UNA DESIGUALDAD PARA EL FLUJO DE CALOR CONSTANTE A FIN DE OBTENER UN PROBLEMA ESTACIONARIO DE STEFAN A DOS FASES

Domingo A. Tarzia
PROMAR (CONICET-U.N.R.)
Instituto de Matemática "Beppo Levi",
Facultad de Ciencias Exactas e Ing.,
Av. Pellegrini 250,
(2000) Rosario - Argentina

RESUMEN

Este trabajo fue sugerido por D.A. Tarzia, Math. Notae, 28 (1980/81), 73-89. Se considera un material $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con una frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ regular y se supone que la temperatura de cambio de fase es 0°C. Se impone una temperatura $b > 0$ sobre Γ_1 y un flujo de calor $q > 0$ sobre Γ_2. Se demuestra que existe una constante $q_1 > 0$ de manera que para $q > q_1$ se tiene un problema estacionario de Stefan a dos fases. El resultado es verificado numéricamente, usando MODULEF, con dos casos con soluciones exactas.

ABSTRACT

This paper was suggested by D.A. Tarzia, Math. Notae, 28 (1980/81), 73-89. We consider a material $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ with a regular boundary $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ and we suppose that the melting temperature is 0°C. We impose a temperature $b > 0$ on Γ_1 and a heat flux $q > 0$ on Γ_2. We prove there exists a constant $q_1 > 0$ such that for $q > q_1$ we have a two-phase steady-state Stefan problem. This result is verified numerically, using MODULEF, with two cases with analytical solutions.

I. INTRODUCCION

Se considera un material Ω , dominio de $\mathbb{R}^n$ $(n = 1,2,3$ para las aplicaciones), con una frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (med $(\Gamma_1) > 0$) suficientemente regular y se supone que la temperatura de cambio de fase es 0°C. Sobre la porción de frontera Γ_1 se tiene una temperatura constante $b > 0$ y sobre la porción de frontera restante Γ_2 se impone un flujo de calor constante (saliente) $q > 0$. Considerando en Ω un problema estacionario de conducción de calor, desde un punto de vista físico, se tienen las siguientes conclusiones:

i) Si q es pequeño entonces la temperatura en Ω resultará positiva y por ende no existirá un cambio de fase del material. En este caso, el problema resultará ser sólo de conducción para la fase líquida.

ii) Si q es grande entonces la temperatura en Ω asumirá valores positivos y negativos, y por ende existirá un cambio de fase del material.

En este trabajo se encontrará para q una condición suficiente para que exista en Ω un cambio de fase, es decir se demostrará que existe $q_1 > 0$ de manera que para $q > q_1$ se tenga en Ω un problema estacionario de Stefan a dos fases. Además, en dos ejemplos en los cuales la condición suficiente es también necesaria [1], se calculará numéricamente la constante q_1 a través de un proceso de simulación utilizando para ello el software MODULEF (Módulos de Elementos Finitos).

II. FORMULACION MATEMATICA DEL PROBLEMA

Siguiendo [2] se estudia la temperatura $\theta = \theta(x)$, definida para $x \in \Omega$. El conjunto Ω puede expresarse en la forma

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup L \tag{1}$$

donde

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega \ / \ \theta(x) < 0\} \ , \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega \ / \ \theta(x) > 0\} \tag{2}$$
$$L = \{x \in \Omega \ / \ \theta(x) = 0\}$$

representan respectivamente la fase sólida, la fase líquida y la frontera libre que las separa.

La temperatura θ puede representarse en Ω de la siguiente manera:

$$\theta(x) = \begin{cases} \theta_1(x) < 0 & , \quad x \in \Omega_1 \\ 0 & , \quad x \in L \\ \theta_2(x) > 0 & , \quad x \in \Omega_2 \end{cases} \tag{3}$$

y satisface las siguientes condiciones:

$$\Delta\theta_i = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_i \quad (i = 1,2)$$
$$\theta_1 = \theta_2 = 0 \quad , \quad k_1 \frac{\partial\theta_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial\theta_2}{\partial n} \quad \text{sobre} \quad L \tag{4}$$

$$\theta_2/\Gamma_1 = b \tag{4}$$

$$\begin{cases} -\, k_2 \dfrac{\partial \theta_2}{\partial n}\Big/_{\Gamma_2} = q & \text{si} \quad \theta/_{\Gamma_2} > 0 \\ -\, k_1 \dfrac{\partial \theta_1}{\partial n}\Big/_{\Gamma_2} = q & \text{si} \quad \theta/_{\Gamma_2} < 0 \end{cases}$$

donde $k_i > 0$ $(i=1,2)$ es la conductividad térmica de la fase i ($i=2$: líquida, $i=1$: sólida), $b > 0$ es la temperatura constante dada sobre Γ_1 y $q > 0$ es el flujo de calor constante dado sobre Γ_2.

Si se realiza el cambio de función incógnita

$$u = k_2\, \theta^+ - k_1\, \theta^- \quad \text{en} \quad \Omega \tag{5}$$

donde θ^+ y θ^- representan respectivamente la parte positiva y negativa de θ, entonces el problema (4) se transforma en

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad D'(\Omega) \\ u/_{\Gamma_1} = b_o \equiv k_2 b \\ -\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big/_{\Gamma_2} = q \end{cases} \tag{6}$$

cuya formulación variacional está dada por:

$$\begin{cases} a(u,\, v-u) = -q \displaystyle\int_{\Gamma_2} (v-u)\, d\gamma \quad , \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \tag{7}$$

donde:

$$\begin{aligned} &V = H^1(\Omega) \quad , \quad V_o = \left\{ v \in V \ / \ v/_{\Gamma_1} = 0 \right\} \ , \\ &K = \left\{ v \in V \ / \ v/_{\Gamma_1} = b_o \right\} \ , \\ &a(u,v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \ dx \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Más aún, la solución de (7) está caracterizada por el siguiente problema de mínimo [3,4,5]:

$$\begin{cases} J(u) \le J(v) \quad , \quad \forall v \in K \\ u \in K \end{cases} \tag{9}$$

donde:

$$J(v) = \frac{1}{2}\, a(v,v) + q \int_{\Gamma_2} v \, d\gamma \ . \tag{10}$$

Observación 1

La transformación inversa de (5) está dada por:

$$\theta = \frac{1}{k_2}\, u^+ - \frac{1}{k_1}\, u^- \quad \text{en} \quad \Omega \tag{5 bis}$$

III. PROPIEDADES

Sea u_q la única solución de la ecuación variacional (7) para $q > 0$ [2].

Propiedad 1

Se tiene la siguiente expresión:

$$a(u_q^-, u_q^-) = q \int_{\Gamma_2} u_q^- \, d\gamma \tag{11}$$

Demostración. Basta elegir $v = u_q^+ \in K$ en (7).

Observación 2

De (11) y del hecho que $u_q^- \in V_o$, se deduce la equivalencia:

$$u_q^- \not\equiv 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad u_q^- \not\equiv 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_2 \tag{12}$$

de la cual se obtiene que, para un dado valor de q, habrá en Ω un cambio de fase (u_q ó θ_q toman valores positivos y negativos en Ω) si y solamente si la función u_q toma valores negativos sobre la frontera Γ_2; dicho de otra forma, la función u_q comenzará a asumir valores negativos sobre Γ_2. (Este hecho se tendrá en cuenta al realizar la simulación numérica para el cálculo del elemento q_1).

Propiedad 2

Si $u_i \equiv u_{q_i}$ es la solución de (7) para $q_i (i = 1,2)$, entonces se tienen las siguientes igualdades:

$$\text{i)} \quad a(u_2-u_1,\ u_2-u_1) = (q_1-q_2) \int_{\Gamma_2} (u_2-u_1)\, d\gamma \ ,$$

$$\text{ii)} \quad a(u_2-u_2) - a(u_1,u_1) = a(u_2+u_1,\ u_2-u_1) = (q_1+q_2) \int_{\Gamma_2} (u_1-u_2)\, d\gamma \tag{13}$$

Demostración. Si se toma $v = u_2 \in K$ en la ecuación variacional correspondiente a u_1 y $v = u_1 \in K$ en la correspondiente a u_2, luego se suman y se restan ambas igualdades, entonces se obtienen (13 i) y (13 ii) respectivamente.

Propiedad 3

Si $u_i \equiv u_{q_i}$ es la solución de (7) para $q_i (i = 1,2)$, entonces se tienen las siguientes propiedades:

i) Si $q_2 \leq q_1$ entonces

$$\text{a)} \quad u_1 \leq u_2 \quad \text{en} \quad \Omega \quad , \qquad \text{b)} \int_{\Gamma_2} u_1 \, d\gamma \leq \int_{\Gamma_2} u_2 \, d\gamma \tag{14}$$

ii) Además, las funciones $q \to u_q$ y $q \to \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma$ son monótonas estrictamente decrecientes, es decir:

$$q_2 < q_1 \Longrightarrow \begin{cases} \text{a)}\ u_1 \le u_2 \ , \ u_1 \not\equiv u_2 \quad \text{en} \quad \Omega \ , \\ \text{b)}\ \int_{\Gamma_2} u_1 \, d\gamma < \int_{\Gamma_2} u_2 \, d\gamma \end{cases} \tag{15}$$

Demostración. i) La condición (14 b) surge directamente de (13 i). Para demostrar (14 a) se tendrá en cuenta la siguiente equivalencia:

$$u_1 \le u_2 \quad \text{en} \quad \Omega \iff W = 0 \quad \text{en} \quad \Omega \quad , \tag{16}$$

donde $$W = (u_2 - u_1)^- \ .$$

Como $W \in V_o$, entonces si se utiliza $v = u_2 + W \in K$ en la ecuación variacional correspondiente a u_1 y $v = u_1 + W \in K$ en la correspondiente a u_2 y luego se suman ambas igualdades, se tiene:

$$0 \le (q_1 - q_2) \int_{\Gamma_2} W \, d\gamma = a(u_2 - u_1, W) = - a(W, W) \le 0 \tag{17}$$

es decir $W = 0$ en Ω .

ii) Para demostrar (15 a,b) se utilizan los siguientes resultados:

$$\text{(A)} \qquad u_1 = u_2 \quad \text{en} \quad \Omega \Longrightarrow q_1 = q_2 \quad \text{ó} \quad \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1) \, d\gamma = 0 \tag{18}$$

$$\text{(B)} \qquad \int_{\Gamma_2} (u_2 - u_1) \, d\gamma = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{(Bi)}\ u_2 = u_1 \quad \text{en} \quad \Omega \ , \\ \text{(Bii)}\ q_1 = q_2 \ . \end{cases} \tag{19}$$

La condición (A) resulta directamente de (13 i) y la condición (Bi) se deduce de (13 i) y del hecho que $u_2 - u_1 \in V_o$. Teniendo en cuenta la hipótesis de (B), el resultado (Bi) y las ecuaciones variacionales correspondientes a u_2 y u_1 , se deduce:

$$(q_1 - q_2) \int_{\Gamma_2} (v - u_1) \, d\gamma = 0 \quad , \quad \forall v \in K \ . \tag{20}$$

Tomando un elemento $v_o \in V_o$ de manera que $\int_{\Gamma_2} v_o \, d\gamma \ne 0$ y eligiendo $v = u_1 + v_o \in K$, de (20) se deduce (Bii).

Sea la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida de la siguiente manera:

$$f(q) = J(u_q) = \frac{1}{2} \, a(u_q, u_q) + q \int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma \tag{21}$$

Observación 3

Teniendo en cuenta (12), (15 b) y la función f , definida por (21), para encontrar el elemento q_1 (de la Introducción) basta encontrar un valor q para el cual se tenga $f(q) < 0$. Se verá más adelante que esta técnica puede aún mejorarse.

Propiedad 4

Pata todo $q > 0$ y h de manera que $(q + h) > 0$, se tienen las siguientes estimaciones:

i) $$\left\|\frac{1}{h}(u_{q+h} - u_q)\right\|_V \le C_1 \equiv \frac{\|\gamma_o\|}{\alpha_o}\left[\mathrm{med}(\Gamma_2)\right]^{1/2} ,\tag{22}$$

ii) $$\left\|\frac{1}{h}(u_q - u_{q+h})\right\|_{L^2(\Gamma_2)} \le C_2 \equiv C_1 \|\gamma_o\| ,\tag{23}$$

donde γ_o es el operador traza (lineal y continuo, definido sobre V) y $\alpha_o > 0$ es la constante de coercitividad sobre V_o de la forma bilineal a , es decir:

$$a(v, v) \ge \alpha_o \|v\|_V^2 , \quad \forall v \in V_o .\tag{24}$$

Demostración. i) Teniendo en cuenta (24), (13 i) con $q_1 = q+h$ y $q_2 = q$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la continuidad de γ_o se obtiene (22).

ii) Teniendo en cuenta (22) y la continuidad de γ_o se deduce (23). De (15 b) y (23) se deduce el siguiente:

Colorario 5

Para todo $q > 0$, $h > 0$ se tiene:

$$0 < \int_{\Gamma_2} u_{q+h}\, d\gamma - \int_{\Gamma_2} u_q\, d\gamma < C_2 h ,\tag{25}$$

con lo cual la función $q \to \int_{\Gamma_2} u_q$ es continua .

Propiedad 6

La función f es derivable; más aún, f' es continua y monótona estrictamente decreciente, estando dada por la siguiente expresión:

$$f'(q) = \int_{\Gamma_2} u_q\, d\gamma \tag{26}$$

Demostración. De (13 ii), se obtiene:

$$\frac{f(q+h) - f(q)}{h} = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} u_q\, d\gamma + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_2} u_{q+h}\, d\gamma \tag{27}$$

La expresión (26) se deduce de (25) y (27) .

Propiedad 7

Se tienen las siguientes expresiones:

i) $$a(u_q, u_q) = k_2 b \int_{\Gamma_1} \frac{\partial uq}{\partial n}\, d\gamma - q \int_{\Gamma_2} u_q\, d\gamma ,\tag{28}$$

ii) $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_q}{\partial n}\, d\gamma = q\ \mathrm{med}(\Gamma_2)$, (29)

iii) $f(q) = k_2 b\ \mathrm{med}(\Gamma_2)\ q - \frac{1}{2}\, a(u_q, u_q)$, (30)

iv) $$\frac{d}{dq}\left[a(u_q, u_q)\right] = 2\left[k_2 b\ \mathrm{med}(\Gamma_2) - \int_{\Gamma_2} u_q\, d\gamma\right] =$$

$$= \frac{2}{q}\, a\,(u_q, u_q) \quad . \qquad (31)$$

Demostración. Las expresiones (28) y (29) se obtienen multiplicando la ecuación diferencial de (6) por u_q y 1 respectivamente, integrando sobre Ω y utilizando la fórmula de Green. La expresión (30) se deduce de (21), (28) y (29). La expresión (31) se obtiene derivando la (30) respecto de q y utilizando (26).

Propiedad 8

Se tienen las siguientes expresiones:

i) $f'(q) = k_2 b\ \mathrm{med}(\Gamma_2) - \frac{1}{q}\, a(u_q, u_q)$, (32)

ii) $f''(q) = -\frac{1}{q^2}\, a(u_q, u_q) < 0 \quad , \quad \forall_q > 0$. (33)

Demostración. La expresión (32) se deduce de (26), (28) y (29), y la expresión (33) se obtiene derivando la (32) respecto de q y utilizando (31).

Propiedad 9

Existe una constante $C > 0$ de manera que

$$a(u_q, u_q) = C\, q^2 \qquad (34)$$

Demostración. Sea la función real

$$Y(q) = \frac{1}{q}\, a(u_q, u_q) \qquad (35)$$

que satisface el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} Y'(q) = -f''(q) = \dfrac{1}{q^2}\, a(u_q, u_q) = \dfrac{1}{q}\, Y(q) \ , \\ Y(0^+) = \lim\limits_{q\to 0} 2\left[k_2 b\ \mathrm{med}(\Gamma_2) - \displaystyle\int_{\Gamma_2} u_q\, d\gamma\right] = 0 \end{cases} \qquad (36)$$

La solución de (36) viene dada por:

$$Y(q) = C\, q \quad , \quad \text{con} \quad C > 0 \text{ (constante)} \qquad (37)$$

obteniéndose inmediatamente (34).

Observación 4

La constante $C > 0$ tiene la siguiente dimensión física

$$[C] = \ell^n \tag{38}$$

donde $[\text{Longitud}] = \ell$ y n es la dimensión del espacio $\mathbb{R}^n$ en cuestión.

De (30) y la Propiedad 9 surge el:

Colorario 10

La función f, definida por (21), viene dada por:

$$f(q) = -\frac{C}{2} q^2 + k_2 b \operatorname{med}(\Gamma_2)\, q \quad . \tag{39}$$

Teorema 11

Para todo $q > q_1$ el problema (7) es a dos fases, donde:

$$q_1 = \frac{k_2 b}{C} \operatorname{med}(\Gamma_2) \quad . \tag{40}$$

Demostración. Como $f'(q_1) = 0$, el resultado surge de (12) y (26).

Propiedad 12

En el caso que por cuestiones de simetría se tenga que la función u_q es constante sobre Γ_2 entonces la condición suficiente, dada por el Teorema 11, es también necesaria para que el problema (7) sea a dos fases.

Demostración. Como $u_q/\Gamma_2 = \text{const.}$, la propiedad surge de la siguiente equivalencia:

$$\int_{\Gamma_2} u_q \, d\gamma = 0 \iff u_q/\Gamma_2 = 0 \quad . \tag{41}$$

Observación 5

Todo lo realizado en este trabajo sigue siendo aún válido si la frontera Γ del dominio acotado Ω está representada por la unión de tres porciones $(\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)$ que tienen las siguientes características:

i) Γ_1 y Γ_2 tienen las mismas condiciones que las descriptas anteriormente.

ii) Γ_3 es una pared impermeable al calor, es decir que se tiene $\frac{\partial\theta}{\partial n}|\Gamma_3 = 0$ en (4), y por ende $\frac{\partial u}{\partial n}|\Gamma_3 = 0$ en (6) .

Observación 6

Un problema análogo al planteado en este trabajo pero para el caso de evolución ha sido resuelto en [6] para un material semi-infinito que inicialmente se encuentra en estado sólido, a temperatura constante, y que sobre el borde fijo $x=0$ recibe un flujo de calor de la forma $-h_o/\sqrt{t}$ $(h_o > 0)$.

IV. RESULTADOS NUMERICOS

A continuación se verán los resultados numéricos obtenidos, usando MODULEF [7,8], en dos casos para los cuales la Propiedad 12 es válida y además la solución es conocida explícitamente [1].

Ejemplo 1

Se consideran los siguientes datos:

$$\begin{cases} n = 2 \quad , \quad \Omega = (0, x_o) \times (0, y_o) \quad , \\ \Gamma_1 = \{0\} \times [0, y_o] \quad , \quad \Gamma_2 = \{x_o\} \times [0, y_o] \quad , \\ \Gamma_3 = [0, x_o] \times \{0\} \cup [0, x_o] \times \{y_o\} \quad . \end{cases} \tag{42}$$

La solución de (6) ó (7) está dada por:

$$u_q(x,y) = k_2\, b - q\, x \tag{43}$$

obteniéndose

$$\begin{cases} a(u_q, u_q) = C\, q^2 \quad , \quad C = x_o\, y_o \quad , \\ q_1 = \dfrac{k_2 b}{x_o} \quad . \end{cases} \tag{44}$$

Los resultados numéricos, que a continuación se detallan, fueron obtenidos realizando una simulación del problema (6) ó (7), con los siguientes datos:

$$\begin{cases} x_o = 1\ [\text{cm}] \quad , \quad y_o = 1\ [\text{cm}] \quad , \quad b = 5\ [°\text{C}] \\ k_2 = 0.0014 \left[\dfrac{\text{cal}}{\text{cm seg } °\text{C}}\right] \ \text{(conductividad térmica del agua).} \end{cases} \tag{45}$$

y utilizando la triangulación siguiente [9,10]:

$$\begin{array}{l} 100 \ \text{cuadrados tipo Lagrange de grado 1,} \\ 121 \ \text{vértices.} \end{array} \tag{46}$$

$q \left[\frac{cal}{cm^2\ seg}\right]$	u/Γ_2 (cte) $\left[\frac{cal}{cm\ seg}\right]$
0.0071	- 0.0188679
0.00705	- 0.00943398
0.007001	- 0.000188704
0.00700001	- 0.00000191009
0.007	- 0.0000000234828
0.0069999998	- 0.0000000234828
0.0069999995	- 0.0000000234828
0.0069999994	+ 0.000000627643
0.0069999993	+ 0.000000627643
0.006999999	+ 0.000000669955
0.00699999	+ 0.00000707206
0.0069999	+ 0.0000713957
0.006999	+ 0.000714244
0.006998	+ 0.00142851
0.00699	+ 0.00714280

Se toma para q_1 el siguiente valor aproximado:

$$q_{1aprox.} = 0.00699999945 \pm 0.00000000005 \tag{47}$$

estando el valor exacto dado por:

$$q_{1\ exacto} = 0.007 \tag{48}$$

El error cometido, por defecto, está acotado por:

$$0 < q_{1\ exacto} - q_{1\ aprox.} < 6 \cdot 10^{-10} \left[\frac{cal}{cm^2\ seg}\right] \tag{49}$$

Ejemplo 2

se consideran los siguientes datos:

$$\begin{cases} n = 2 \quad , \quad 0 < r_1 < r_2 \ . \\ \Omega \ : \text{corona circular de radios } r_1 \text{ y } r_2 \text{ y centrada en } (0,0) , \\ \Gamma_1 \ : \text{circunferencia de radio } r_1 \text{ y centro } (0,0) \ , \\ \Gamma_2 \ : \text{circunferencia de radio } r_2 \text{ y centro } (0,0) \ . \end{cases} \tag{50}$$

La solución de (6) ó (7) está dada por:

$$u_q(x,y) = k_2 b - q\ r_2 \log \frac{r}{r_1} \quad , \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \tag{51}$$

obteniéndose

$$\begin{cases} a(u_q,u_q) = C\ q^2 \quad , \quad C = 2\pi\ r_2^2 \log \frac{r_2}{r_1} \ , \\ m(\Gamma_2) = 2\pi\ r_2 \quad , \quad q_1 = \dfrac{k_{2b}}{r_2 \log \frac{r_2}{r_1}} \end{cases} \tag{52}$$

Los resultados numéricos, que a continuación se detallan, fueron obtenidos realizando una simulación del problema (6) ó (7), con los siguientes datos:

$$\begin{cases} r_1 = 1\ [cm] \quad , \quad r_2 = 2\ [cm] \quad , \quad b = 5\ [°C] \\ k_2 = 0.0014 \left[\dfrac{cal}{cm\ seg\ °C}\right] \text{ (conductividad térmica del agua).} \end{cases} \tag{53}$$

Debido a la simetría del problema se lo resolvió para un cuarto de corona circular (la correspondiente al primer cuadrante), teniendo presente que en este caso aparece una porción de frontera Γ_3 , dada por:

$$\Gamma_3 = \{0\} \times [1,2] \cup [1,2] \times \{0\} \ , \tag{54}$$

y por lo tanto se modifican los valores de C y $med(\Gamma_2)$ en un factor 1/4, pero permaneciendo invariante la expresión de q_1 , que es el valor que interesa.

La triangulación utilizada en el nuevo dominio estuvo compuesta de [9,10]:

100 cuadriláteros (dos de sus lados son porciones de circunferencias) tipo Lagrange de grado 1. (55)

121 vértices ,

obteniéndose

$q\ \left[\dfrac{cal}{cm^2\ seg}\right]$	$u/\Gamma_2\ (cte)\ \left[\dfrac{cal}{cm\ seg}\right]$
0.004	+ 0.00147440
0.005	+ 0.0000930041
0.00505	+ 0.0000239342
0.00506	+ 0.0000101201
0.0050673	+ 0.00000597593
0.0050674	- 0.000000102207
0.0050675	- 0.000000240374
0.0050677	- 0.000000516654
0.005068	- 0.000000931046
0.00507	- 0.00000369387
0.0051	- 0.0000451358
0.0052	- 0.000183276
0.00535	- 0.000390486
0.0055	- 0.000597696
0.006	- 0.00128840

queda para q_1 el siguiente valor aproximado:

$$q_{1\ aprox.} = 0.00506735 \pm 0.00000005 \tag{56}$$

estando el valor exacto dado por:

$$q_{1\ exacto} = \frac{0.007}{2 \log 2} \cong 0.00504943. \tag{57}$$

El error cometido, por exceso, está acotado por:

$$0 < q_{1\ \text{aprox.}} - q_{1\ \text{exacto}} < 2 \cdot 10^{-5} \left[\frac{\text{cal}}{\text{cm}^2\ \text{seg}}\right]. \tag{58}$$

Agradecimiento

Parte del presente trabajo ha sido realizado con apoyo del GAMNI/INRIA (Francia). Agradezco además las fructuosas discusiones que sobre la utilización de MODULEF he tenido con investigadores del INRIA, en especial con M. Vidrascu.

REFERENCIAS

[1] Tarzia, D.A., "Sobre el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 28 (1980/81), 73-89.

[2] Tarzia, D.A., "Aplicación de métodos variacionales en el caso estacionario del problema de Stefan a dos fases", Math. Notae, 27 (1979/80), 145-156.

[3] Duvaut, G.; Lions, J.L., "Les inéquations en mécanique et en physique", Dunod, Paris (1972).

[4] Kinderlehrer, D.; Stampacchia, G., "An introduction to variational inequalities and their applications", Academic Press, New York (1980).

[5] Tarzia, D.A., "Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre", CLAMI N° 5, CONICET, Buenos Aires (1981).

[6] Tarzia, D.A., "An inequality for the coefficient σ of the free boundary $s(t) = 2\sigma\sqrt{t}$ of the Neumann solution for the two-phase Stefan problem", Quart. Appl. Math., 39 (1981/82), 491-497.

[7] Bernadou, M. (Ed.), "MODULEF: Un code modulaire d'éléments finis", Cours et Séminaires INRIA, Rocquencourt, 26-30 Novembre 1984.

[8] George, P.L., "Utilisation conversationnelle de Modulef", Publications MODULEF N° 108, INRIA, Rocquencourt, Mai 1984.

[9] Ciarlet, P.G., "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam (1978).

[10] Glowinski, R.; Lions, J.L.; Tremolieres, R., "Analyse numérique des inéquations variationnelles", Tome 1, 2, Dunod, Paris (1976).