_i \quad (12)$$

onde,  $\underline{x}^i$  é o i-ésimo modo do problema de autovalor da flambagem linear, e P é o primeiro valor de i tal que

$$|\lambda_1/\lambda_i| \ll 1, \quad (\lambda_i = i\text{-ésimo autovalor}) \quad (13)$$

seja satisfeita e

$$\gamma_i = \left[ \frac{(\lambda/\lambda_i)}{1 - (\lambda/\lambda_i)} \right] \lambda \alpha_i, \quad \alpha_i = \underline{x}^{i^t} \underline{R} \quad (14)$$

### 3. GERAÇÃO DE BASE PARA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS

Neste método, somente os primeiros pares de autovalores significativos na representação de  $\underline{r}_d$  são calculados por uma análise de Rayleigh-Ritz [8] com a base de Ritz gerada pelo Método de Lanczos. Esse procedimento baseia-se na convergência da sequência de Krilov [4]

$$[\underline{Y}, \underline{K}_e^{-1} \underline{K}_g \underline{Y}, (\underline{K}_e^{-1} \underline{K}_g)^2 \underline{Y}, \dots, (\underline{K}_e^{-1} \underline{K}_g)^i \underline{Y}] \quad (15)$$

Para o autovalor correspondente ao menor autovalor de

$$\underline{K}_e \underline{X} = - \underline{K}_g \underline{X} \quad \Lambda, \quad (16)$$

dentre os que não são ortogonais a  $\underline{Y}$ , cabe ressaltar que os autoespaços ortogonais a  $\underline{Y}$  são também ortogonais ao sub-espaço gerado pelos vetores de (15), para qualquer valor de i [4], como consequência, observa-se que teoricamente não é possível detectar modos ortogonais a  $\underline{Y}$  no sub-espaço gerado por (15). É essa propriedade que torna o procedimento interessante, pois, fazendo-se  $\underline{Y} = \underline{r}_d$  o sub-espaço gerado por (15) só conteria modos não ortogonais a  $\underline{r}_d$ .

O método consiste, então, em adotar para vetor de partida uma aproximação de  $\underline{r}_d$ , tal como

$$\underline{y} = \underline{K}_e \underline{f} \quad (17)$$

onde  $\underline{f}$  deve ser um vetor próximo de  $\Delta R$ . Os demais vetores de Ritz são obtidos diretamente da sequência de Krilov,  $\underline{K}_e$ -ortonormalizando cada um deles em relação aos precedentes através da técnica de Gram-Schmidt.

Deste modo o algoritmo para determinação dos vetores de Ritz ( $\underline{Y}_i$ ) pode ser expresso pela sequência de operações,

$$\underline{\bar{Y}}_1 = \underline{Y} = \underline{K}_e \underline{f} \quad (18)$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\beta_1} \underline{\bar{Y}}_1, \quad \beta_1 = \left\| \underline{\bar{Y}}_1^t \underline{K}_e \underline{\bar{Y}}_1 \right\| \quad (19)$$

e

$$\underline{\bar{Y}}_i = \underline{K}_e^{-1} \underline{K}_g \underline{Y}_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, l \quad (20)$$

Para  $J = 1, \dots, i-1$  (21)

Compute  $\alpha_j = \underline{Y}_j^t \underline{K}_e \underline{\bar{Y}}_i$

$$\underline{\hat{Y}}_i = \underline{\bar{Y}}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \underline{Y}_j \quad (22)$$

$$\underline{Y}_i = \frac{1}{\beta_i} \underline{\hat{Y}}_i, \quad \beta_i = \left\| \underline{\hat{Y}}_i^t \underline{K}_e \underline{\hat{Y}}_i \right\| \quad (23)$$

Calculados os vetores  $\underline{Y}_i$ , procede-se uma análise de Rayleigh-Ritz neste espaço.

Utilizando-se este procedimento é possível conseguir uma base conveniente, que gere um espaço próximo do sub-espaço gerado pelos autovalores de interesse para ser utilizada como matriz de transformação no método de superposição modal.



	CASO b		CASO g	
MODO	$\lambda_i$		$\alpha_i$	
1	.433+01	-.602+01	.426+01	-.908+02
2	.883+01	.250-02	.865+01	.282.02
3	.109+02	.138+01	.992+01	.264+02
4	.119+02	-.662-03	.109+02	.424+01
5	.123+02	.957+00	.111+02	-.277-03

TABELA 1 - AUTOVALORES (SUB-ESPAÇOS)

	CASO b	CASO g
MODO	$\lambda_i$	$\alpha_i$
1	.433+01	.426+01
2	.109+02	.993+01
3	.123+02	.118+02
4	.568+02	.548+02
5	.214+03	.759+03

TABELA 2 - AUTO-  
VALORES (LANCZOS-RITZ)

CASO b DESLOCAMENTO HORIZONTAL Nº 7		
$\lambda/\lambda_1$	RITZ	SUB-ESPAÇOS
0.1	- 0.0099	- 0.0099
0.2	- 0.0222	- 0.0221
0.3	- 0.0377	- 0.0376
0.4	- 0.0581	- 0.0580
0.5	- 0.0863	- 0.0862
0.6	- 0.1281	- 0.1279
0.7	- 0.1970	- 0.1966
0.8	- 0.3333	- 0.3329
0.9	- 0.7392	- 0.7387

TABELA 3  
DESLOCAMENTOS

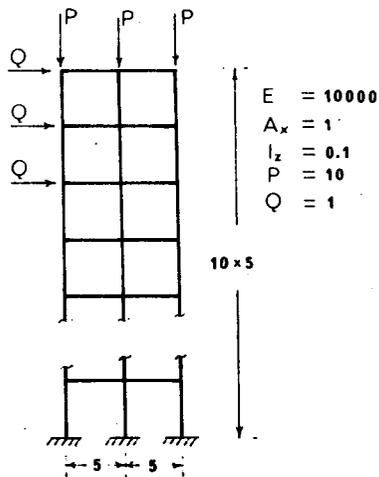
CASO g DESLOCAMENTO HORIZONTAL Nº 7		
$\lambda/\lambda_1$	RITZ	SUB-ESPAÇOS
0.1	- 0.1465	- 0.1464
0.2	- 0.3267	- 0.3267
0.3	- 0.5551	- 0.5550
0.4	- 0.8553	- 0.8551
0.5	- 1.2700	- 1.2696
0.6	- 1.8846	- 1.8840
0.7	- 2.8975	- 2.8966
0.8	- 4.9044	- 4.9032
0.9	-10.8820	-10.8805

TABELA 4  
DESLOCAMENTOS

O deslocamento transversal do nó 7 calculado pelas duas versões do M.S.M. são mostrados nas Tabelas 3 e 4 em função do parâmetro  $\lambda / \lambda_1$  ( $\lambda_1$  é o primeiro autovalor do problema de flambagem linear). Observa-se que não existe diferença significativa entre os resultados.

#### 4.2 - Pórtico Plano

Como segundo exemplo de aplicação é analisado o pórtico plano [5], representado na Figura 2, submetido ao carregamento indicado.



Método	Custo (%)
Ritz	100
Subespaços	670
Newton-Raphson	1180

Tabela 5  
Custos

Figura 2  
Pórtico Plano

Os resultados obtidos pelo M.S.M. usando-se como vetor de partida ( $\underline{Y}$ ) a resposta estática linear e 4 vetores de Ritz como base (L.R.), são confrontados com os obtidos pelo método Newton Raphson (N.R.). Apresentam-se através das Figuras 3 e 4, respectivamente, o deslocamento horizontal do topo do pórtico (Nó 33) e o momento de apoio (Nó 1) ambos em função do parâmetro  $\lambda / \lambda_1$ . Conforme se pode notar, verifica-se uma boa concordância entre os resultados dos métodos.

Na Tabela 5 compara-se o custo computacional, em termos de C.P.U. na determinação dos deslocamentos nodais da estrutura nos 9 incrementos de carga que foram utilizados para traçar o gráfico da Figura 5. Observa-se que o custo do procedimento proposto (L. R.) foi sensivelmente inferior ao do M.S.M. tradicional (I.T.) e do Newton-Raphson (N.R.).

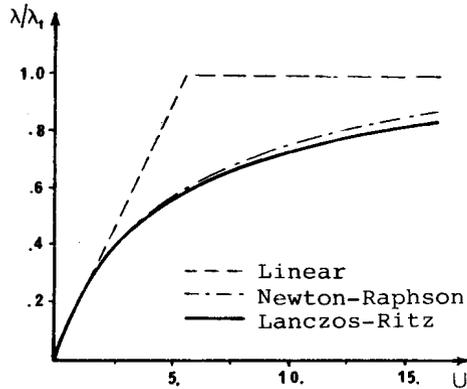


Figura 3  
Deslocamentos

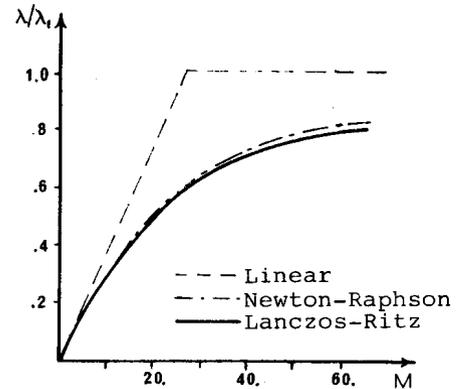


Figura 4  
Momentos

#### 4.3 - Torre Espacial Treliçada

A torre espacial treliçada da Figura 5 foi analisada por Rodrigo [6,7], através de diversos métodos de análise não-linear geométrica.

O carregamento a que a estrutura está submetida, foi dividido em 20 incrementos. Na Tabela 6, são apresentados os deslocamentos  $U$  (Direção  $x$ ) do nó 18 para cada acréscimo de carga, obtidos por Rodrigo em seu trabalho juntamente com os do M.S.M., usando como base 3 vetores de Ritz gerados a partir da solução  $l_1$

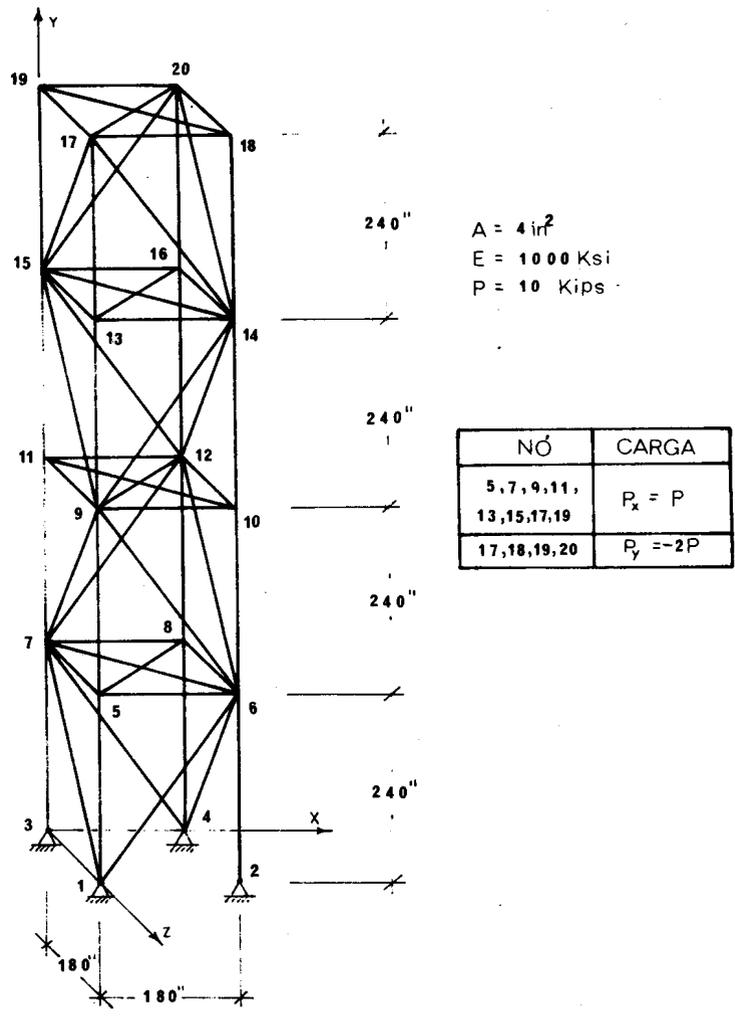


Figura 5  
Treliza Espacial

near. Nessa mesma Tabela também se encontram os custos computacionais e o erro para a carga total em cada método utilizado.

TABELA 6 - Deslocamentos  $u(in)$ , Erros e Custos dos Métodos

INCR.	P (KIPS)	M É T O D O				
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
2	1,0	12,01	12,01	11,83	11,91	12,01
4	2,0	24,71	24,71	24,26	24,60	24,72
6	3,0	38,17	38,17	37,32	38,04	38,19
8	4,0	52,44	52,44	51,06	52,30	52,50
10	5,0	67,63	67,63	65,50	67,46	67,34
12	6,0	83,82	83,82	80,70	83,63	84,09
14	7,0	101,70	101,13	96,68	100,91	101,46
16	8,0	119,70	119,70	113,49	119,43	120,20
17	8,5	129,51	129,51	122,22	129,21	130,11
18	9,0	139,69	139,39	131,16	139,37	140,42
19	9,5	150,28	150,28	140,33	149,92	151,14
20	10,0	161,31	161,31	149,73	160,91	162,43
ERRO (%)		0,00	0,00	-7,18	0,25	0,69
CUSTO (%)		1400	1300	500	600	100

- (1) Iterativo de Newton-Raphson;
- (2) Iterativo de Newton-Raphson Modificado;
- (3) Incremental Convencional;
- (4) Incremental Modificado;
- (5) Superposição Modal (Lanczos-Ritz).

Observa-se que o M.S.M. com 3 vetores Lanczos-Ritz apresenta neste exemplo, um erro desprezível e uma grande eficiência computacional.

## 5. CONCLUSÕES

Na prática, a análise estática não-linear geométrica de estruturas com a utilização de técnicas incrementais iterativas é bastante onerosa e muitas vezes inviável. O Método da Superposição Modal (M.S.M.) surgiu como uma opção mais eficiente computacionalmente na análise de estruturas esbeltas com comportamento pré-crítico fracamente não-linear. Porém o M.S.M. tradicional empregando, como matriz de transformação uma base de autovetores, requer a solução de um problema de autovalor que é responsável por uma grande parte do esforço da análise.

Desta forma, é proposto um método que possibilite a determinação de uma matriz de transformação, alternativa à matriz modal, com o objetivo de obter uma maior eficiência computacional. De fato, conforme pode ser concluído a partir dos resultados das aplicações apresentadas, o método proposto é extremamente eficiente na geração da base, proporcionando uma grande redução no esforço computacional, mantendo o mesmo nível de precisão nos resultados. Constitui, deste modo, uma ferramenta altamente atrativa para a solução de um expressivo número de casos práticos.

## 6. REFERÊNCIAS

1. - Nagy, D.A., König, M., Geometrically Nonlinear Finite Element Behaviour Using Buckling Mode Superposition, Int. J. of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.19, pp 447-484, 1979.
2. - Wilson, E.L., Yuan, M., Dickens, J.M., Dynamic Analyses by Direct Superposition of Ritz Vectors, Earthquake Engn. and Struct. Dynamics, Vol.10, pp.813-821, 1982.
3. - Nour.Omid, B., Clough, R.W., Dynamic Analysis of Structures Using Lanczos Coordinates, Earthquake Engn. and Struct. Dynamics, Vol.12, pp. 565-577, 1984.
4. - Parlett, B.N., The Symetric Eigenvalue Problem, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.

5. - Lima, E.C.P., Análise Estática de Estruturas com Não-Linearidade Geométrica pelo Método de Superposição Modal, I Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Trabalho 10, pp. 167-179, 1979.
6. - Codes, R.A., Formulações e Métodos de Solução na Análise Não-Linear de Treliças Espaciais, Tese de Mestrado, pp. 97-101, COPPE, 1978.
7. - Reilly, R.J., Sutton, E.L., An Iterative Solution for Geometrically Nonlinear Trusses, Computers and Structures, Vol.3, pp. 1053-1061, Pergamon Press, 1973.
8. - Bathe, K.J., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1976.