

RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULARES DE CONCRETO ARMADO COM
CONSIDERAÇÕES DE NÃO-LINEARIDADES GEOMÉTRICA E FÍSICA.

Helmany Murтинho Filho
Universidade Gama Filho
NATRON Consultoria e Projetos
Rio de Janeiro - Brasil
Vicente C. Moreira de Souza
Universidade Federal Fluminense
Niterói - Brasil

RESUMO

Este trabalho mostra a resolução de pórticos de concreto armado, onde considera-se que o material não segue a lei de Hooke e que as deformações na estrutura produzem modificações nos esforços. Para isto, desenvolveu-se um método iterativo que, a cada iteração, utiliza os resultados anteriores para modificar as matrizes de rigidez das barras.

Assim, foi desenvolvido um programa, em BASIC, onde as modificações nas matrizes de rigidez das barras são obtidas considerando-se que a inércia varia ao longo da barra, devido à fissuração, que o módulo de elasticidade não é constante, e que o eixo da barra não é mais retilíneo e, portanto, as seis coordenadas (normal, cortante e momento fletor) estão acopladas.

ABSTRACT

This paper shows the resolution of framed concrete structures, in which it is considered that the material does not obey Hooke's law and that deformations on the structure cause changes on the member-end actions. An iterative method was developed so that, at each iteration, results of the previous resolution are used, in order to modify the member stiffness matrices.

In order to do this, a computer program was developed, in BASIC, in which the modified member stiffness matrices are obtained considering that moment of inertia varies through the members' length, due to cracking, the elasticity modulus is not constant and the members' axes are not straight lines, causing the coupling of the six joint coordinates.

INTRODUÇÃO

Devido aos recentes avanços que vêm sendo obtidos nas técnicas de resolução de estruturas em computadores, utilizando-se o método da rigidez, torna-se possível a substituição das hipóteses simplificadoras normalmente adotadas [1,2] por outras que traduzam melhor o comportamento da estrutura. Neste trabalho procura-se estabelecer a sistemática de cálculo que considera tanto o comportamento não linear do concreto armado, como os efeitos de segunda ordem decorrentes da interação entre esforço normal e momento fletor nas barras.

Considerando-se que vem sendo dado grande impulso à utilização de micro-computadores na solução de problemas estruturais, objetiva-se aqui obter uma solução para a estrutura utilizando-se apenas as técnicas simples e correntes da análise matricial [3,4] e do dimensionamento de concreto armado [5,6,7].

Tendo em vista que a consideração de não linearidade inviabiliza as técnicas usuais de resolução de estruturas, uma vez que não é mais válido o princípio da superposição de efeitos, a solução é dada através de uma sucessão de cálculos em regime linear onde, a cada passo, são corrigidas as características das barras devido aos efeitos não lineares.

A correção das características das barras se traduz em modificações intriduzidas nas suas matrizes de rigidez, o que será conseguido através da obtenção destas matrizes considerando-se a barra com eixo não retilíneo e com rigidez variável. A solução dos esforços na barra é encontrada utilizando-se a própria técnica da análise matricial, que fornece a matriz de rigidez da barra com a consideração das não linearidades e do acoplamento entre suas seis coordenadas.

Dentro do acima exposto, pode-se assinalar as principais características do processo como:

- utilização apenas das técnicas da análise matricial de estruturas, o que possibilita o uso de micro-computadores;
- consideração do acoplamento entre as seis coordenadas locais na matriz de rigidez da barra;
- possibilidade de aumento da precisão na obtenção da matriz de rigidez da barra através do aumento do número de subdivisões, sem aumentar o número de incógnitas da estrutura.

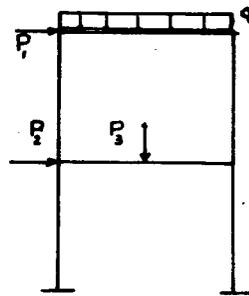
DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Ao analisar-se uma estrutura plana, reticulada, de concreto armado, submetida a um carregamento genérico, estabelece-se, para o método da rigidez na fase elástica, um sistema de coordenadas para os graus de liberdade ativos dos nós da estrutura, como mostram as figuras 1.

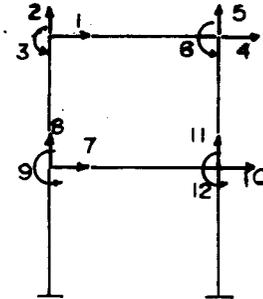
Desta forma, pode-se determinar a matriz de rigidez da estrutura, $[K]$, segundo tais coordenadas, supondo-se um comportamento elástico linear para todas as barras da estrutura. A redução do carregamento aos nós da estrutura conduz ao vetor $\{F\}$, que é o carregamento expresso nas coordenadas nodais. Assim, a equação básica de equilíbrio do sistema pode ser definida por [3]

$$\{F\} = [K] \cdot \{x\} \quad (1)$$

onde $\{x\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais.



(a)-Estrutura reticulada



(b) Sistema de coordenadas

Figura 1.

A resolução do sistema expresso pela equação (1) leva a uma posição de equilíbrio deformado da estrutura, e pode-se verificar que, nesta situação, duas hipóteses básicas utilizadas no estabelecimento de $[K]$ deixaram de existir: a) as seções das barras estão fissuradas e, portanto, EI não é constante, onde E é o módulo de Young e I é o momento de inércia da seção; e b) as barras não possuem eixo retilíneo, ocasionando um acoplamento generalizado entre as coordenadas locais, como mostra a figura 2.

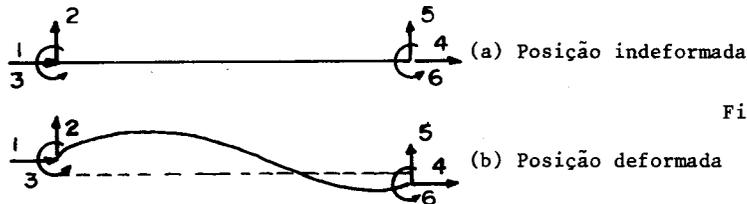


Figura 2

Ao se restabelecer a matriz de rigidez, considerando-se a fissuração de seções da barra, e que seu eixo não é retilíneo, obtém-se uma matriz $[K'] \neq [K]$ e tem-se que

$$\{F\} \neq [K'] \cdot \{x\} \quad (2)$$

e, desta forma, a posição de equilíbrio deformado obtida não é real.

Aplicando-se os deslocamentos nodais obtidos em $[K']$, tem-se:

$$[K'] \cdot \{x\} = \{F'\} \neq \{F\} \quad (3)$$

$$\{\Delta F_1\} = \{F\} - \{F'\} \quad (4)$$

A existência de $\{\Delta F\}$ obriga a estrutura a procurar uma nova posição de equilíbrio deformado, calculando-se $\{\Delta x_1\}$ pela aplicação de $\{\Delta F_1\}$ e $[K']$ na equação (1) e somando-se a $\{x\}$.

O processo continua obtendo-se uma nova matriz de rigidez, $[K''] \neq [K']$, visto que os esforços e as deformações nas barras estão modifica

A convergência de $\{x\} + \{\Delta x_1\} + \{\Delta x_2\} + \dots + \{\Delta x_n\}$ para um valor finito indicará a estabilidade do sistema, ficando determinada a deformada e os esforços internos da estrutura, considerando-se a não-linearidade elástica e a não-linearidade geométrica.

Notando-se que

$$\{\Delta x_1\} = [K']^{-1}\{\Delta F_1\} \quad (5a)$$

$$\{\Delta x_1\} = [K']^{-1}\{F\} - [K']^{-1}\{F'\} \quad (5b)$$

$$\{\Delta x_1\} = [K']^{-1}\{F\} - [K']^{-1} [K'] \{x\} \quad (5c)$$

$$\{x\} + \{\Delta x_1\} = [K']^{-1} \{F\} \quad (5d)$$

pode-se estabelecer que

$$\{x\} + \{\Delta x_1\} + \{\Delta x_2\} + \dots + \{\Delta x_n\} = [K^n]^{-1}\{F\} \quad (6)$$

e, desta forma, a obtenção da posição de equilíbrio final, se existir, resume-se à obtenção das matrizes $[K']$, $[K'']$, ..., $[K^n]$ da estrutura de formada, às quais serão aplicados os esforços $\{F\}$, invariantes.

Para se determinarem $[K']$, $[K'']$, ..., considerando-se a fissura - ção da seção e que o eixo da barra não é retilíneo, divide-se a barra em um certo número de intervalos, representando-se o eixo pelos pontos 1, 2, ..., n, como mostra a figura 3. A variação da rigidez eq barra se rá obtida pela determinação da rigidez de cada intervalo, I, II,, considerando-se a seção fissurada e os esforços solicitantes no ponto médio do intervalo.

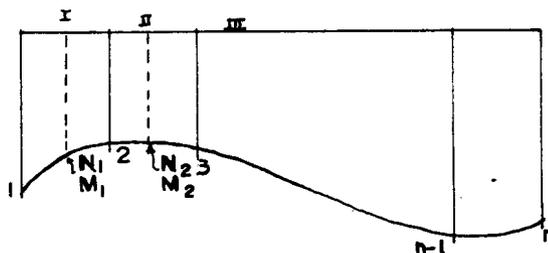


Figura 3 - Subdivisão de uma barra da estrutura.

RIGIDEZ DE UMA SEÇÃO DE CONCRETO ARMADO

Curvatura de uma seção qualquer

Seja uma seção de uma barra, de material qualquer, submetida à flexão simples. Considerando-se válido que as seções permanecem planas, a configuração deformada da barra é a mostrada na figura 4.

Sendo ρ o raio de curvatura e k a curvatura da seção, tem-se, da figura 4, que

$$1/\rho = k = \Delta\theta/\Delta x \quad (7)$$

Como $\Delta x_1 = z \Delta \theta$ (8)

então, $k = \epsilon_1/z = (\epsilon_1 + |\epsilon_2|)/h$ (9)

Rigidez de uma seção qualquer de concreto armado

Seja a seção de uma barra de concreto armado representada na figura 5.

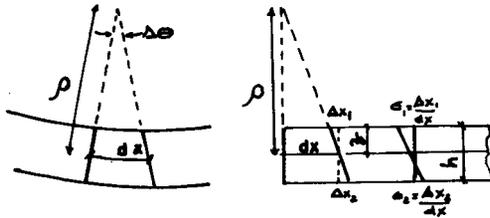


Figura 4 - Deformada.

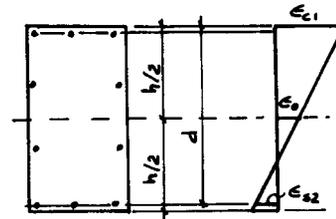


Figura 5 - Deformação em uma seção de barra.

Aplicando-se o conceito de curvatura, tem-se que

$$k = \frac{\epsilon_{c1} - \epsilon_0}{h/2} = \frac{\epsilon_{c1} + |\epsilon_{s2}|}{d} \quad (10)$$

Admitindo-se conhecidas a geometria e a armadura da seção, e os esforços externos M e N, é possível determinar k e ϵ_0 pelo processo de Newton-Raphson [8] fazendo-se:

- adotam-se valores iniciais ϵ_{0i} e k_i ;
- com estes valores iniciais, calculam-se N_0 e M_0 ;
- aplica-se um incremento $\Delta \epsilon$ a ϵ_0 e calculam-se N_ϵ e M_ϵ ;
- aplica-se um incremento Δk a k e calculam-se N_k e M_k ;
- calculam-se as variações

$$dN = N - N_0$$

$$dM = M - M_0$$

$$\frac{\partial N}{\partial \epsilon_0} = (N_\epsilon - N_0)/\Delta \epsilon_0 \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial \epsilon_0} = (M_\epsilon - M_0)/\Delta \epsilon_0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial N}{\partial k} = (N_k - N_0)/\Delta k \quad ; \quad \frac{\partial M}{\partial k} = (M_k - M_0)/\Delta k$$

- monta-se o sistema de equações

$$\begin{Bmatrix} dN \\ dM \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial N/\partial \epsilon_0 & \partial N/\partial k \\ \partial M/\partial \epsilon_0 & \partial M/\partial k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_0 \\ dk \end{Bmatrix} \quad (12)$$

-solucionando-se o sistema de equações, obtém-se os incrementos $d\epsilon_0$ e dk que, aplicados às variáveis, vão produzir uma aproximação dos

esforços solicitantes. Sendo:

$$= \quad + d \quad ; \quad k = k_i + dk \quad (13)$$

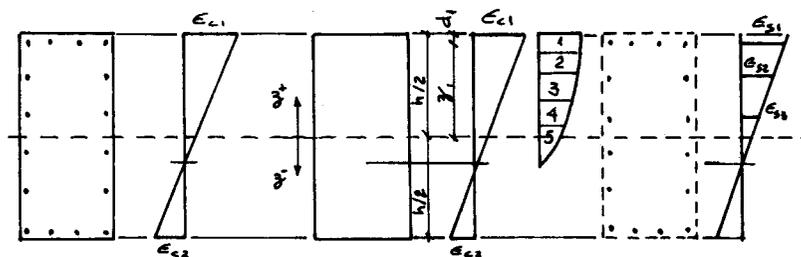
obtem-se N e M . Caso $N_1 \neq N$ ou $M_1 \neq M$, deve ser feita nova iteração com ϵ_{01} no lugar de ϵ_{0i} , k_1 no lugar de k_i , M_1 no lugar de M_0 e N_1 no lugar de N_0 . Caso $N_1 \approx N$ e $M_1 \approx M$, o processo será encerrado e a rigidez da seção será dada por

$$EI = M/k_1 \quad ; \quad EA = N/\epsilon_{01} \quad (14)$$

Este processo está contido na subrotina RIGID (ver fluxograma condensado).

Determinação dos esforços internos em uma seção de concreto armado

Para se determinar a rigidez da seção, faz-se necessário calcular os esforços internos, fletor e normal, o que pode ser feito a partir de valores conhecidos de ϵ e k , bem como da geometria da seção e das características mecânicas dos materiais utilizados. Para esta determinação, decompõe-se a seção em parcelas, concreto e aço, como mostra a figura 6, e utilizam-se as equações (15) e (16).



(a)-Seção Original

(b)-Concreto

(c)- Aço

Figura 6 - Decomposição da Seção

$$N = N_c + N_s \quad ; \quad M = M_c + M_s \quad (15)$$

$$N_c = \sum \Delta A_{ci} \sigma_{ci} \quad ; \quad M_c = \sum N_{ci} z_i \quad (16)$$

$$N_s = \sum \Delta A_{si} \sigma_{si} \quad ; \quad M_s = \sum N_{si} z_i$$

onde o esforço normal positivo é o de compressão e o momento fletor positivo é aquele que traciona as fibras inferiores da seção.

Este cálculo está contido na subrotina ESFINT.

A decomposição da seção em diversas parcelas é efetuada pela subrotina DECOMP, para cuja utilização torna-se necessário estabelecer o número ideal de parcelas, o que será feito separadamente para cada material.

Decomposição da seção de concreto

Como hipóteses básicas serão consideradas que não existirão tensões de tração no concreto e que as tensões de compressão seguem o diagrama tensão-deformação recomendado por Fusco [6] e mostrado na figura 7.

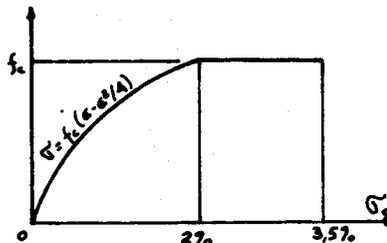


Figura 7 - Diagrama Tensão-Deformação no Concreto
(f_c = tensão de trabalho do concreto)

A parcela entre 2% e 3,5% será sempre decomposta em um único elemento, enquanto que o trecho parabólico, 0 a 2%, será decomposto em um certo número n de intervalos. De forma a se determinar o melhor valor para n , seja o diagrama parabólico aplicado sobre uma seção de largura unitária, e de altura total também unitária, como mostra a figura 8.

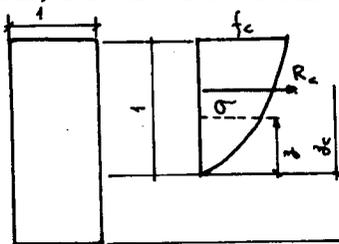


Figura 8 - Diagrama Parabólico de Tensões - $b_w = 1$

A resultante de tensões, R_c , pode ser determinada por:

$$R_c = \int_0^1 \sigma \cdot dz = \int_0^1 f_c \left(\frac{z}{z_c} \right)^2 dz = \frac{2}{3} f_c \quad (17)$$

e a posição da resultante, z_c , vem de:

$$z_c = \frac{\int_0^1 \sigma z \cdot dz}{\int_0^1 \sigma dz} = \frac{5}{8} \quad (18)$$

Com as expressões (17) e (18) determinadas, passa-se a dividir a parábola em intervalos, supostos cada um deles com tensão constante e igual à tensão no seu ponto médio. Para cada número de intervalos calculam-se R_c e z_c , os quais serão comparados com (17) e (18).

Assim, para $n=2$, os valores de R_c e z_c são, respectivamente, $0,688 f_c$ e $0,591$; para $n=4$, $R_c = 0,672 f_c$ e $z_c = 0,616$; e, para $n=5$, $R_c = 0,670 f_c$ e $z_c = 0,619$, com um erro menor que 1% em relação aos valores exatos. Desta forma, a parcela de concreto da seção transversal da barra será decomposta segundo mostra a figura 9.

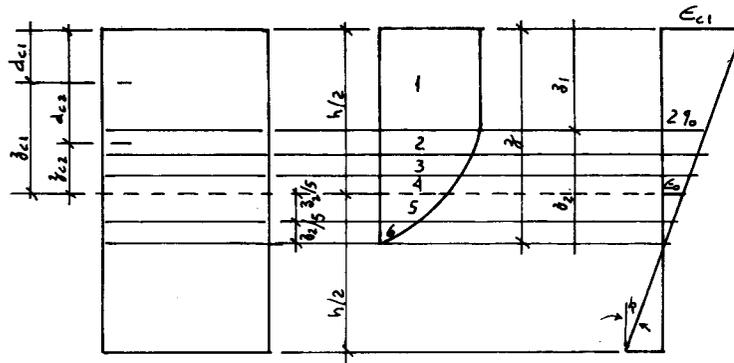


Figura 9 - Decomposição do Diagrama de Compressão do Concreto.

Decomposição da Armadura

Seja a armadura da seção transversal da barra composta de três parcelas, como está mostrado na figura 10. Para efeitos de decomposição, A_{s1} e A_{s2} serão considerados como uma única parcela, cada uma delas, devido à estarem submetidas a tensões constantes. Para a decomposição de A_{s3} , aplica-se raciocínio análogo ao utilizado na decomposição da seção de concreto, considerando-se que a variação de tensões na armadura segue leis mais favoráveis que a parabólica, ou seja: variação linear nos aços classe A e linear-parabólica nos aços classe B.

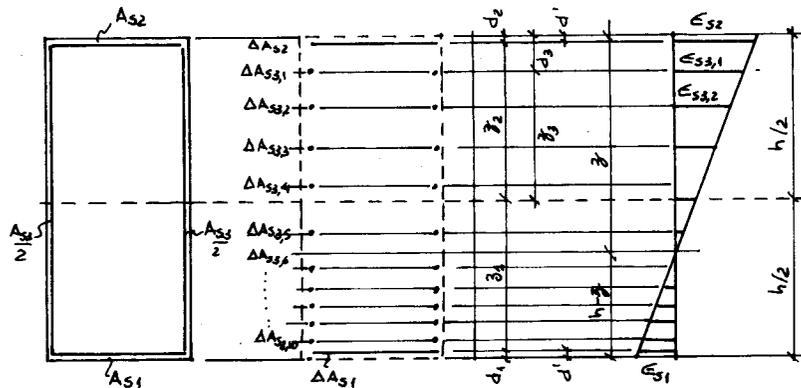


Figura 10 - Decomposição da Armadura

Assim, serão utilizados cinco (5) intervalos para a parcela com - primida de A_{s3} e cinco (5) intervalos para a parcela tracionada. O dia grama tensão-deformação a ser considerado será o do item 7.2 da NB-1 [5], adotando-se a tensão de escoamento igual à tensão característica

do aço.

Determinação numérica das parcelas a partir de ϵ_0 e k

Da figura 9 pode-se obter as expressões gerais. Para o concreto, tem-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_{c_1} &= \epsilon_0 + k.h/2 \leq 3,5 \\ z &= \epsilon_{c_1}/k \quad ; \quad z_1 = (\epsilon_{c_1} - z)/k \end{aligned} \quad (19)$$

onde ϵ é positivo para um encurtamento.

Como, no caso geral, a configuração de deformação pode estar nos Domínios 1 ou 5, segundo definido pela NB-1 [5], alguns testes devem ser feitos na programação, que estão definidos pela equação (20).

$$\begin{aligned} z < 0 &\rightarrow z_1 = 0, \quad z_2 = 0 \\ 0 \leq z < h &\begin{cases} \epsilon_{c_1} > 2,0 \rightarrow z_1 = (\epsilon_{c_1} - 2)/k ; z_2 = z - z_1 \\ \epsilon_{c_1} < 2,0 \rightarrow z_1 = 0 ; z_2 = z \end{cases} \\ x > h &\begin{cases} \epsilon_{c_1} > 2,0 \rightarrow z_1 = (\epsilon_{c_1} - 2)/k \leq h ; z_2 = h - z_1 \\ \epsilon_{c_1} < 2,0 \rightarrow z_1 = 0 ; z_2 = h \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

Para o aço tem-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_{s_1} &= \epsilon_{c_1} - k.(h-d') \geq -10,0 \\ \Delta A_{s_1} &= A_{s_1} \\ \Delta A_{s_2} &= A_{s_2} \\ \Delta A_{s_{3,1}} &= \dots = \Delta A_{s_{3,5}} = [A_{s_3} . (z-d') / (h-2d')] / 5 \\ \Delta A_{s_{3,6}} &= \dots = \Delta A_{s_{3,10}} = [A_{s_3} . (h-z-d') / (h-2d')] / 5 \\ z_{s_i} &= h/2 - d_{s_i}, \quad i = 1 \text{ a } 12 \end{aligned} \quad (21)$$

Como, para o concreto, devem ser feitos os seguintes testes:

$$\begin{aligned} z < d' &\rightarrow z = d' \\ z > h - d' &\rightarrow z = h - d' \end{aligned} \quad (22)$$

As decomposições das parcelas de aço e do concreto estão resolvidas na subrotina DECOMP, que é complementada pela subrotina DEFORM, cuja finalidade é a aplicação da expressão

$$\epsilon_i = \epsilon_0 + k.z_i \quad (23)$$

Os valores das tensões no concreto (σ_{ci}) e no aço (σ_{si}) são obtidos a partir de ϵ_{ci} , através do diagrama tensão-deformação σ_{ci} da figura 7, e de ϵ_{si} , através dos diagramas tensão-deformação indicados na NB-1, item 7.2 [5], pela subrotina TENSA.

OBTENÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA BARRA COM EIXO NÃO RETILÍNEO

Conhecidas as rigidezes EJ e EA de cada trecho de uma barra qualquer, dividida em n trechos, e supondo-se conhecidos os deslocamentos de extremidade aplicados à barra, a partir da etapa anterior de cálculo da estrutura, os quais, juntamente com o carregamento aplicado a esta barra provocam a configuração não linear mostrada na figura 11, pode-se obter a nova matriz de rigidez da barra da forma seguinte:

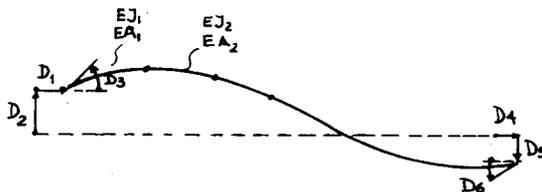


Figura 11 - Configuração Deformada da Barra

- monta-se a matriz de rigidez da barra retilínea, a partir das matrizes de rigidez de cada trecho;

- aplicam-se à barra os deslocamentos de extremidade D_1, D_2, \dots, D_6 , e o seu carregamento, obtendo-se a configuração deformada através da determinação dos deslocamentos dos nós intermediários. Aqui são obtidos ainda os esforços em cada trecho da barra que, levados à subrotina RIGID, atualiza os valores de EJ e de EA em cada trecho;

- monta-se a matriz de rigidez da barra a partir das matrizes de rigidez dos trechos, considerando-se a posição deslocada de cada nó intermediário e os valores atualizados de EJ e de EA;

- aplica-se um deslocamento de extremidade, ΔD_1 , obtendo-se os esforços de extremidade, E_1 a E_6 , mediante a utilização da subrotina SOLVE. A primeira coluna da matriz de rigidez nas coordenadas de extremidade 1 a 6 é obtida por

$$k_{ij} = E_i / \Delta D_i \quad (24)$$

- repete-se o item anterior para ΔD_2 a ΔD_6 , de forma a se obter as demais colunas da matriz de rigidez.

Uma vez obtidas as matrizes de rigidez das barras, monta-se a matriz de rigidez da estrutura através do Método da Rigidez Direta [3,4] e resolve-se a estrutura, o que está contido na subrotina SOLVE.

CONCLUSÕES

Foi apresentado um processo iterativo para resolução de estruturas planas reticuladas de concreto armado, com consideração de não-linearidades física e geométrica. Suas principais características consistem em considerar o acoplamento entre as seis coordenadas locais da matriz de rigidez das barras, assim como a variação de rigidez da seção ao longo da barra. Foi elaborado um programa, em linguagem BASIC, destinado ao uso em micro-computadores, cujos resultados apresentaram consistência satisfatória com os de outros programas do gênero [1] e com resultados de ensaios [9]. Deve-se ressaltar que a consideração

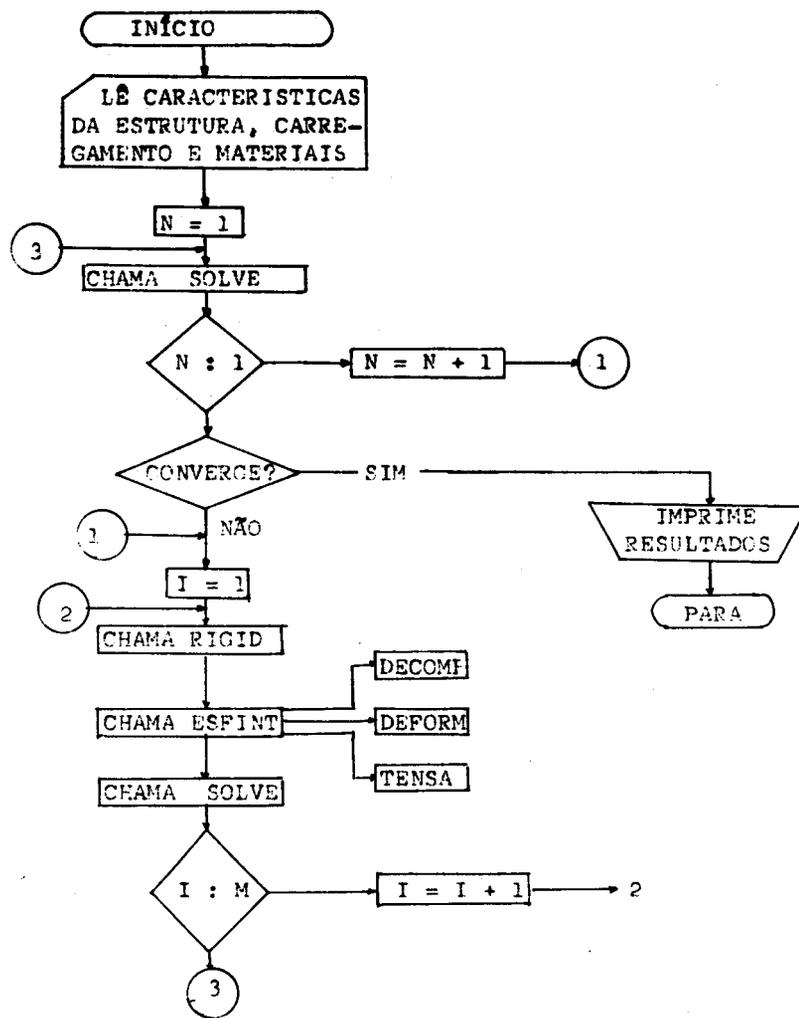
do acoplamento entre as seis coordenadas locais da matriz de rigidez da barra garante boas condições de convergência sem que seja necessária uma grande discretização da estrutura, reduzindo o esforço computacional.

Deve-se notar ainda que, sendo essencialmente um problema de verificação de estabilidade, é necessário que se disponha de um pré-dimensionamento da estrutura, feito em regime linear, para que se possa iniciar o processo. Na subrotina DEFORM é verificada a ocorrência de deformações específicas de ruptura nos materiais.

Caso se deseje otimizar a estrutura, sucessivos cálculos não lineares devem ser feitos, com redução na armadura ou nas dimensões da seção de concreto, até determinar aquela mínima que conduz a um estado limite último de ruptura ou instabilidade.

REFERÊNCIAS

- [1] Garcia, L.F.T., "Análise Não-linear de Pórticos Planos de Concreto Armado", COPPE/UFRJ, Tese de Mestrado, 1974.
- [2] Telles, J.C., "Análise do Comportamento Não-linear Geométrico e Físico de Pórticos Planos de Concreto Armado", COPPE/UFRJ, Tese de Mestrado, 1976.
- [3] Silva, D.F.M., "Análise Matricial de Estruturas", Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 1977.
- [4] Gere, J.M. & Weaver Jr, W., "Análisis de Estructuras Reticulares", Companhia Editorial Continental, 1967.
- [5] ABNT - NB-1/78, "Procedimento para Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado", Associação Brasileira de Normas Técnicas, 1978.
- [6] Fusco, P.B., "Estruturas de Concreto - Solicitações Normais", Editora Guanabara Dois, 1981.
- [7] Sussekind, J.C., "Curso de Concreto Armado - Vol. 1", Editora Globo, 1984.
- [8] Ralston, A., "A First Course in Numerical Analysis", McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [9] Jakobsen, K. & Grenacher, M., "Berechnung Unelastischer Rahmen nach der Theorie 2. Ordnung", ETH Zürich, Institut für Baustatik, 1973.



M = Número de barras

Figura 12 - Fluxograma Condensado