CÁLCULO DAS CONFIGURAÇÕES DE EQUILÍBRIO DE ESTRUTURAS UNIDIMENSIONAIS PELO MÉTODO DE TIRO

Heraldo Silva da Costa Mattos
Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro - Brasil

Rubens Sampaio
Departamento de Engenharia Mecânica
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
Rio de Janeiro - Brasil

RESUMO

O equilíbrio de uma estrutura unidimensional elástica é modelado por um sistema de equações diferenciais ordinárias (lineares ou não) com condições de contorno (lineares ou não) definidas em dois pontos. Este trabalho apresenta uma técnica numérica sistemática de solução desses problemas conhecida como "método do tiro". Como exemplo é resolvido um problema envolvendo o equilíbrio de um arco elástico extensível, submetido a grandes deformações.

ABSTRACT

The equilibrium of an elastic rod is described by a two-point boundary value problem (linear or not). In the present paper we consider a numerical technique, known as "simple shooting method", for solving those problems.

As an exemple, the method has been tested by applying it to a problem involving large deformations of an elastic extensible arc.

INTRODUÇÃO

Ao longo das duas últimas décadas vários trabalhos importantes foram produzidos desenvolvendo teorias mecânicas não lineares para estruturas unidimensionais ([1], [2], [3] e [4]). Um dos principais limitantes para a aplicação efetiva dessas teorias tem sido a inexistência de técnicas gerais de solução dos sistemas de equações diferenciais resultantes. Em qualquer das teorias, para um corpo em equilíbrio, chega-se sempre a um sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias com condições de contorno definidas em dois pontos.

Para um sistema com as condições de contorno definidas somente no ponto inicial do intervalo existe uma teoria de existência e unicidade bem desenvolvida, com técnicas numéricas simples para a aproximação desses problemas (como os métodos de Runge-Kutta e outros [5]). Nestes casos geralmente o problema possui uma única solução a qual depende das condições iniciais. Para um caso geral, com condições arbitrárias, é possível ter mais do que uma ou nenhuma solução, não existindo teoria de existência que cubra todas as situações possíveis. Normalmente são problemas de difícil solução.

Este trabalho apresenta uma técnica numérica simples de solução de problemas de valor de contorno, conhecida como método do tiro, comentando suas vantagens e limitações. A idéia básica do método é a de, quando for possível, substituir as condições de contorno gerais de um problema por condições iniciais equivalentes, resolvendo-o, então, por um dos métodos numéricos conhecidos para a solução de problemas de valor inicial. Essas condições iniciais equivalentes são obtidas por um processo iterativo que será detalhadamente descrito.

O método do tiro é, em geral, mais barato, eficiente e preciso do que o método de elementos finitos ou diferenças finitas (existe um estudo comparativo em [5]), sendo esta vantagem mais evidente no caso de problemas não lineares.

Embora a teoria linear de estruturas unidimensionais seja adequada em muitos problemas práticos ela é incapaz de tratar casos onde estejam envolvidas grandes deformações, como, por exemplo, na determinação do comportamento pós-crítico de estruturas flambadas [6].

Desta forma, problemas atuais como a deformação elástica de linhas de transmissão [7], sistemas de cabos em estruturas submarinas (off-shore) [8] e molas helicoidais, todos modelados por equações não-lineares, podem ser resolvidos de forma razoavelmente simples e barata. Outros trabalhos recentes sobre grandes deformações em estruturas unidimensionais elásticas podem ser também resolvidos de forma alternativa pelo método do tiro ([9], [10]).

Como exemplo de aplicação apresenta-se nesse trabalho um problema envolvendo o equilíbrio de um semi-anel elástico, engastado em uma das extremidades, e na outra solicitado por uma força horizontal P. A estrutura é considerada extensível e não são feitas restrições quanto ao tamanho das deformações. As equações de equilíbrio utilizadas foram baseadas em ([10],[11]) e resultam num problema não-linear de autovalor com condições de contorno definidas em dois pontos, resolvido pelo método proposto. Para determinados valores da carga P foram encontradas até três configurações de equilíbrio. Os resultados são apresentados graficamente.

O MÉTODO DO TIRO

Para maior simplicidade, este trabalho tratará sempre com problemas de primeira ordem. Isto não implicará em perda de generalidade já que um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem m pode sempre ser transformado num sistema de primeira ordem equivalente [12].

Para problemas de valor inicial

$$\left.\begin{array}{l} y'(x) = f(x, y(x)) \; ; \; y(xa) = yA \\ x \in [xa, xb] = I \\ y : I \to R^n \\ f : I \times R^n \to R^n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

existe uma teoria de existência e unicidade bem desenvolvida. Os seguintes teoremas, apresentados sem provas [12], listam condições suficientes para existência e unicidade da solução:

<u>Teorema 1</u> - Se f for contínua em $D = \{(x,y) \mid xa \leq x \leq xb, \; y \in R^n\}$, xa, xb finitos e existir uma constante L tal que

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \leq L \, \| y_1 - y_2 \| \; \forall \; (x, y_1), \; (x, y_2) \in S$$

(condição de Lipschitz), então $\forall \; (x_0, y_0) \in D$ existe exatamente uma função y(x) tal que:

a) y(x) é contínua e continuamente diferenciável $\forall \; x \in [xa, xb]$

b) $y'(x) = f(x, y(x)) \; \forall \; x \in [xa, xb]$

c) $y(x_0) = y_0$

<u>Teorema 2</u> - Sbo a hipótese adicional de que a matriz jacobiana $\nabla_y f(x, y) = [\partial f_i / \partial y_j]$ existe, é continua e de existir uma constante k tal que $\| \nabla_y f(x, y) \| \leq k$ em D, então existe uma única solução y(x ; t) do problema de valor inicial

$$y'(x) = f(x, y(x \; ; \; t)) \; ; \; y(xa \; ; \; t) = t$$

que é continuamente diferenciável $\forall \; t \in R^n$.

Existem diversos métodos numéricos conhecidos para a solução de problemas de valor inicial. Neste trabalho assume-se que o leitor esteja familiarizado com eles, não sendo discutidos os diversos aspectos de sua implementação. Para maiores detalhes sobre vantagens, limitações, problemas de convergência e precisão existe uma vasta bibliografia [5].

Um método bastante popular é o de Runge-Kutta de quarta ordem. Para a aproximação da solução do problema (1) utiliza-se o seguinte procedimento

$$\left.\begin{aligned}
y^{(i+1)} &= y^{(i)} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
k_1 &= f(x^{(i)}, y^{(i)})w \\
k_2 &= f(x^{(i)} + \frac{1}{2}w, y^{(i)} + \frac{1}{2}k_1)w \\
k_3 &= f(x^{(i)} + \frac{1}{2}w, y^{(i)} + \frac{1}{2}k_2)w \\
k_4 &= f(x^{(i)} + w, y^{(i)} + k_3)w \\
&\text{onde} \\
w &= (xb - xa)/m \\
x^{(i)} &= xa + (i - 1)w \; ; \; i = 1,\ldots, m \\
y^{(i)} &= y(x^{(i)})
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Os problemas de valor inicial são um caso particular dos problemas de valor de contorno. Para um problema geral, com condições de contorno arbitrárias, é possível ter mais do que uma ou nenhuma solução, não existindo teoria de existência que cubra todas as situações possíveis. O método do tiro, que será apresentado a seguir, é uma técnica numérica simples de solução do problema:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \; ; \; r(y(xa), y(xb)) = 0 \qquad (3)$$

$x \in [xa, xb] = I \; ; \; y : I \to R^n \; ; \; f : I \times R^n \to R^n \; ; \; r : R^n \times R^n \to R^n$, onde se supõe a existência de solução (ões) e onde a função f satisfaz as condições dos teoremas 1 e 2.

Resolver o problema (3) (satisfazendo as hipóteses acima) pelo método do tiro é equivalente a encontrar um vetor $t \in R^n$ de forma que, resolvendo o problema de valor inicial (para o qual métodos numéricos de solução são conhecidos)

$$y'(x) = f(x \; ; \; y(x)) \; ; \; y(xa) = t \qquad (3)$$

a condição $r(y(xa \; ; \; t), y(xb \; ; \; t)) = 0$ seja satisfeita.

Ou seja, uma solução de (2) é obtida encontrando-se um zero da função

$$\left.\begin{aligned}
G &: R^n \to R^n \\
G(t) &= r(t, y(xb \; ; \; t))
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

É possível utilizar diversos métodos para achar zeros de funções. Assume-se também que o leitor esteja familiarizado com eles, não sendo discutidos em profundidade ([5] , [3]). Em geral utiliza-se o método de Newton ou uma de suas modificações. Na sua forma mais simples o método de Newton se resume a escolher uma estimativa inicial $t^{(o)}$, resolvendo-se iterativamente

$$\left.\begin{aligned}
- G(t^{(i)}) &= \nabla G(t^{(i)}) \, \Delta t^{(i)} \\
\Delta t^{(i)} &= t^{(i + 1)} - t^{i}
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

até que $\| G(t^i) \| < \varepsilon$, ε dado. O índice i representa o número da iteração e ∇G é o gradiente da função G. Como, em geral, não se tem uma expressão analítica da função G, G(t) é obtida resolvendo-se numericamente (3), determinando-se y(xb ; t) e substituindo em r(t, y(xb ; t)) = = G(t). Desta forma, torna-se necessário o uso de uma expressão aproximada para o gradiente de G em (5), perdendo-se, em geral, a convergência (local) quadrática do Método de Newton ([5], [13]).

Usando-se o método de Newton tem-se o seguinte fluxograma para o método do tiro:

1) Escolher um vetor inicial $t^{(0)}$

2) Determinar $y(xb\ ;\ t^{(i)})$, resolvendo o problema de valor inicial:

$$y'(x) = f(x, y(x, t))\ ;\ y(xa) = t^{(i)}$$

3) Calcular $G(t^{(i)}) = r(t^{(i)}, y(xb\ ;\ t^{(i)}))$

4) Verificar se $G(t^{(i)}) < \varepsilon$

SIM → Para e imprime $t^{(i)}$ e $y(xb\ ;\ t^{(i)})$

Não → Continua

5) Cálculo aproximado de $\nabla G(t^{(i)})$: $\nabla_{ij}\, G(t^{(i)}) =$

$$[G_i(t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \dots t_j^{(i)} + \Delta t_j, \dots t_n^{(i)}) - G_i(t_1^{(i)}, \dots, t_j^{(i)}, \dots, t_n^{(i)})]/\Delta t_j$$

6) Solução do sistema: $- G(t^{(i)}) = \nabla G(t^{(i)})\ \Delta t^{(i)}$

7) Calcular $t^{(i+1)}$: $t^{(i+1)} = t^{(i)} + \Delta t^{(i)}$

8) Retomar a (2)

G_i e t_i são, respectivamente, as i-ésimas componentes dos vetores G e t.

Observações:

a) Os teoremas 1 e 2 apresentam condições necessárias para garantir a aplicabilidade do método de Newton:

Se o teorema 1 não for satisfeito, não é possível garantir que G(t) seja definida $\forall\ t \in R^n$. Caso G seja definida num aberto $\Omega \subset R^n$ $(G : \Omega \subset R^n \to R^n)$ e $t^{(i)} \notin \Omega$ para algum i, o método falhará.

Se o teorema 2 não for satisfeito, não é possível, além disso, garantir a existência de $\nabla G(t)$ $\forall\ t \in R^n$

b) Em todas as teorias mencionadas é possível mostrar que, na maioria dos casos, as equações obtidas satisfazem condições análogas às dos teoremas 1 e 2. Ou seja, para todo problema de valor inicial a solução existe, é única e depende de uma maneira continuamente diferenciável do valor inicial.

c) Como será mostrado adiante, dependendo das condições de contorno, é possível fazer algumas simplificações no método apresentado. Para maiores detalhes ver [11].

EXEMPLO

Considera-se o equilíbrio de um semi-anel elástico engastado em uma das extremidades, e na outra solicitado por uma força horizontal P. A figura 1 mostra a estrutura na configuração de referência (um semi-círculo de raio R) e na configuração deformada. s é o comprimento de arco na configuração deformada e S na de referência. $\theta(S)$ é o ângulo que a tangente num ponto material S faz com a horizontal na configuração deformada. $x_1(S)$ e $x_2(S)$ caracterizam a posição de um ponto relativo a um eixo cartesiano fixo onde está a extremidade engastada $(S = 0)$. N(S) é o esforço normal Q(S) o esforço cortante e M(S) o momento fletor

Nas equações seguintes A, I, E são: a área da seção reta, o momento de inércia da seção reta e o módulo de elasticidade, os quais serão considerados constantes. De ([10],[11]) tem-se que as equações que modelam o equilíbrio da estrutura são

$$\frac{dM}{dS} = -\frac{ds}{dS} P \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad M(\pi R) = 0$$

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{M}{EI} - \frac{1}{R} \quad ; \quad \theta(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{ds}{dS} = 1 - \frac{P\cos\theta}{EA} \quad ; \quad s(0) = 0$$

$$\frac{dx_2}{dS} = \frac{ds}{dS} \operatorname{sen}\theta \quad ; \quad x_2(0) = 0$$

$$\frac{dx_1}{dS} = \frac{ds}{dS} \cos\theta \quad ; \quad x_1(0) = 0$$

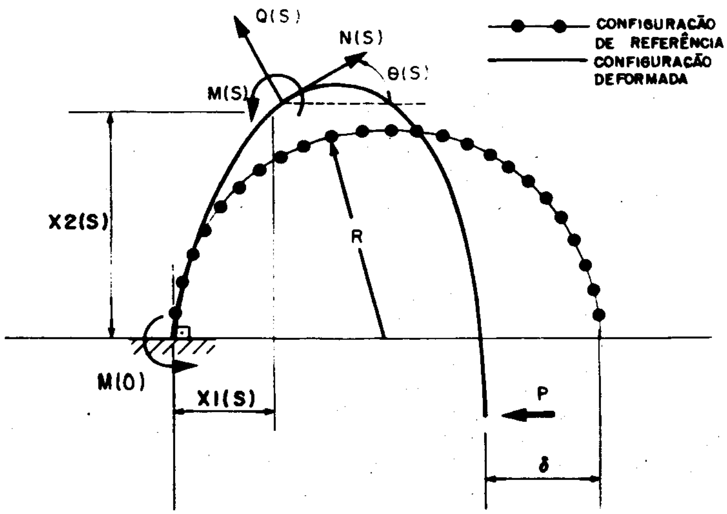

Figura 1

Neste caso a teoria considera a extensibilidade e não são feitas restrições quanto ao tamanho das deformações A e I são a área e o momento de inércia da seção reta, os quais serão considerados constantes.

$$N(S) = -P\cos\theta(S), \quad Q(S) = P\,\mathrm{sen}\theta(S)$$

Este problema não linear de autovalor possui quatro condições de contorno definidas no ponto inicial S=0 do intervalo $[0, \pi R]$ e apenas uma no ponto final $S = \pi R$. Isto permitirá uma simplificação no método apresentado respeitando as idéias básicas.

Resolver este problema é equivalente a encontrar um valor $t \in R$ de forma que, resolvendo o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dM}{dS} = -\frac{ds}{dS} P\,\mathrm{sen}\theta \; ; \; M(0) = t$$

$$\frac{d\theta}{dS} = \frac{M}{EI} - \frac{1}{R} \; ; \; \theta(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{ds}{dS} = 1 + \frac{P\,\mathrm{sen}\theta}{EA} \; ; \; s(0) = 0$$

$$\frac{dx_2}{dS} = \frac{ds}{dS}\,\mathrm{sen}\theta \; ; \; x_2(0) = 0$$

$$\frac{dx_1}{dS} = \frac{ds}{dS}\cos\theta \; ; \; x_1(0) = 0$$

o valor de M no ponto $S = \pi R$ seja igual a zero $(M(\pi R) = 0)$. Ou seja, encontrar a(s) solução(ões) do problema de valor de contorno apresentado é equivalente a encontrar o(s) zero(s) da função

$$G : R \to R \; ; \; G(t) = M(\pi R \; ; \; t, P)$$

Fixado um valor de P, o valor $G(t_0)$ de G para um ponto $t_0 \in R$ é obtido resolvendo-se numericamente o problema de valor inicial apresentado, determinando-se o valor de M no ponto $S = \pi R$.

É importante observar que é possível estudar o sinal de G e, dentro de um intervalo real I $(t \in I)$ garantir a determinação de todas as soluções do problema de valor de contorno.

Neste caso (como $G : R \to R$) pode ser mais interessante utilizar o método da bisseção ou regula-falsi [13] no lugar do de Newton para determinar o(s) zero(s) de G, já que eles não necessitam da determinação de derivadas de G.

Na apresentação dos resultados todas as variáveis do problema foram adimensionalizadas. Em vez de P e M serão usados P/P^* e M/M^*, onde $P^* = EI/R^2$ e $M^* = EI/R$. As variáveis com dimensão de comprimento foram divididas por $L^* = \pi R$. No processo de adimensionalização surge um parâmetro de extensibilidade definido por $C = I/(AR^2)$.

A figura 2 mostra as curvas da carga P versus o momento no engaste $(S = 0)$ para $C = 1.E-5$. Fixado um valor de P/P^*, cada ponto das curvas corresponde a uma solução do problema. À partir de $P/P^* \simeq .471$ são encontradas três soluções dado um valor qualquer de P/P^*. Cada solução corresponde a uma configuração de equilíbrio, consequentemente o modelo permite a existência de mais de uma configuração de equilíbrio para alguns valores de P/P^*.

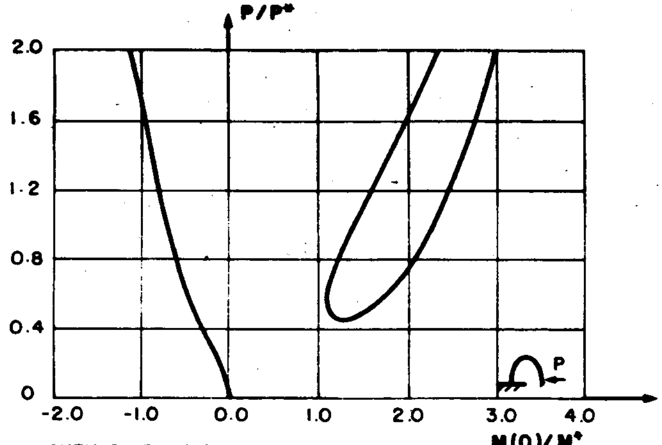

Figura 2

A figura 3 mostra as curvas da carga P versus x_2 (πR) para C=1.E-5.

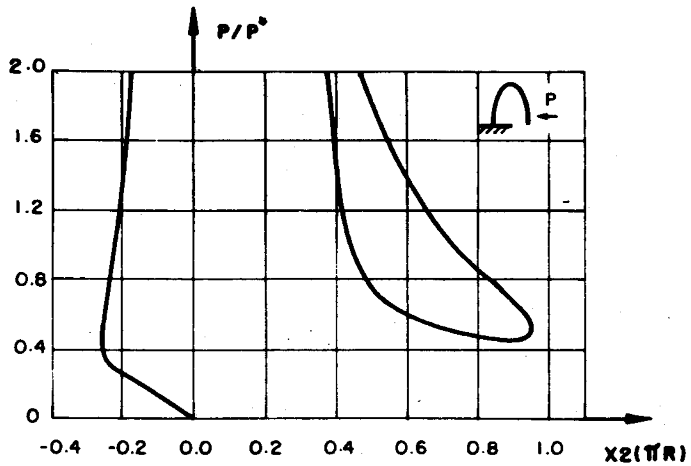

Figura 3

Usando a figura 2 como referência é possível traçar a sequência de configurações deformadas relativas a cada curva. Na figura 4 está dada a sequência de configurações relativas à curva que se inicia em P/P* = 0. Na figura 5 está dada a sequência de configurações relativas à segunda curva.

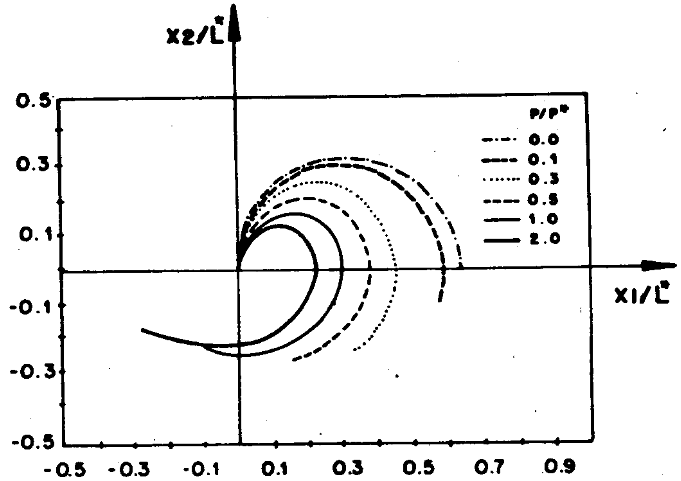

Figura 4

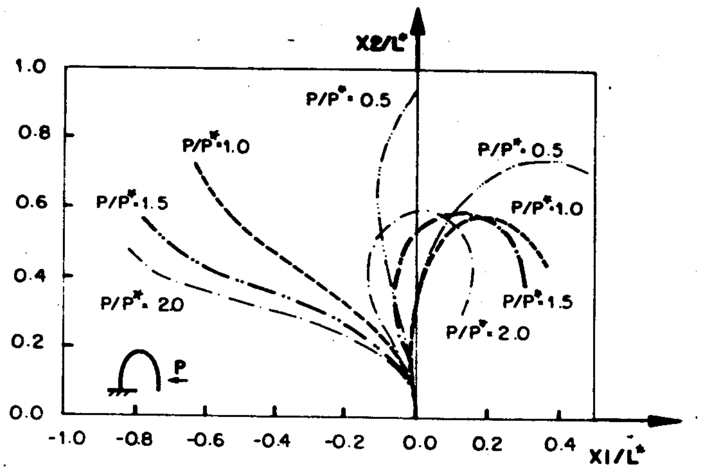

Figura 5

CONCLUSÃO

Com o material apresentado é possível a solução numérica de problemas de valor de contorno que modelam o equilíbrio de estruturas unidimensionais elásticas. O método é bastante simples permitindo o estudo de problemas não-lineares, sendo particularmente eficiente em problemas de bifurcação e nos casos onde ocorrem soluções múltiplas.

REFERÊNCIAS

[1] De Silva, C., "A Nonlinear Theory of Elastic Directed Curves"., Int. J. Eng. Sci., Vol. 4, 1966, pags. 411-422.

[2] Kafadar, C.B., "On the Nonlinear Theory of Rods", Int. J. Eng. Sci., Vol. 10, 1972, pags. 369-391.

[3] Antman, S., "The theory of Rods", Handbuch der Physik, Vol. VIa/2, Springer-Verlag, 1972.

[4] Green, A.E., Naghdi, M. L., Werner, "On the Theory of Rods", Proc. R. Soc. Lond., A.337, 1974, pags. 451-507.

[5] Stoer, J., Bulirsh, R., "Introduction to Numerical Analysis", Springer-Verlag, 1980.

[6] Keller, H.B., Antman, S., "Numerical Solution of Bifurcation and Nonlinear eigenvalue problems".

[7] Claren, R., Diana, G., "Mathematical Analysis of Transmition Line Vibration", IEE trans. PAS-88(2), 1969, pags. 1741-1771.

[8] Nordell, W.J., Meggit, D.J. "Undersea Suspended Cables Structures", ASCE J. Struc. Div., 107(ST6), 1981, pags. 1025-1040.

[9] Tadjbaksh, I.G., Soibell, E., "Constant Twist Deformation of Cables", Int. J. Eng. Sci., Vol. 21, 1983, pags. 263-268.

[10] Pereira de Almeida, M., Sampaio, R., "Flambagem de barras extensíveis". COBEM, 1983.

[11] Costa Mattos, H.S., "Método do Tiro para Resolução de Estruturas Unidimensionais", Tese de Mestrado, Dep. Eng. Mec. PUC/RJ, 1984.

[12] Coddington, E., Levinson, N., "Theory of Ordinary Differential Equations", McGraw-Hill, 1955.

[13] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables", Academic Press, 1970.