

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO  
PARA PLACAS CONTÍNUAS

João B. de Paiva

Wilson S. Venturini

Departamento de Estruturas. Escola de Engenharia de  
São Carlos.  
Universidade de São Paulo  
São Carlos - SP - Brasil

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma formulação do método dos elementos de contorno para análise de placas com apoios contínuos em seu domínio. A formulação das equações integrais do método é utilizada para a elaboração das expressões que permitem o cálculo dos efeitos das cargas lineares aplicadas no interior do domínio em análise. Com a discretização do contorno da placa o sistema de equações lineares obtido é modificado para a inclusão das incógnitas internas, permitindo assim a análise de placas contínuas. Exemplos analisados com o algoritmo proposto são comparados com soluções exatas para mostrar a qualidade dos resultados obtidos.

ABSTRACT

In this paper a boundary element formulation is presented for the analysis of plates with continuum internal supports. The integral equation formulation of the method is used to derive expressions for the determination of effects due to linear loads applied in the domain. After discretizing the plate boundary the obtained system of equations can be modified to include internal unknowns in order to allow continuum plate analysis. Examples solved with the proposed algorithm are compared with the exact solution to emphasize the quality of the results obtained.

## INTRODUÇÃO

A formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de placas tem sido, nos últimos anos, tema de trabalho de vários pesquisadores tais como: Altiero [1], Bézine [2], Stern [3] e Tottenham [4]. Vários outros trabalhos já foram elaborados a partir desses, com o objetivo claro de estender a formulação proposta para sua utilização em problemas práticos de engenharia.

Neste artigo é mostrada uma formulação do método dos elementos de contorno para sua utilização na análise de placas contínuas. Equações algébricas contendo incógnitas correspondentes a pontos do interior do domínio são elaboradas a partir das equações integrais de placas contendo termos adicionais para a modulação de cargas lineares. Dessa maneira evita-se a definição de subregiões que sempre levam a um aumento significativo do sistema a ser resolvido. De uma maneira similar a formulação proposta pode ser modificada para a modulação de apoios pontuais [5], permitindo-se, dessa maneira, sua utilização na análise de pavimentos de edifícios, inclusive os idealizados em laje cogumelo. Ainda são apresentados resultados de exemplos numéricos resolvidos comparando-se os valores obtidos com soluções teóricas, podendo-se assim verificar a precisão alcançada pelo algoritmo proposto.

## EQUAÇÕES INTEGRAIS

A representação integral dos deslocamentos de um ponto interno de uma placa definida por um domínio  $\Omega$  e limitada por um contorno  $\Gamma$  (Fig. 1), submetida a um carregamento distribuído "q" pode ser obtida a partir do teorema de Betti.

$$\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dV = \int_V \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} dV \quad (1)$$

onde  $V$  é o volume do sólido tridimensional em análise, e  $\sigma_{ji}$ ,  $\epsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}^*$  e  $\epsilon_{ij}^*$  representam os estados de tensão e deformação do problema real e do problema fundamental, respectivamente.

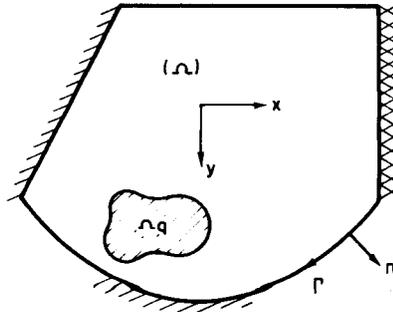


Fig. 1 - Placa em análise

A equação (1) pode ser transformada em uma relação integral sobre a área da placa, integrando-se ao longo da espessura da mesma,

$$\int_{\Omega} m_{ij} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} m_{ij}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} d\Omega \quad (2)$$

sendo  $m_{ij}$  a representação dos momentos fletores e volventes da placa e  $w$  o correspondente campo de deslocamentos transversais. Novamente o símbolo (\*) é empregado para indicar as soluções fundamentais do problema.

Integrando-se a equação (2) por partes e utilizando-se o conceito de Delta de Dirac para a integral de domínio que contém o termo  $w^*$  obtém-se,

$$\begin{aligned} w(p) + \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(p,S) w(S) - m_n^*(p,S) \frac{\partial}{\partial n} w(S) \right] d\Gamma(S) + \sum_{c=1}^N R^*(p,C) w(C) = \\ \int_{\Gamma} \left[ w^*(p,S) V_n(S) - \frac{\partial}{\partial n} w^*(p,S) m_n(S) \right] d\Gamma(S) + \sum_{c=1}^N w^*(p,C) R(C) + \\ \int_{\Omega_q} w^*(p,s) q(s) d\Omega(s) \end{aligned} \quad (3)$$

Na equação acima,  $m_n$  e  $V_n$  são momentos e reações distribuídos no contorno, enquanto que  $R$  corresponde às reações concentradas dos cantos.

Derivando-se a equação (3) com relação a um versor  $m$  qualquer obtém-se a expressão integral para o cálculo de rotações de um ponto interno dada pela seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} w(p) = - \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial m} V_n^*(p,S) w(S) - \frac{\partial}{\partial m} m_n^*(p,S) \frac{\partial}{\partial n} w(S) \right] d\Gamma(S) + \\ - \sum_{c=1}^N \frac{\partial}{\partial m} R^*(p,C) w(C) + \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial m} w^*(p,S) V_n(S) - \frac{\partial^2}{\partial m \partial n} w^*(p,S) m_n(S) \right] d\Gamma(S) + \\ + \sum_{c=1}^N \frac{\partial}{\partial m} w^*(p,C) R(C) + \int_{\Omega_q} \frac{\partial}{\partial m} w^*(p,s) q(s) d\Omega(s) \end{aligned} \quad (4)$$

Para pontos "P" do contorno as equações (3) e (4) continuam válidas desde que os termos  $w(P)$  e  $\partial/\partial m w(P)$  sejam multiplicados por  $C(P)$  e  $K(P)$ , respectivamente. Os valores  $C(P)$  e  $K(P)$  são obtidos de maneira análoga ao caso da elasticidade plana [5,6] e são iguais a 1/2 quando apenas uma tangente ao contorno pode ser definida no ponto.

#### INFLUÊNCIAS DE CARGAS DE DOMÍNIO

As equações (3) e (4), obtidas anteriormente, podem agora ser modificadas para incluir a influência de cargas distribuídas ao longo de linhas  $S$  definidas no interior do domínio  $\Omega$  (Fig. 2). A influência de

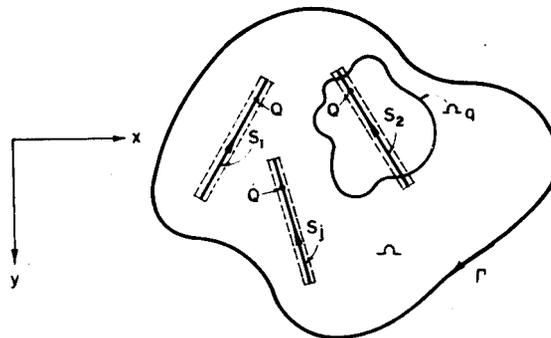


Fig. 2 - Linhas de carga no interior da placa.

tal carregamento é dada a partir das integrais de  $q$  sobre as áreas  $\Omega_q$  indicadas em (3) e (4). Considerando-se subregiões carregadas suficientemente estreitas para considerar  $w^*$  apenas dependente do eixo do carregamento, a equação (3) pode ser reescrita,

$$\begin{aligned}
 w(P) = & - \int_{\Gamma} \left[ V_n^*(p, S) w(S) - m_n^*(p, S) \frac{\partial}{\partial n} w(S) \right] d\Gamma(S) - \sum_{c=1}^N R^*(p, C) w(C) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left[ w^*(p, S) V_n(S) - \frac{\partial}{\partial n} w^*(p, S) m_n(S) \right] + \sum_{c=1}^N w^*(p, C) R(C) + \\
 & + \int_{\Omega_q} w^*(p, s) q(s) d\Omega(s) + \int_S w^*(p, Q) p(Q) dS(Q) \quad (5)
 \end{aligned}$$

onde  $p$  representam as cargas em linha distribuídas no interior da placa.

Analogamente, a equação para a representação das derivadas de  $w$  terá um termo adicional dado por:

$$\int_S \frac{\partial}{\partial m} w^*(p, Q) p(Q) dS(Q) \quad (6)$$

Deve ser ressaltado ainda a transformação da integral de domínio em integral de contorno [7], evitando-se integrais de área para a determinação das influências das cargas distribuídas.

#### EQUAÇÕES MATRICIAIS

Como é usual nas formulações do Método dos Elemento de Contorno, aproxima-se o contorno da placa por elementos para a integração dos termos em  $\Gamma$  indicados em (4) e (5), considerando-se ainda as variáveis correspondentes aos esforços e deslocamentos aproximados por funções interpoladoras previamente conhecidas. De uma maneira análoga as integrais sobre  $S$  são representadas pela soma das influências das car

gas sobre segmentos discretizados no interior da placa. Após a integração das soluções fundamentais e funções interpoladoras sobre os elementos de contorno e sobre os segmentos internos, as equações (4) e (5) para pontos de contorno, se transformam em um sistema de equações lineares dado pela seguinte forma matricial:

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{V} + \underline{S} \underline{P} + \underline{Q} \quad (7)$$

onde  $\underline{U}$  e  $\underline{V}$  são os vetores que contêm os valores nodais dos deslocamentos,  $w$  e  $\partial w/\partial n$ , e dos esforços  $V_n$  e  $m_n$ , do contorno.  $\underline{Q}$  representa a influência da carga uniformemente distribuída sobre a placa e  $\underline{P}$  contém os valores nodais das cargas de linhas no interior da placa.  $\underline{H}$ ,  $\underline{G}$  e  $\underline{S}$  são as respectivas matrizes de influências para deslocamentos, esforços e cargas lineares.

Os deslocamentos transversais em pontos do interior são analogamente dados por equações matriciais obtidas com a integração sobre os elementos:

$$\underline{W} = -\underline{H}' \underline{U} + \underline{S}' \underline{V} + \underline{S}' \underline{P} + \underline{Q}' \quad (8)$$

Para análise de placas isoladas o sistema dado em (7) é resolvido determinando-se as incógnitas de contorno e com os resultados obtidos, as equações algébricas dadas em (8) são utilizadas para o cálculo dos deslocamentos em pontos do interior. Momentos e cortantes são também dados por equações algébricas similares às dadas em (8).

No caso de placas com apoios contínuos internos  $\underline{P}$  é o vetor que contém as reações da vinculação, assim as equações (7) associadas às equações (8), correspondentes a pontos de apoio, definem um novo sistema.

$$\begin{bmatrix} \underline{H} & \underline{S} \\ \underline{H}' & \underline{S}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U} \\ -\underline{P} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{Q} \\ \underline{G}' & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{V} \\ -\underline{W} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{Q} \\ \underline{Q}' \end{Bmatrix} \quad (9)$$

onde  $\underline{I}$  é uma matriz unitária e  $\underline{W}$  contém os deslocamentos prescritos para o apoio.

De uma maneira análoga os problemas de apoios discretos podem ser equacionados compatibilizando-se os deslocamentos no ponto central da área de contato [5]. Neste caso, esforços em qualquer ponto interno da placa também são determinados após a resolução da equação (9). Este equacionamento permite o tratamento numérico de lajes com apoios lineares e discretos obtendo-se resultados bastante precisos, inclusive nos pontos próximos das vinculações.

#### EXEMPLOS NUMÉRICOS

Três exemplos numéricos foram resolvidos com a formulação proposta para a avaliação da qualidade dos valores obtidos.

##### - Placa apoiada no contorno com carregamento linear

Neste exemplo, uma placa quadrada com carga distribuída sobre a linha central e paralela aos lados é resolvida. Os lados da placa são iguais a  $2a$  e foram divididos em 10 elementos para a aproximação do

contorno. A função interpolação adotada para aproximar as variáveis de contorno foi linear, com nós definidos nas extremidades de cada elemento. Nas figuras 3 e 4 são dados, além da discretização adotada, os valores dos esforços e deslocamentos obtidos ao longo das linhas centrais paralelas aos lados da placa. Como pode ser observado, para a discretização adotada, a solução numérica praticamente coincide com os valores teóricos [8] com erros máximos no ponto central de 0,3% para os deslocamentos e 0,8% para os momentos.

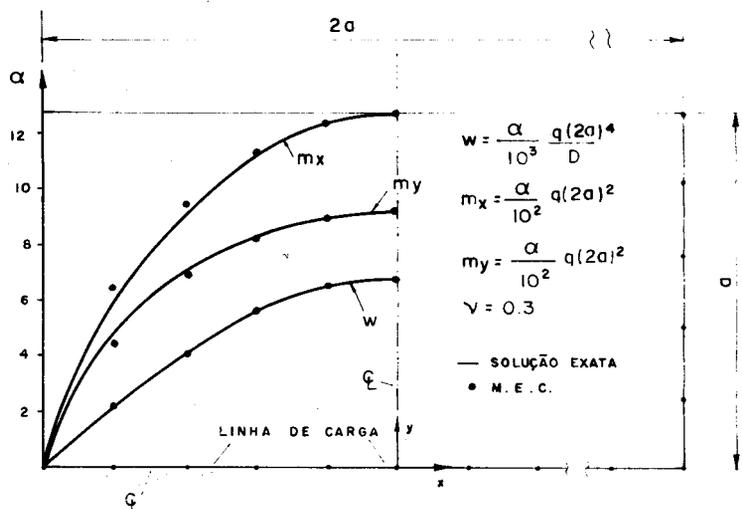


Fig. 3 - Momentos e deslocamentos na direção da linha de carga.

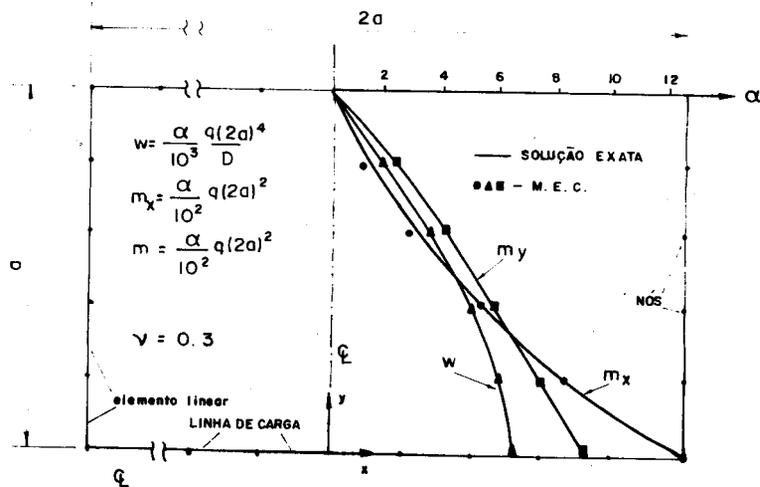


Fig. 4 - Momentos e deslocamentos na direção ortogonal à linha de carga.

- Placa com apoio contínuo interno

Neste exemplo a placa quadrada, analisada anteriormente, é modificada pela introdução de um apoio interno passando pelo centro e paralelo aos lados. O contorno da placa para este caso foi discretizado em segmentos de comprimento igual a  $a/6$ , assumindo-se variação constante para as variáveis  $w$ ,  $\partial w/\partial n$ ,  $V_n$  e  $m_n$ , ao longo de cada elemento. O apoio contínuo também foi discretizado com elementos de comprimento  $a/6$  e a mesma função interpoladora foi adotada para as reações internas. Apenas os deslocamentos no centro dos segmentos internos foram tomados iguais a zero, sendo que as derivadas na direção do apoio não tiveram nenhuma restrição.

Para uma distribuição constante de cargas sobre a placa e tomando-se o coeficiente de Poisson igual a  $1/6$ , os valores numéricos obtidos para deslocamentos e momentos são praticamente iguais aos valores teóricos [8] com erro máximo para os momentos igual a 0,09% no centro da placa. A figura 5 dá o diagrama de momentos calculado ao longo do apoio interno. Na mesma figura é também dada a solução obtida por séries de Fourier, empregando-se 100 termos.

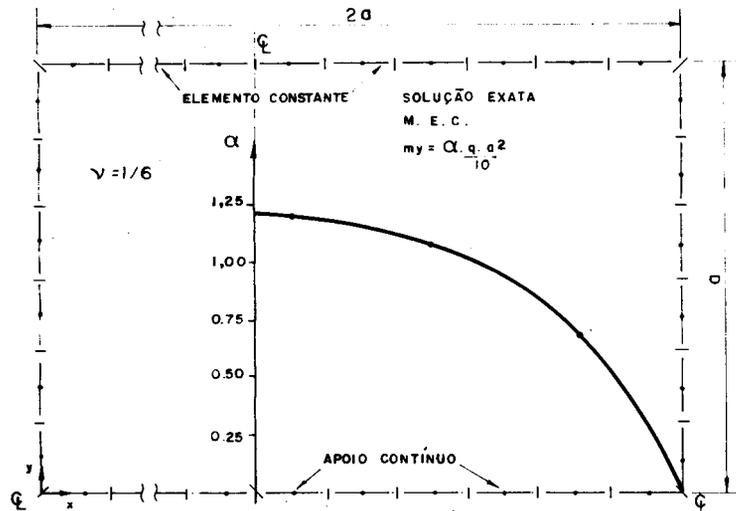


Fig. 5 - Valores numéricos e teóricos dos momentos sobre o apoio contínuo.

- Placa com apoios discretos

Um outro exemplo resolvido para a verificação da precisão dos valores numéricos calculados pelo algoritmo proposto é a análise de uma placa com lados apoiados e quatro apoios discretos internos. A placa mostrada na figura 6 foi discretizada com elementos de comprimentos iguais a  $a/10$ . As áreas de contacto definidas são quadradas, tendo, cada um de seus lados, comprimento igual a  $a/12$  e os respectivos centros geométricos estão definidos a distâncias iguais a  $a/3$  dos bordos mais próximos. A aproximação adotada para as variáveis de contorno (apenas  $w$  e  $V_n$ , neste caso) foi linear, admitindo-se continuidade entre elementos adjacentes.

Os resultados obtidos para a representação dos momentos da placa estão dados na tabela 1 juntamente com os valores teóricos calculados com 100 termos da série [8]. Além desses valores são apresentados os valores dos erros observados em cada um dos seis pontos indicados na figura 6.

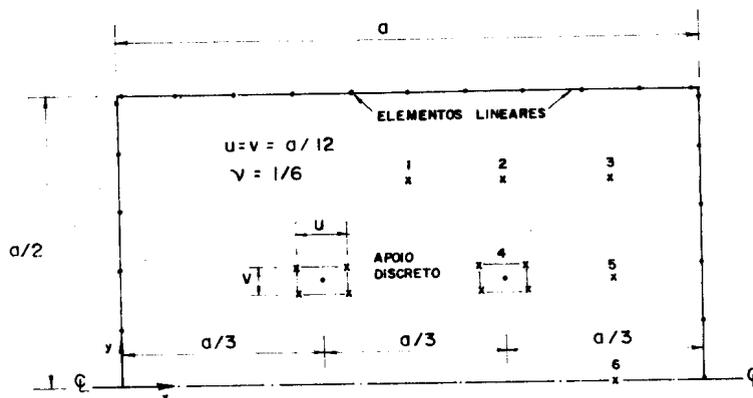


Fig. 6 - Placa com apoios internos. Geometria e Discretização.

Ponto	M.E.C.	TEOR.	Err. %	M.E.C.	TEOR.	Err. %	M.E.C.	TEOR.	Err. %
1	0,283	0,278	1,5	0,185	0,184	0,8	0,185	0,184	0,8
2	0,318	0,315	0,9	-0,361	-0,360	0,3	0,467	0,464	0,8
3	0,895	0,894	0,2	0,742	0,748	0,8	0,240	0,231	4,1
4	0,000	0,000	-	-1,491	-1,491	0,0	-1,491	-1,491	0,0
5	0,867	0,865	0,2	0,845	0,850	0,5	-0,255	-0,256	0,4
6	0,940	0,950	1,1	0,555	0,563	1,3	0,555	0,563	1,3

TABELA 1 - Soluções numérica e teórica para placa com apoios discretos

#### CONCLUSÕES

Os exemplos analisados mostraram que o algoritmo proposto para análise de placas com apoios internos, contínuos ou discretos, levam a resultados numéricos bastante precisos. É evitada a subdivisão da placa em regiões, eliminando-se assim desnecessárias aproximações ao longo dos apoios internos que aumentam o tamanho do sistema de equações e afetam a precisão dos resultados. O algoritmo é bastante adequado à análise de lajes de edifícios onde os efeitos dos apoios contínuos e discretos serão modelados com precisão.

#### REFERÊNCIAS

- [1] - Altiero, N.J. and Sikarskie, D.L. - "A Boundary Integral Method Applied to Plates of Arbitrary Plan Form", Comp. and Struct., Vol. 9, 1978, pp.163-168.
- [2] - Bézine, G.P. and Gamby, D.A. - "A New Integral Equation Formula tion for Plate Bending Problems", Proc. of the First Int. Sem. on Recent Advances in Boundary Element Methods, Pentech Press,

- 1978, pp. 327-342.
- [3] - Stern, M. - "A General Integral Formulation for the Numerical Solution of Plate Bending Problems", Int. J. Solids and Structures, Vol. 15, 1979, pp. 769-782.
  - [4] - Tottenham, H. - "The Boundary Element Method for Plates and Shells", In: Developments in Boundary Element Methods, ed. by Banerjee, P.K. and Butterfield, R., Appl. Sciences Publ., 1979.
  - [5] - Paiva, J.B. and Venturini, W.S. - "Boundary Element Algorithm for Building Floor Slab Analysis", Int. Conference on Boundary Element Techniques to be held in Adelaide, Australia, November, 1985.
  - [6] - Hartmann, F. - "Computing the C-Matrix in Non-Smooth Boundary Points", Proc. of the Second Int. Sem. on Recent Advances in Boundary Element Methods. CML Publ., 1980.
  - [7] - Paiva, J.B. e Venturini, W.S. - "Sobre a Integração de Cargas de Domínio para Análise de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno", Anais do V Congresso Latino Americano Sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 1984.
  - [8] - Timoshenko, S. and Woinowski-Krieger, S. - "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, 1959.