

ANALISIS TRIDIMENSIONAL DE FRACTURAS CON FRENTE CURVO
POR EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Ever Barbero
Sergio Idelsohn

Grupo de Tecnología Mecánica
Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria
Química
C.C. N° 91, (3000) Santa Fe, Argentina

RESUMEN

En este trabajo se presenta el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones para Fisuras Tridimensionales utilizando el Método de los Elementos Finitos.

Como ejemplo se presenta el de un cilindro fisurado exteriormente. Los resultados se comparan favorablemente con otros resultados tanto experimentales como numéricos.

ABSTRACT

In this work, the Finite Element Method is used to calculate the Stress Intensity Factor for three-dimensional cracks.

As an example, a cylinder with an external crack and subjected to internal pressure is shown.

The results obtained are compared with other experimental and numerical results.

CALCULO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

La Mecánica de Fracturas en el dominio elástico lineal se desarrolla a partir de la solución presentada por Irwin [1] basada en el método de Westergaard para encontrar una función de tensión de Airy que satisfaga la ecuación biarmónica, que representa el problema elástico bidimensional, y las condiciones de contorno impuestas por la fisura [2,3]. Resumiendo los resultados son:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3}{2} \theta \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3}{2} \theta \right] \\ T_{xy} &= \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta\end{aligned}\quad (1)$$

donde K_I es el factor de intensidad de tensiones en el extremo de la fisura, que está relacionado con la geometría del dominio y con las cargas aplicadas pero no con la distribución espacial de tensiones [2,3,4]; siendo r y θ las coordenadas del punto con respecto al extremo de la fisura.

Para un estado de deformación plana se tiene:

$$\begin{aligned}u &= \frac{K_I}{G} (r/2\pi)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - 2\nu + \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_I}{G} (r/2\pi)^{1/2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left[2 - 2\nu - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]\end{aligned}\quad (2)$$

Para el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones, existen varias técnicas, bien adaptadas al uso de soluciones aproximadas provistas por el Método de los Elementos Finitos, de las cuales se consideran las siguientes:

Método de la Extensión Virtual de la Fisura

Consiste fundamentalmente en utilizar la variación de la energía de deformación almacenada en el cuerpo (Δw) para una extensión virtual de la fisura (Δa), en la determinación del Factor de Intensidad de Tensiones:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w}{\Delta a} &= \frac{K_I^2}{E^*} (1 - \nu^2) \\ E^* &= E \quad \text{para deformación plana} \\ E^* &= E (1 - \nu^2) \quad \text{para tensión plana}\end{aligned}\quad (3)$$

Según muestra la ecuación (3), con este método se obtiene un valor global del Factor de Intensidad de Tensiones que no posee información acerca de la variación del mismo sobre el frente de la fisura tridimensional, información esta que es especialmente útil para predecir la dirección de propagación de la fisura.

En cuanto al costo computacional, en general se requiere resolver dos configuraciones semejantes, que difieren únicamente en la posición del frente de la fisura, que ha de variar en Δa de un caso a otro. En los programas que utilizan el método de solución frontal o utilizando alguna técnica de subestructuración, será innecesario resolver completamente dos modelos si se tiene la precaución de dejar para el final del proceso, el ensamblaje y condensación de los elementos cuya posición ha de variar [5,6].

Método de los Desplazamientos

El método de los Elementos Finitos con una formulación en desplazamientos, provee inmediatamente los mismos en los nodos. Las ecuaciones (2) se utilizan entonces, para calcular el K_T en distintos puntos sobre direcciones perpendiculares al frente de la fisura; y mediante una extrapolación obtener el valor del Factor de Intensidad de Tensiones en el frente mismo de la fisura [4,7,8].

DISCRETIZACION

Los elementos utilizados fueron siempre isoparamétricos con funciones de aproximación de segundo grado. Para mejorar la representación de la singularidad producida por la presencia de la fisura, se utiliza una capa de elementos especiales. Estos se obtienen, para el caso bidimensional, colapsando todo un lado de un elemento isoparamétrico de ocho nodos (fig. 1) [7]. Para el caso tridimensional se colapsa en una arista (que representa el frente de la fisura), toda una cara del elemento isoparamétrico de veinte nodos (fig. 2) [8].

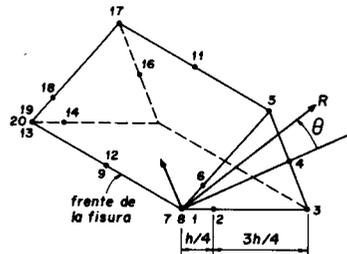
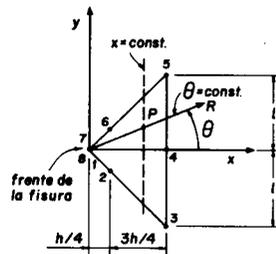


Fig. 1: Elemento bidimensional

Fig. 2: Elemento tridimensional

En ambos casos, se desplazan los nodos de interfase que concurren al frente de la fisura, de tal forma que su distancia a dicho frente sea de un cuarto de la longitud de la arista. De esta forma se consigue rodear al extremo de la fisura con elementos que poseen el tipo de singularidad presente en el problema.

En cuanto a la utilización de los resultados de desplazamientos para el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones, cabe destacar que se hace necesario excluir el valor obtenido en el nodo desplazado. Esto puede explicarse teniendo en cuenta que el elemento singular, aproxima con funciones de prueba de segundo orden un campo de fuerte variación. Como la aproximación se hace en el sentido de la norma energética en que está planteado el elemento, los valores puntuales no tienen por que ser buenos. Así entonces se deja al elemento singular la representación de la singularidad, con el solo objeto de que mejore la solución en el resto del dominio, y de ella evaluar el Factor de Intensidad de Tensiones.

Es usual intentar mejorar la solución a un problema mediante el refinamiento de la malla de Elementos Finitos en las zonas de fuerte variación de los campos involucrados. En el caso de una fractura el campo de tensiones tiene una singularidad, la que se intenta representar con el uso del elemento en cuestión. Así entonces, el refinamiento excesivo de la malla en la zona del extremo de la fisura, provoca que las dimensiones del elemento que puede representar la singularidad sean insuficientes, y así conducir a resultados erróneos. De alguna manera en [9] se intenta resolver el problema desplazando los nodos centrales de elementos adyacentes a un valor intermedio entre un medio y un cuarto.

Si bien se sabe que el efecto de la singularidad introducido por la fisura, es tal que éste se extiende a todo el dominio; la solución analítica indica que existe una "zona característica" donde la variación es fuerte. Los mejores resultados se obtienen utilizando un elemento singular de suficiente tamaño como para que cubra la zona característica.

Para los casos investigados, de los que se tienen resultados suficientemente precisos como para comparación, resultó que el tamaño del elemento debía ser de un cuarto de la longitud de la fisura, para el caso de una placa en tracción con una fisura en un lado.

Los ejemplos que se muestran corresponden al caso presentado en [10]. Se trata de una placa rectangular de un ancho $2a$ con una fisura (OA) de longitud a , sometida a un estado de deformación plana y tracción simple (fig. 3a, 4a, 5a). Por simetría se considera solo la mitad superior del rectángulo, introduciendo las condiciones de contorno adecuadas en OD. En todos los casos los refinamientos se hacen utilizando interpolación de Bezier y la solución se lleva a cabo con el programa SAMCEF [11].

La figura 3a muestra una malla de 200 elementos refinada hacia el extremo de la fisura de tal forma que las dimensiones de los dos elementos singulares son de 0.01 de la longitud de la fisura. La figura 3b muestra los valores del Factor de Intensidad de Tensiones calculado en base a los desplazamientos U_y para los nodos ubicados sobre la fisura OA, 1) con elementos no singulares y 2) con elementos singulares. Es sabido que estas curvas deben ser aproximadamente rectas. En ello

se basa justamente el método de los desplazamientos para el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones, con el que se obtiene el mismo como extrapolación al origen sobre este tipo de curvas. La fuerte no-linealidad que puede observarse en la figura 3b anticipa errores en el cálculo del Factor de Intensidad de Tensiones, aún cuando se lo realice con la parte aproximadamente recta de las curvas. Esto se ve confirmado por los resultados mostrados en la Tabla I.

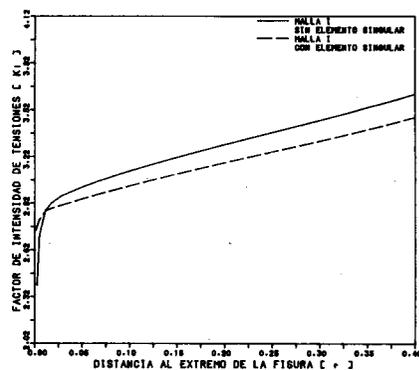
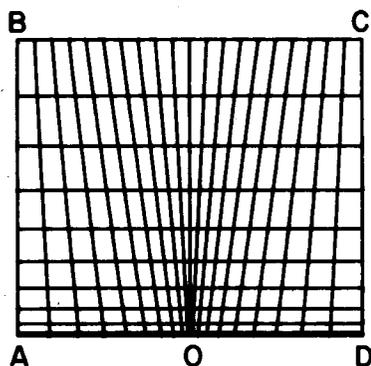


Fig. 3a: Discretización refinada hacia el extremo de la fisura.

Fig. 3b: Factor de Intensidad de Tensiones:

- 1) — sin elemento singular.
- 2) --- con elemento singular.

	Con Elemento Singular		Sin Elemento Singular	
	K_I	% error	K_I	% error
MALLA I	2.867	9.6	2.840	10.4
MALLA II	3.061	3.5	2.864	9.7
MALLA III	3.395	7.1	2.752	13.2

$$K_I(\text{Referencia}) = 3.171$$

Tabla I: Comparación entre las distintas discretizaciones empleadas.

La figura 4a muestra una discretización con 64 elementos sin refinamiento en la que el elemento singular ocupa un cuarto de la longitud de la fisura. Los resultados (fig. 4b) muestran los valores del Factor de Intensidad de Tensiones calculado utilizando 1) elementos no singulares y 2) elementos singulares en la zona del extremo de la fisura. Se observa una mejora global en los resultados cuando se utiliza el elemento singular.

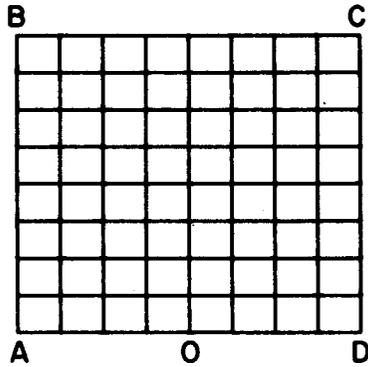


Fig. 4a: Discretización sin refinamiento.

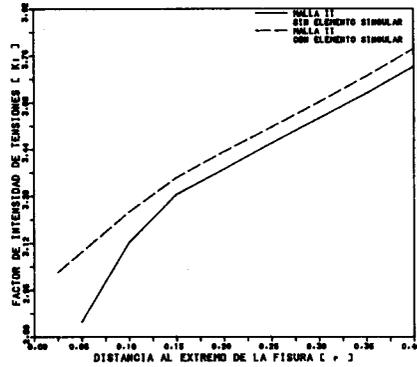


Fig. 4b: Factor de Intensidad de Tensiones:

- 1) — sin elemento singular.
- 2) --- con elemento singular.

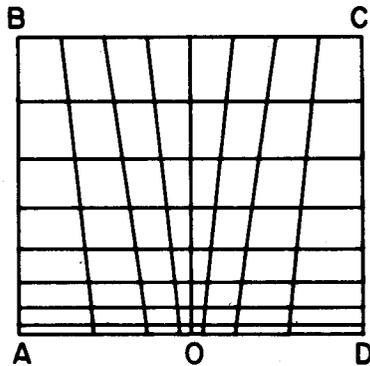


Fig. 5a: Discretización medianamente refinada.

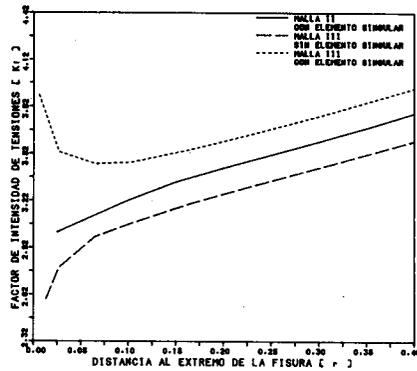


Fig. 5b: Factor de Intensidad de Tensiones:

- 1) — curva 2 de la fig. 4b.
- 2) --- sin elemento singular.
- 3) con elemento singular.

La figura 5a muestra una discretización similar pero refinada hasta obtener un elemento singular de 0.15 de la longitud de la fisura. En la figura 5b se muestran los valores del Factor de Intensidad de Tensiones en función de la distancia al extremo de la fisura, para 1) la curva (2) de la figura 4b correspondiente a la malla sin refinamiento y uso de elemento singular; 2) malla refinada sin elemento singular y 3) malla refinada con elemento singular. Se observa en esta figura y se ve confirmado en la Tabla I que la mejor aproximación se obtiene cuando se utiliza el elemento singular sobre una malla en la que éste cubre una zona importante rodeando al extremo de la fisura.

Discretización Tridimensional

La discretización tridimensional se hizo para una fisura con forma de segmento de círculo, ubicada longitudinalmente sobre la superficie exterior de un cilindro de pared gruesa.

Todos los resultados obtenidos, se compararon con mediciones experimentales realizadas mediante técnicas ópticas en el IFIR(+), con los resultados presentados en [12] para fisuras semielípticas, y con los cálculos aproximados realizados de acuerdo a lo aconsejado por el código ASME [13].

Debido al gran número de grados de libertad involucrados en este tipo de problemas, se hace necesario restringir el refinamiento de la malla a la menor zona posible. Esto trae aparejado una gran complicación en la generación de la malla de Elementos Finitos, siendo necesaria la utilización de facilidades gráficas tales como la remoción de líneas ocultas [14], etc.

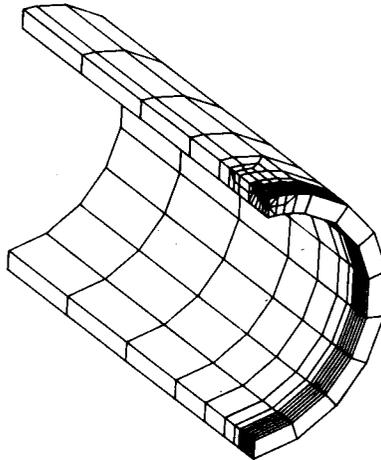


Fig. 6: Idealización de 1/4 del cilindro fisurado exteriormente.

La figura 6 muestra una discretización posible. Los resultados obtenidos con ella no fueron totalmente satisfactorios, lo que se atribuye a que los elementos que rodean al frente de la fisura son muy pequeños, contrariando lo recomendado en el punto anterior.

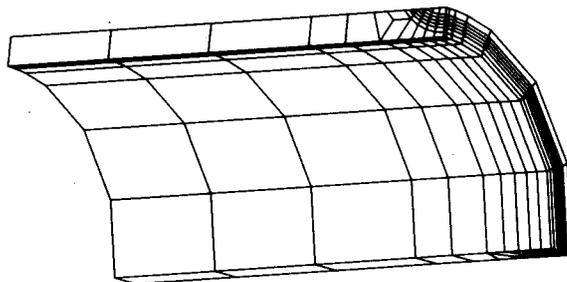


Fig. 7: Idealización de 1/8 del cilindro fisurado exteriormente.

La figura 7 muestra la discretización finalmente utilizada. La misma emplea 275 elementos con 4107 grados de libertad.

Las condiciones de simetría del problema permiten modelar un cuarto del cilindro, como se muestra en la figura 6. Sin embargo la figura 7 muestra la idealización de un octavo del mismo. De esta forma el modelo representa un cilindro con dos fisuras diametralmente opuestas, lo que introduce un error del orden del 1 % [12].

Resultados

Los desplazamientos de los bordes de la fisura, sobre la superficie del cilindro, y en el sentido circunferencial, se muestran en la figura 8. Los desplazamientos radiales sobre la misma línea están graficados en la figura 9. La figura 10 muestra la distribución del Factor de Intensidad de Tensiones sobre el frente de la fisura (donde los métodos ópticos no pueden utilizarse). Los resultados están normalizados con respecto al Factor de Intensidad de Tensiones K_0 para $\phi = 90$ grados, para una fisura elíptica en un medio infinito sujeto a tensión uniforme σ_0 .

$$K_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \quad \text{con} \quad \sigma_0 = \frac{2 R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} P$$

donde R_o es el radio exterior del cilindro y Q se aproxima por $1 + 1.464 (a/c)$.

Se han incluido además los resultados presentados en [12] para una

figura semielíptica de dimensiones cercanas a las del segmento de círculo analizado, y los valores obtenidos por el método aproximado descrito en el código ASME [13].

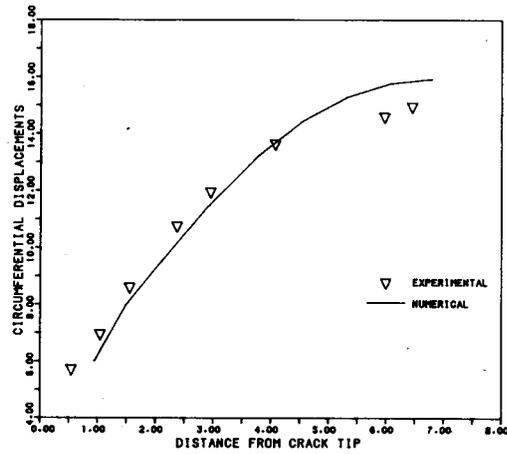


Fig. 8: Desplazamientos circunferenciales del borde de la fisura.

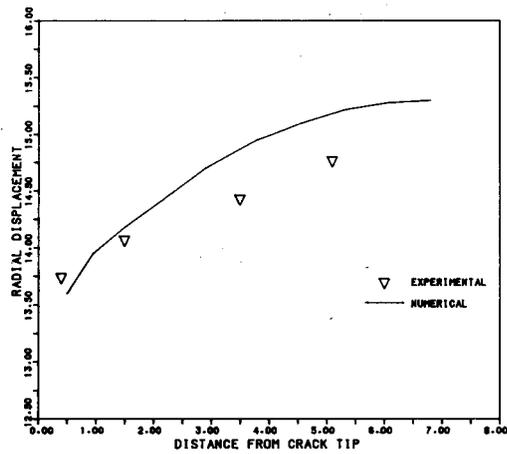


Fig. 9: Desplazamientos radiales del borde de la fisura.

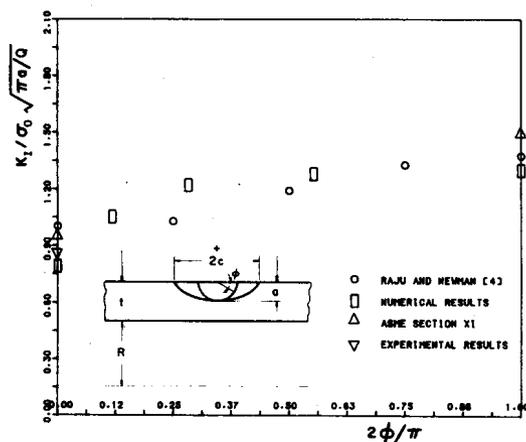


Fig. 10: Distribución del factor de intensidad de Tensiones sobre el frente curvo de la fisura.

CONCLUSIONES

La experiencia adquirida demuestra la conveniencia de contrastar los resultados numéricos con los experimentales, para verificar la bondad de los primeros en este tipo de problemas, y especialmente cuando no es posible emplear costosos refinamientos de mallas.

El trabajo de definición de la malla es muy grande para los problemas de fracturas tridimensionales, planteando la necesidad de métodos alternativos que no utilicen refinamiento.

REFERENCIAS

1. Irwin, G.R., "Application of Stresses and Strains Near the End of A Crack Transversing a Plate", Trans. Am. Soc. Mech. Eng., Jour. of Applied Mech., 1957.
2. Paris, P.C. and Sih, G.C., "Stress Analysis of Cracks", ASTM STP 381, 1985.
3. Liu, H.W., "On the Fundamental Basis of Fracture Mechanics", Eng. Fract. Mech., vol. 17, N° 5, pp. 425-438, 1983.
4. Barbero, E.J., "Elección de Mallas de Elementos Finitos en Mecánica de Fractura". Informe Preliminar al CONICET, 1984.
5. Hellen, T.K., "On the Method of Virtual Crack Extensions", Int. Jou. for Num.Meth. in Eng., vol. 9, pp. 187-207, 1975.
6. Hitchings, D. and Balasubramanian, K., "The Cholesky Method in Substructuring with an Application to Fracture Mechanics", Comp. and Struc., vol. 18, N° 3, pp. 417-424, 1984.

7. Henshell, R.D. and Shaw, K.G., "Crack Tip Finite Elements are Unnecessary", Int. Jour. for Num. Meth. in Eng., vol. 9, pp. 495-507, 1975.
8. Barsoum, R.S., "Application of Quadratic Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics", Int. Jour. Fract., vol. 10, pp. 603-605, 1975.
9. Lynn, P.P. and Ingraffea, A.R., "Transition Elements to be used with Quarter-Point Crack-Tip Elements", Int. Jour. for Num. Meth. in Eng., vol. 12, pp. 1031-1036, 1978.
10. Schiff, B., Fishelov, D. and Whiteman, J.R., "Determination of a Stress Intensity Factor Using Local Mesh Refinement", MAFELAP 78.
11. SAMCEF, Sistema para Análisis de Medios Continuos por Elementos Finitos. Universidad de Lieja.
12. Raju, I.S. and Newman, J.C., "Stress-Intensity Factors for Internal and External Surface Cracks in Cylindrical Vessels", Jour. of Press. Vessel Tech., Trans. ASME, vol. 104, pp. 293-298, 1982.
13. ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Section XI.
14. Laitano, E.E. and Idelsohn, S.R., "A Simple Hidden Line Algorithm for a Structural Model of Planar Elements", a ser publicado en Advanced Eng. Software.