CARGAS AERODINAMICAS SOBRE SUPERFICIES SUSTENTADORAS EN FLUJO SUBSONICO
(casos estacionario y no estacionario)

Claudia A. Sagastizábal
Grupo de Análisis Numérico y Computación.
Facultad de Matemática, Astronomía y Física.
Universidad Nacional de Córdoba.
Córdoba - Argentina.
José P. Tamagno
Departamento de Ingeniería Aeronáutica.
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
Universidad Nacional de Córdoba.
Córdoba - Argentina.

RESUMEN

Se ha desarrollado un método, y el correspondiente programa de cómputo, para el cálculo de las fuerzas aerodinámicas inestacionarias que se inducen sobre superficies portantes oscilando armónicamente en flujo subsonico. Dada su simplicidad y versatilidad es aplicable a plantas alares de geometría compleja, aun cuando éstas incluyan superficies de comando. Su aplicación implica discretizar la superficie en un número determinado de paneles, sobre cada uno de los cuales se calcula la fuerza aerodinámica concentrada al 25% de la cuerda. En cuanto a la imposición de la condición de flujo tangente a la superficie, ésta se realiza en el 75% de la cuerda de cada panel. Se efectuaron cálculos numéricos para varias geometrías de ala y se presentan resultados obtenidos, comparándolos con otros análisis y experimentos.

ABSTRACT

A method with its correspondent computer program for calculating the unsteady aerodynamic loads on harmonically oscillating wings in subsonic flow, has been developed. Because of its simplicity and versatility it can easily be applied to complex planform wings, even if they have control surfaces. For this method to be applied, the wing has to be divided on a certain number of surface panel elements on each of which the 1/4-3/4 chord rule is adopted. That is, a concentrated aerodynamic load at the 1/4 panel chord point is computed with the tangent flow condition imposed at the 3/4 chord point. Numerical calculations were carried out for several wing geometries. The results obtained are presented and compared with other analysis and experiments.

NOMENCLATURA

a_{ik}	= elemento de matriz [A] (ecuación 20).
A_i	= área del elemento de superficie i-ésimo.
A	= alargamiento del ala.
B, B_R, B_I	= funciones definidas en ecuaciones (2), (3) y (4).
C_L , C_l	= coeficientes de sustentación (reales o complejos).
C_M , C_m	= coeficientes de momento (reales o complejos).
h	= amplitud del desplazamiento del ala.
Im	= parte imaginaria.
I_n	= términos de recurrencia definidos en ecuaciones (7) a (10).
k	= frecuencia reducida.
K	= función núcleo, definida en ecuación (2).
K_1	= función de Bessel modificada de segunda especie.
M	= número Mach.
NX	= número de elementos según la cuerda.
NY	= número de elementos según la semienvergadura.
p_i	= diferencia de presiones en el panel i-ésimo.
Δp	= función diferencia de presiones.
Re	= parte real
s_i	= semi-ancho del panel i-ésimo.
S	= área total del ala.
U	= velocidad flujo uniforme.
w	= componente normal de velocidad.
x'	= eje respecto del cual se toman momentos.
α	= ángulo de ataque del ala.
β	= $\sqrt{1 - M^2}$.
γ	= constante de Euler.
Λ	= ángulo de flecha del ala.
η, ξ	= variables de integración.
λ	= ahusamiento.
ϕ	= ángulo de fase.

Subíndices

i,j	= individualizan paneles i-ésimo y j-ésimo.
L,l	= fuerzas de sustentación.
M,m	= momentos.

INTRODUCCION

Para la predicción de las velocidades a las cuales pueden presentarse inestabilidades aeroelásticas dinámicas (flutter), el análisis de la interacción entre cargas aerodinámicas inestacionarias y la estructura desempeña un rol esencial. Por esta razón todo método que conduzca a la evaluación de la distribución de cargas aerodinámicas en un ala en movimiento oscilatorio es siempre de interés, máxime si dicho método es conceptualmente simple y resulta de fácil integración con la parte estructural.

Para el cálculo de la distribución de presiones inestacionaria sobre una superficie portante, en flujo subsónico, numerosos métodos han sido formulados desde que Kussner en 1940 planteara la ecuación integral básica. Tales métodos pueden dividirse en dos categorías principales, los que emplean funciones modales ([1], [2], [3]) y los que utilizan elementos discretos ([4], [5], [6]).

Con los del primer tipo, si bien se han aplicado con éxito a configuraciones convencionales, se pueden presentar dificultades cuando existen discontinuidades en las condiciones de contorno, como por ejemplo con las superficies de control. Además si la configuración es geométricamente compleja, los resultados son sensibles a la manera de representar la superficie portante en estudio.

Un procedimiento típico de la clase que emplea elementos discretos es el distribuir dobletes sobre la superficie portante. Este método ha tenido amplia aceptación en razón de su fácil aplicabilidad a superficies alares complejas, pero en su modo corriente de utilización, presenta una inconsistencia intrínseca ya que no es aplicable a la parte estacionaria de la solución (caso de frecuencia reducida nula) aun cuando las ecuaciones básicas de dobletes son válidas. En [7] se establece que esta inconsistencia reconoce como origen la integral impropia que resulta de la formulación del problema via la utilización de dobletes de aceleración.

El método que aquí se expone también pertenece a la clase que discretiza a la superficie portante en una serie de elementos o paneles. Sobre cada uno de ellos se supone la fuerza aerodinámica concentrada en el punto 1/4 de la cuerda, mientas que la condición de contorno (upwash) se satisface en el punto 3/4 de dicha cuerda. Es decir se adopta la regla 1/4-3/4. La ecuación integral básica, punto de partida del método, no es exactamente la de Kussner extendida para incluir efectos de compresibilidad, sino que ha sido rederivada de conformidad con los lineamientos propuestos por Dat [8]. En cuanto a la evaluación de la parte singular de la integral, ésta se realiza en el sentido de Mangler, pero utilizando el esquema propuesto por Ueda y Dowell [7], para incluir sus efectos en un sistema discreto como el que aquí se utiliza. Resulta así un simple esquema de cálculo aplicable al caso inestacionario a la vez consistente con el caso estacionario.

Este método ha sido programado en lenguaje Fortran para su uso en computadora Digital PDP 11/23 con sistema operativo RT 11 XM y/o sistemas compatibles ocupando hasta 28 Kb de memoria extendida para un caso típico, con un tiempo promedio de generación de la matriz de unos 40 minutos.

Se presentan algunos de los resultados obtenidos mediante la aplicación del programa de cómputo elaborado, y se compara con otros análisis y experimentos. Detalles adicionales referentes a aspectos teóricos del método y su implementación computacional pueden verse en [9].

ECUACIONES BASICAS

La relación física entre la componente normal de la velocidad, w, y la distribución de presiones, Δp, sobre superficies portantes en flujo subsónico (M<1) está dada por la siguiente ecuación integral [7]:

$$w(x,y) = (1/8\pi) \iint_S \Delta p(\xi,\eta)\, K(x_0,y_0)\, d\xi\, d\eta \qquad (1)$$

donde S es el área de la planta alar apoyada en el plano Z=0. Además todas las variables están adimensionadas. En (1) el núcleo K es:

$$K(x_0,y_0) = e^{-ikx_0}\left\{\frac{M\, e^{ikX}}{(\sqrt{X^2+r^2}+MX)\sqrt{X^2+r^2}} + B(k,r,X)\right\} \qquad (2)$$

habiendo definido los parámetros:

$$x_0 = x - \xi \qquad y_0 = y - \eta \qquad r = |y_0|$$

$$R = (x_0^2+\beta^2 r)^{1/2} \qquad X = (x_0 - MR)/\beta^2$$

y la función integral compleja:

$$B(k,r,X) = \int_{-\infty}^{X} \frac{e^{ikv}}{(v^2+r^2)^{3/2}}\, dv \qquad (3)$$

cuyas partes real e imaginaria resultan:

$$B_R(k,r,X) = \int_{-\infty}^{X} \frac{\cos(kv)}{(v^2+r^2)^{3/2}}\, dv \qquad (4)$$

$$B_I(k,r,X) = \int_{-\infty}^{X} \frac{\operatorname{sen}(kv)}{(v^2+r^2)^{3/2}}\, dv \qquad (5)$$

Puesto que el núcleo K corresponde a un campo de velocidades producido por un doblete de aceleración concentrado en (ξ,η), se dirá que tal punto es un 'doblete' y, análogamente, que (x,y) es un punto de 'upwash', donde se ubica la velocidad normal al panel considerado.

Usando funciones de Bessel, es posible obtener desarrollos en serie para la función B que permitan su cálculo numérico [7], tanto para casos estacionarios (k=0) como inestacionarios (k>0). Estos desarrollos son:

$$B_R(k,r,X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2n} - \frac{k^2}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kr/2)^{2m}}{m!(m+1)!}\cdot\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j} + \frac{1}{2(m+1)} + \gamma - \ln(k/2)\right\} \qquad (6)$$

$$B_I(k,r,X) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2n+1} - \frac{\pi}{4} k^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kr/2)^{2m}}{m!(m+1)!} \qquad (7)$$

donde los I_n se definen recurrentemente como

$$I_n = \frac{k}{(n-2)n!} \cdot \frac{(kX)^{n-1}}{\sqrt{X^2 + r^2}} - \frac{(kr)^2}{n(n-2)} I_{n-2} \quad \text{para } n>2 \tag{8}$$

y los términos iniciales de la fórmula están dados por

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{X^2 + r^2}\,(\sqrt{X^2 + r^2} - X)} \tag{9}$$

$$I_1 = \frac{k}{\sqrt{X^2 + r^2}} \tag{10}$$

$$I_2 = -\frac{k^2}{2} \cdot \left\{ \frac{X}{\sqrt{X^2 + r^2}} + \ln(\sqrt{X^2 + r^2} - X) \right\} \tag{11}$$

TRATAMIENTO DE LAS SINGULARIDADES

Se observa que la ecuación (4) no está definida si $r \longrightarrow 0$ para $X>0$ (es infinita), por lo cual cada vez que la integración incluye esta región es necesario introducir la integral de Mangler o del valor principal [10], que permite reacomodar la serie de modo tal que se pueda integrar el término logarítmico en (6). Se define pues, para $X>0$ y $r<s$:

$$\neq\!\!\!\!\!\!\int_{-s}^{s} B_R(k,r,X)\, dy_0 = \lim_{e \to 0} \left\{ \left(\int_{-s}^{-e} + \int_{e}^{s} \right) (B_R(k,r,x)\, dy_0 - \frac{4}{e} \right\} \tag{12}$$

o equivalentemente,

$$\neq\!\!\!\!\!\!\int_{-s}^{s} B_R(k,r,X)\, dy_0 = \int_{-s}^{s} (B_R(k,r,x) - \frac{2}{r^2})dy_0 - \frac{4}{s} \tag{13}$$

teniendo ahora la integral del miembro derecho de (13) un valor finito.

Puesto que cuando es $X>0$ surgen los inconvenientes, es útil relacionar B_R para valores positivos y negativos de dicho argumento:

$$X > 0 \implies B_R(k,r,X) = -B_R(k,r,-X) + 2\,\frac{k}{r}\,K_1(kr) \tag{14}$$

donde K_1 es la función de Bessel de segunda especie modificada [9], y así, si:

$$\begin{matrix} ks \ll 1 \\ X > 0 \end{matrix} \implies B_R(k,r,X) \simeq -B_R(k,r,-X) + k^2 \cdot \{\ln(ks/2) + \gamma - 3/2\} - \frac{2}{s^2} \tag{15}$$

o, estimando más ajustadamente el último término haciendo una integración de punto medio para $f(x) = \frac{1}{x^2}$, [9], en (15) será:

$$\begin{matrix} ks \ll 1 \\ X > 0 \end{matrix} \implies B_R(k,r,X) \simeq -B_R(k,r,-X) + k^2 \cdot \{\ln(ks/2) + \gamma - 3/2\} - \frac{\pi^2}{6s^2} \tag{16}$$

DISCRETIZACION

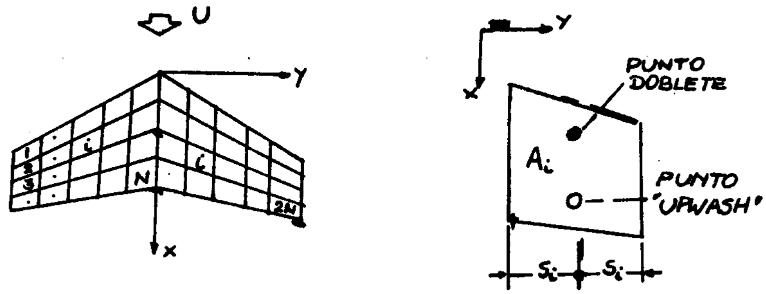


Figura 1
Area de cada panel = A_i, base mayor = $2s_i$

Considerando el ala como una superficie, la discretización consistirá en dividir la cuerda raíz en NX intervalos y la envergadura en 2NY segmentos, los cuales generan 2N=2NXNY elementos trapezoidales de superficie o 'paneles'.

En cada uno de los paneles se concentra la sustentación en el doblete (ξ_i,η_i), de abscisa igual a un cuarto de la cuerda del panel y ordenada un medio de su envergadura; similarmente, la velocidad normal se fija en el upwash (x_i,y_i) con abscisa tres cuartos de la cuerda y ordenada igual a la del doblete i-ésimo.

Entonces, en (1), el integrando es ahora una función escalonada, constante en cada panel:

$$w(x_i,y_i) = (1/8\pi) \iint_{U\{A_k/k=1,\dots,2N\}} \Delta p(\xi,\eta)\, K(x_i-\xi,y_i-\eta)\, d\xi\, d\eta, \quad i=1,\dots,2N \qquad (17)$$

$$= (1/8\pi) \cdot \sum_{k=1}^{2N} \iint_{A_k} \Delta p(\xi_k,\eta_k)\, K(x_i-\xi_k,y_i-\eta_k)\, d\xi_k\, d\eta_k \qquad (18)$$

$$= (1/8\pi) \cdot \sum_{k=1}^{2N} \Delta p(\xi_k,\eta_k)\, K(x_i-\xi_k,y_i-\eta_k)\, A_k \qquad (19)$$

y, llamando

$$w_i = w(x_i,y_i) \qquad (20)$$

$$a_{ik} = A_k K(x_i-\xi_k,y_i-\eta_k)/8\pi \qquad (21)$$

$$p_k = \Delta p(\xi_k,\eta_k) \qquad (22)$$

(19) se convierte en

$$w_i = \sum_{k=1}^{2N} a_{ik}\, p_k \qquad i=1,\dots,2N \tag{23}$$

que no es otra cosa que un sistema lineal de ecuaciones con incógnita p, el vector de presiones.

Para incluir el efecto de la integración de Mangler y Ueda en el modelo discreto, cada vez que

$$r = 0 \qquad y_i = \eta_j \qquad x_i > \xi_j \tag{24}$$

(análogo discreto de X>0 y ks<<1)

debe ponerse

$$B_R(k,r,X) \simeq - B_R(k,r,-X) - \frac{\pi^2}{6 s_j^2} + k^2 \cdot (\ln(k s_j /2) + \gamma - 3/2) \tag{25}$$

Obsérvese que la (24) equivale a que el j-ésimo upwash se encuentre alineado por debajo del i-ésimo doblete.

VECTOR INDEPENDIENTE

Con $z = h(x,y,t)$ como ecuación de la superficie sustentadora, la condición de contorno que generaliza el requerimiento del estado estacionario de flujo tangente a la superficie puede establecerse como:

$$w_i = \frac{\partial h}{\partial x}(x_i,y_i) + k\, h(x_i,y_i) \qquad , \; i=1,\dots,2N \tag{26}$$

CARGAS AERODINAMICAS

Una vez resuelta (23), pueden obtenerse a partir de los diferenciales de presión los momentos y las cargas de sustentación discretos:

<u>Parciales</u> ===>

$$C_l(j) = \sum p_i A_i \;/\; \sum A_i \tag{27}$$

$$C_m(j) = \sum p_i A_i (x' - x_i) \;/\; \sum A_i \tag{28}$$

<u>Totales</u> ===>

$$C_L = \sum C_l(j) \cdot \sum A_i \;/\; S \tag{29}$$

$$C_M = \sum C_l(j) \cdot \sum A_i \;/\; S \tag{30}$$

donde

$i = (j-1)\cdot NX, \dots, j\cdot NX$
$j = 1, \dots, 2N$
x'= eje respecto del cual se toman los momentos
S = área total del ala.

RESULTADOS DE CALCULOS NUMERICOS

Para un ala rectangular de A=2 oscilando en cabeceo alrededor de un eje que pasa por la mitad de la cuerda, se han calculado distribuciones de presiones a lo largo de la cuerda, distribución de sustentación según la envergadura del ala y valores totales de sustentación y momento respecto del eje alrededor del cual se producen las oscilaciones.

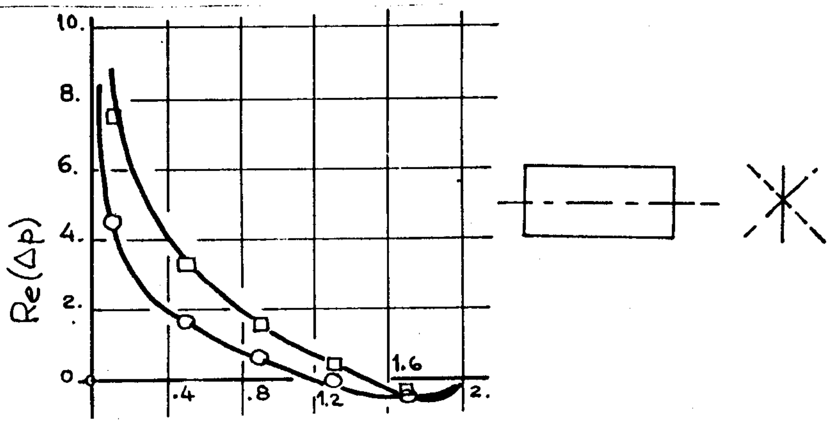


Fig. 2a

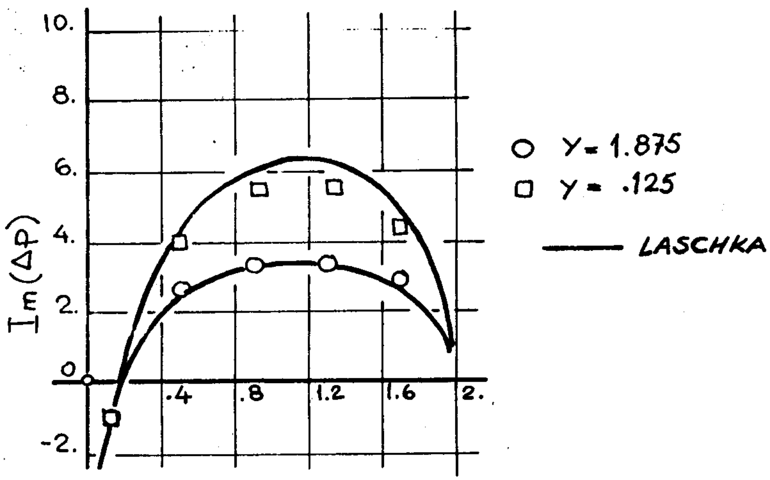


Fig. 2b Distribución de presiones sobre un ala rectangular.
(A=2; k=1, M=0, NX=5, NY=8, Δ=0°, λ=1)

Las figuras 2a y 2b muestran las partes real e imaginaria de las presiones que se inducen según la cuerda. El caso presentado corresponde a una frecuencia reducida k=1, número de Mach M=0, con 5 paneles según la cuerda y 8 estaciones en la semienvergadura. La comparación con el análisis de Laschka, [2], puede considerarse satisfactoria.

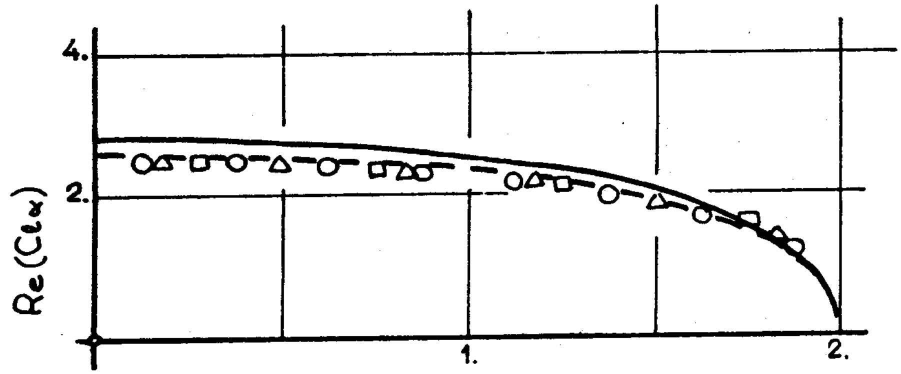


Fig. 3a

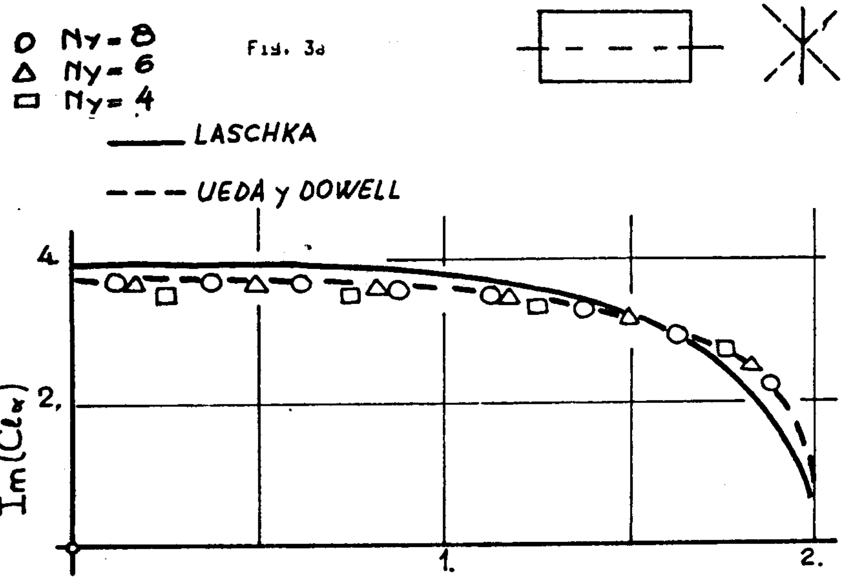


Fig. 3b Dependencia del número de elementos a lo largo de la envergadura (A=2; k=1, M=0, NX=5, Δ=0°, λ=1)

En las figuras 3a y 3b, se presentan la parte real e imaginaria de la sustentación local en términos del coeficiente C_{ℓ_α}. Es interesante observar la dependencia de los resultados con el número de estaciones consideradas según la envergadura del ala. Se constata que aún con sólo cuatro elementos se obtiene una solución adecuada a los fines prácticos.

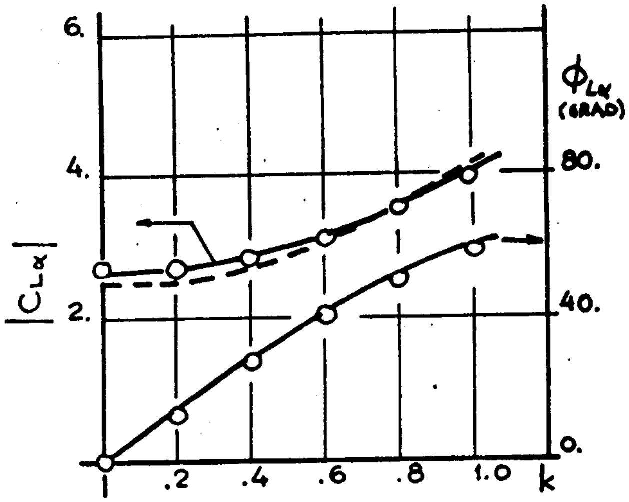
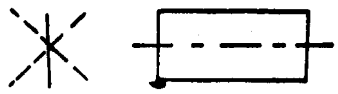


Fig. 4a



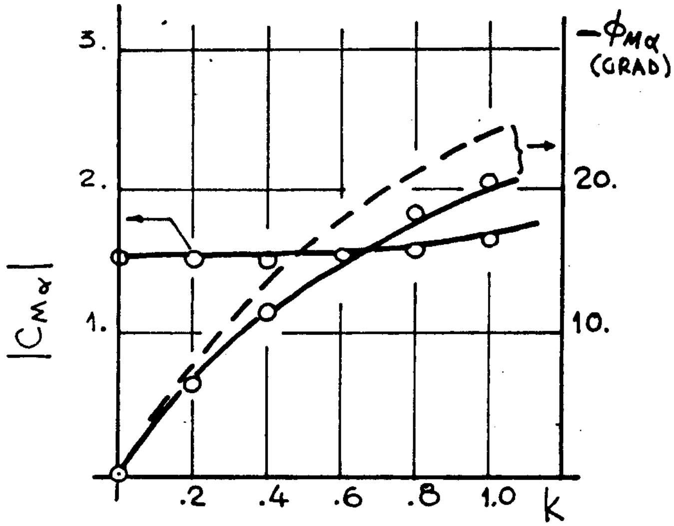
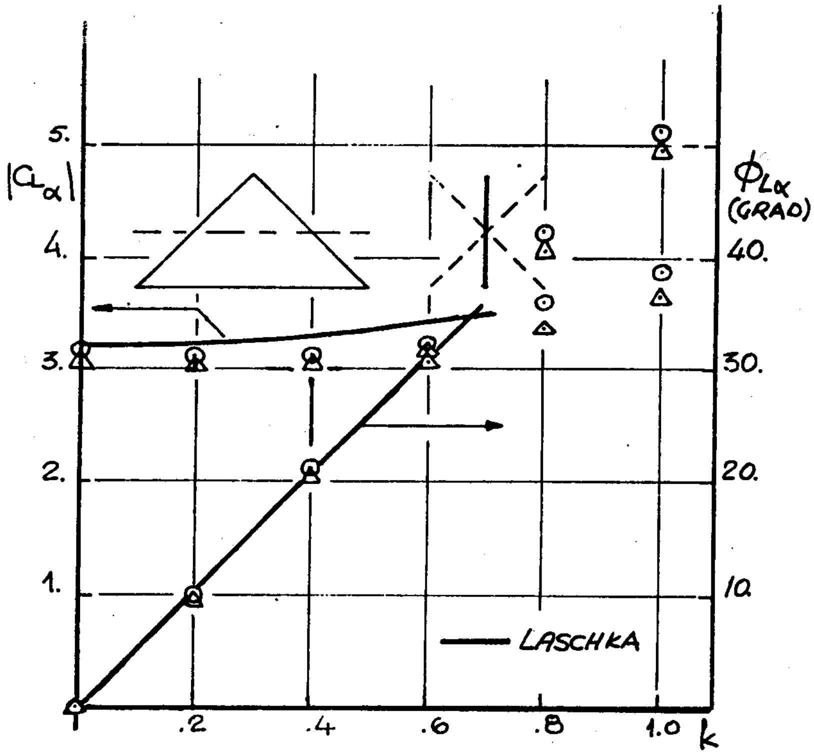


Fig. 4b Sustentación y momento vs. frecuencia reducida
(A=2, M=0, NX=5, NY=8, Δ =0°, λ=1)

Los coeficientes de sustentación total y momentos de esta ala oscilatoria para M=0, se comparan en las fig. 4a y 4b con los resultados de Ueda y Dowell, y de Lawrence y Gerber, [12], para varias frecuencias reducidas.



⊙ NX = 5 ; NY = 8
Δ NX = 8 ; NY = 5

Fig. 5a Sustentación vs. frecuencia reducida - Ala Delta (A=4, M=0)

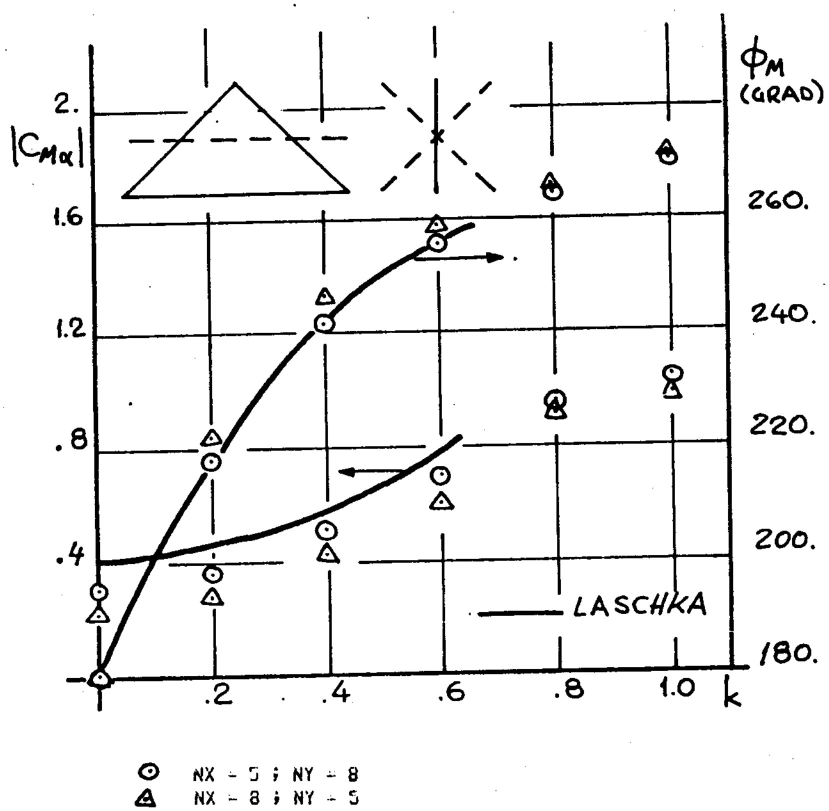


Fig. 5b   Momento vs. frecuencia reducida - Ala Delta
(A=4, M=0)

En las fig. 5a y 5b, se muestran los resultados para un ala delta de A=4 que oscila alrededor de un eje que pasa por la mitad de su cuerda raíz. La abscisa es la frecuencia reducida. Tanto el coeficiente de sustentación como el de momento y sus correspondientes ángulos de fase concuerdan satisfactoriamente con los calculados por Laschka, [2], al menos hasta la frecuencia reducida a que estos últimos fueron obtenidos.

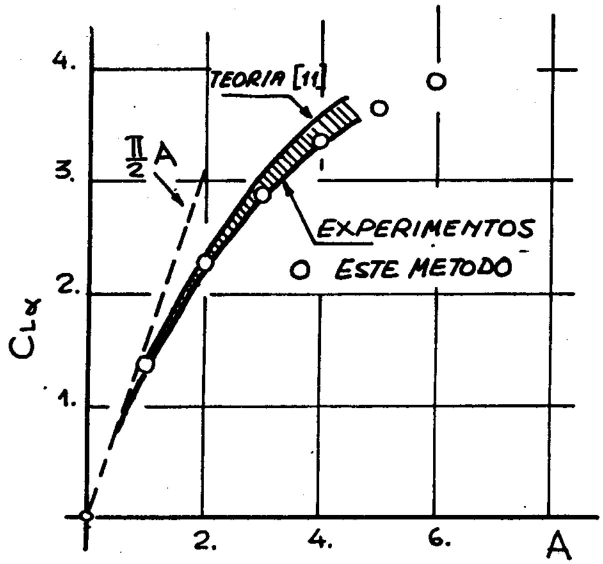
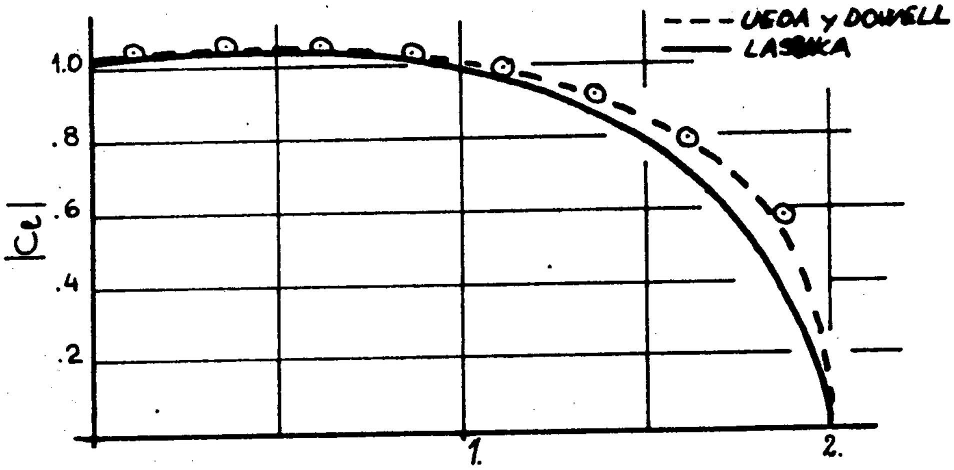


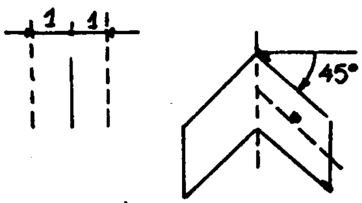
Fig. 6 Pendiente de sustentación para alas delta con diferentes alargamientos

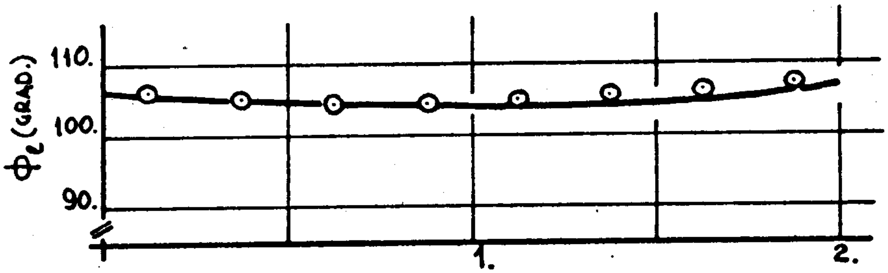
En la fig. 6 se representan las pendientes de sustentación para alas delta con diferentes alargamientos. Los cálculos fueron efectuados para el caso estacionario (k=0) e incompresible (M=0). Se observa que los resultados obtenidos con el método que aquí se presenta tienden a describir quizás un tanto mejor los resultados experimentales, cuando se los compara con otras teorías, por ejemplo [11].

También se ve de la fig. 6 que los valores que predice el método concuerdan con las estimaciones que provee la teoría de los cuerpos esbeltos aplicada a alas de muy bajo alargamiento. Esta es una característica fundamental de todo método basado en técnicas de superficie sustentadora, en contraposición a la línea sustentadora.



Fis. 7a





Fis. 7b Coeficientes de sustentación locales inducidos por oscilaciones verticales de un ala en flecha. (A=2, k=0.4, M=0, NX=5, NY=8, Δ=45°)

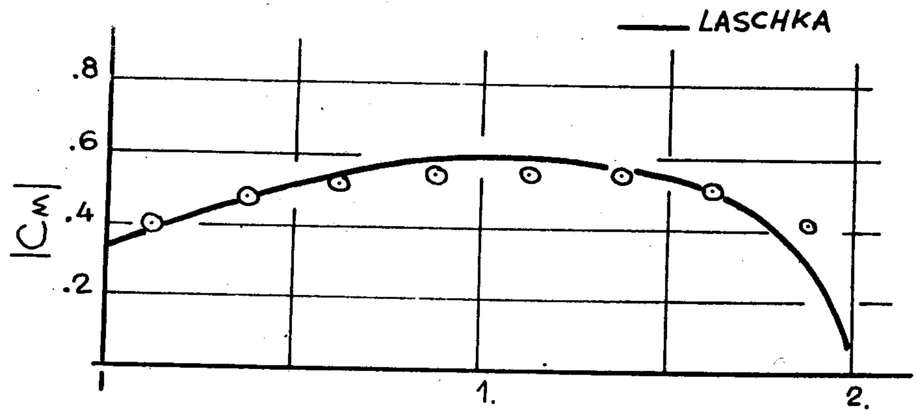


Fig. 7c

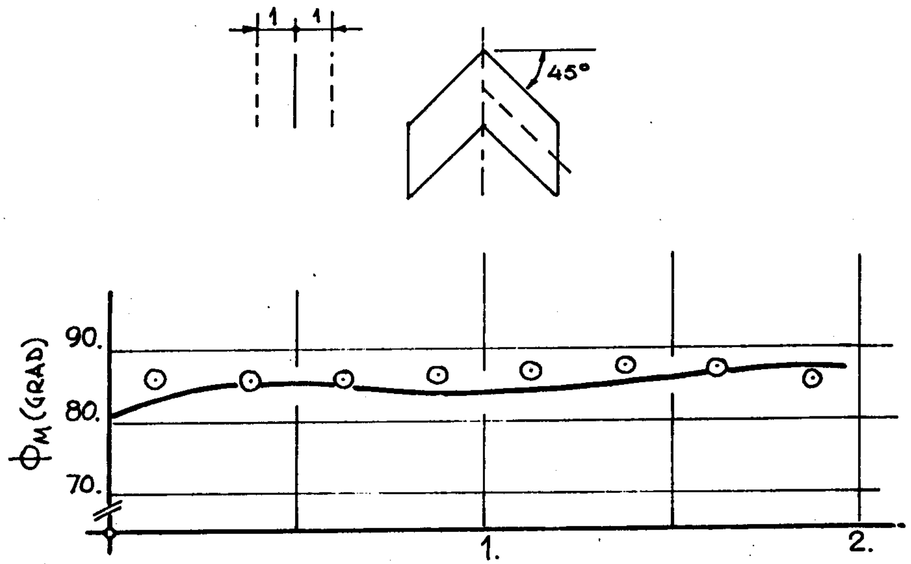


Fig. 7d Coeficientes de momento locales inducidos por oscilaciones verticales de un ala en flecha.
(A=2, k=0.4, M=0, NX=5, NY=8, Δ=45°)

Finalmente, en las fig. 7a-7d se muestran los resultados obtenidos con un ala de A=2, que tiene una flecha de 45° y que con una frecuencia reducida de k=0.4, oscila verticalmente (heaving motion) con amplitud unitaria. Los coeficientes de momento locales se toman respecto del punto medio de la cuerda local. Dichos resultados se comparan con los de Ueda y Dowell [7] y Laschka [2].

Si bien en todos los casos aquí considerados se ha supuesto el fluido incompresible (M=0), el problema ha sido formulado incluyendo efectos de compresibilidad y el programa de cómputo permite también considerar casos con M≠0.

CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método para el cálculo de fuerzas aerodinámicas inestacionarias subsónicas en superficies portantes de envergadura finita. Los resultados numéricos son promisorios si se tiene en cuenta que por su simpleza es de fácil implementación en computadora, máxime si se utiliza un algoritmo computacionalmente tan eficiente como el propuesto por Ueda, [7], para actuar frente a la singularidad que posee el núcleo de la ecuación integral (1).

Desde el punto de vista de sus aplicaciones, al adoptar el concepto de fuerzas concentradas en elementos de la superficie (regla 1/4 - 3/4), resulta particularmente atractivo para incorporar, en el análisis aeroelástico de las alas, como generador de las excitaciones aerodinámicas. Además puede resultar de interés para el cálculo de la contribución del ala en algunas de las denominadas $\dot{\alpha}$ derivadas de estabilidad ($C_{L_{\dot{\alpha}}}$, $C_{M_{\dot{\alpha}}}$, $C_{H_{\dot{\alpha}}}$).

Por otra parte, se ha mostrado que cuando k=0 (caso estacionario) puede llegar a ser un eficiente método del tipo superficie sustentadora para predicciones de cargas y coeficientes aerodinámicos de alas con geometría compleja.

REFERENCIAS

[1] WATKINS, C. et al — "A systematic kernel function procedure for determining aerodynamic forces on oscillating or steady finite wings" NASA TR, R-48, 1959.

[2] LASCHKA, B. — "Zur theorie der harmonisch schwingenden tragenden flache bei unterschallanstromung" Zeitschrift für Flugwissenschaften, 7, 1963.

[3] ROWE, W. et al. — "Prediction of Unsteady aerodynamic loadings caused by leading and trailing edge control surface motion in subsonic compressible flow. Analysis and Results" NASA CR-2543, 1975.

[4] LANDAHL, M. y STARK, J. — "Numerical lifting-surface theory - Problems and Progress" AIAA Journal, vol. 6, Nov. 1968.

[5] ALBANO, E. y RODDEN, W. — "A doublet-lattice method for calculating lift distributions" AIAA Journal, vol. 7, Feb. 1969.

[6] JORDAN, P. — "Reliable lifting surface solutions for unsteady flow" Journal of Aircraft, vol. 15, Set. 1978.

[7] UEDA, T. y DOWELL, E. — "A new solution method for lifting surfaces in subsonic flow" AIAA Journal, vol. 20, Mar.1982.

[8] DAT, R. — "La théorie de la surface portante apliquée à l'aile fixe et à l'hélice" Rech. Aerosp., 4, Julio-Agosto 1973.

[9] SAGASTIZABAL, C. y TAMAGNO, J. Cargas aerodinámicas sobre superficies sustentadoras, Trabajo Especial de Matemática, IMAF, U.N.C., 1984.

[10] MANGLER, K. — "Improper integrals in theoretical aerodynamics" RAE Rpt.Aero. 2424, 1951.

[11] TRUCKENBRODT, E. — "Tragflachentheorie bei inkompressibler Strömung" WGL, S 40-56, Jb. 1953.

[12] LAWRENCE, H. y GERBER, E. — "The aerodynamic forces on low aspect ratio wings" Journal of Aeronautical Sciences, 19, Nov.1952.