

FORMULACION DEL PROBLEMA DE CONSOLIDACION NO LINEAL  
POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

Carlos Aguirre

Departamento de Obras Civiles. Facultad de Ingeniería.  
Universidad Técnica Federico Santa María.  
Valparaíso - Chile

Héctor Jensen

Departamento de Obras Civiles. Facultad de Ingeniería  
Universidad Técnica Federico Santa María.  
Valparaíso - Chile

Isaac Flores

RESUMEN

La estimación de las deformaciones en fundaciones bajo consolidación primaria se resuelve usualmente mediante la teoría del flujo unidimensional de Terzaghi.

Este trabajo, basado en la teoría de Biot, presenta una formulación variacional que incorpora el problema de valores iniciales en el funcional asociado, considerando la no-linealidad y dependencia temporal del problema.

Se muestran finalmente algunos resultados comparativos obtenidos mediante este esquema de elementos finitos con otras soluciones del mismo problema.

ABSTRACT

The settlement in foundations under primary consolidation is usually solved by mean of Terzaghi's one dimensional flow theory.

The problem is transient and non-linear type which makes appropriate to use a finite element algorithm to solve it. This work, based on Biot's theory presents a variational approach wich include the initial value problem in the associated functional considering non linear laws and the temporal dependence of the problem.

## INTRODUCCION

El proceso de consolidación identifica las deformaciones que ocurren en un suelo saturado, el cual al ser cargado origina un escurrimiento del agua contenida en sus poros.

El fenómeno fue tratado por K. Terzaghi [1] quién estableció el concepto de tensión efectiva, considerando el suelo como un material elástico-poroso saturado con agua, lo cual aplicó a un suelo lateralmente confinado sometido a una carga constante.

Un tratamiento mas general ha sido propuesto por Biot [2] quién deriva para un modelo tridimensional las ecuaciones que rigen la consolidación.

Para representar en forma realista las propiedades del suelo se requiere el uso de parámetros medidos en Laboratorio, cuyo comportamiento es claramente no lineal.

El escurrimiento de agua se produce a medida que se disipa la presión de poros en el medio lo que introduce una dependencia temporal en el problema.

Un modelo matemático utilizado por varios autores es el propuesto por Sandhu y Wilson [2] que permite la formulación del problema mediante la optimización de un funcional asociado a la ecuación variacional y; asumiendo un comportamiento lineal del suelo.

Se describe a continuación con una formulación equivalente a la de Sandhu y Wilson una solución del problema mediante elementos finitos incorporando en las propiedades no lineales del suelo en la formulación variacional.

Se presenta finalmente algunos ejemplos procesados usando un modelo bidimensional de deformaciones planas y se compara con resultados reportados por otros autores.

## FORMULACION PROBLEMA DE VALORES INICIALES Y DE CONTORNO

Sea un medio elastro-poroso saturado [3 - 4-5] que cumple las siguientes hipótesis:

- El material es isotrópico y homogéneo.
- Las velocidades de escurrimiento y las deformaciones son pequeñas.
- El suelo está saturado.
- El fluido es incompresible en comparación al suelo.
- No hay reacciones químicas.
- No hay escurrimiento en el instante inicial.
- Es válida la ley de Darcy
- Los esfuerzos totales están relacionados con las deformaciones, por medio de la ley generalizada de Hooke.  
La formulación del problema de consolidación está basado en las siguientes relaciones:

Principio de los esfuerzos efectivos:

$$\bar{\tau}_{ij} = \tau_{ij} + \delta_{ij} P \quad (1)$$

en que

- $\bar{\tau}_{ij}$  : Componentes del tensor de esfuerzos totales
- $\tau_{ij}$  : Componentes del tensor de esfuerzos efectivos o del sólido.
- $P$  : Presión hidrostática o de poros
- $\delta_{ij}$  : Componentes del tensor Delta de Kronecker.

Ecuaciones de equilibrio:

$$\bar{\tau}_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2)$$

en que

- $f_i$  : Componentes del vector de fuerzas volumétricas o de cuerpo.

Relación deformación - Corrimientos :

Considerando teoría de pequeñas deformaciones

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = u_{(i,j)} \quad (3)$$

en que :

- $\epsilon_{ij}$  : Componentes del tensor de deformaciones
- $u_i$  : Componentes del vector de corrimientos

Relaciones constitutivas :

$$\bar{\tau}_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} + \delta_{ij} P \quad (4)$$

en que :  $C_{ijkl}$  : Componentes del tensor de elasticidad

Siendo el medio isotrópico el tensor  $C_{ijkl}$ , está definido en función de dos parámetros independientes; con lo cual la relación 4, se puede expresar como :

$$\bar{\tau}_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \delta_{ij} (\lambda e + P) \quad (5)$$

en que :

- $\mu, \lambda$  : Parámetros de Lamé
- $e$  : Deformación volumétrica

Ecuación de continuidad :

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{i,i}) = -k_i P_{,ii}$$

en que:

$$k_i = \frac{k}{\gamma_w}$$

donde :

$k_i$  = Coeficiente de permeabilidad en dirección cartesiana

$\gamma_w$  = Peso específico

Reemplazando 3 en 4 y ésta en 2 se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales para el campo de corrimientos  $u_i$  y la presión de poros  $P$ . Esto en notación operacional queda expresado por :

$$L. (u_i, P) = g \quad \text{en } \Omega \times (0, +\infty) \quad (7)$$

en que :  $\Omega \subset R^3$  : Dominio espacial

$(0, +\infty)$  : Dominio temporal

$L$  : Operador diferencial de 2° orden, definido por

$$L = \left[ \begin{array}{cc} -\frac{1}{2} C_{jmk\ell} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_\ell} + \delta_{i\ell} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} & \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right) & k_m \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} \end{array} \right] \quad j = 1, 2, 3$$

$$g = \left\{ \begin{array}{c} f \\ 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

$f = (f_i)$  : Componentes del vector de fuerzas volumétricas.

En esta formulación las variables de estado  $u_i(x,t)$  y  $P(x,t)$  están definidos en  $\bar{\Omega} \times [0, +\infty)$  ( $\bar{\Omega}$  clausura de  $\Omega$ ), y deben verificar condiciones de continuidad dadas por :

$$u_i(x,t) \in C^{2,1} \left( \Omega \times [0, \infty) \right)$$

$$P(x,t) \in C^{2,0} \left( \Omega \times [0, \infty) \right) \quad \text{en que}$$

$C^{m,n}(\Omega \times [0, +\infty))$  es el conjunto de las funciones cuya derivada espacial de orden  $m$  y  $n$  y un derivado temporal de orden  $n$  son continuas en los respectivos dominios.

Las condiciones iniciales y de contorno están definidas por :

Deformación volumétrica inicial :

$$u_{i,i} (x,t=0) = 0 \quad \text{en } \bar{\Omega} \quad (9)$$

Condiciones de borde :

$$\begin{aligned} G_1 (u_i) &= \bar{u}_i (x,t) \quad \text{en } \Gamma_d \times [0,+\infty) \\ G_2 (u_i) &= \bar{T}_i (x,t) \quad \text{en } \Gamma_t \times [0,+\infty) \\ G_3 (P) &= \bar{P} (x,t) \quad \text{en } \Gamma_p \times [0,+\infty) \\ G_4 (P) &= \bar{\sigma}_p (x,t) \quad \text{en } \Gamma_{\sigma_p} \times [0,+\infty) \end{aligned} \quad (10)$$

en que:

$\bar{u}_i$  : Desplazamientos especificados  
 $\bar{T}_i$  : Tensiones especificadas  
 $\bar{P}$  : Presión de poros especificados  
 $\bar{\sigma}_p$  : Flujo especificado

$\Gamma_d \cup \Gamma_t = \Gamma_p \cup \Gamma_{\sigma_p} = \Gamma$  Frontera regular de  $\Omega$

$\Gamma_d \cap \Gamma_t = \Gamma_p \cap \Gamma_{\sigma_p} = \emptyset$  Disjuntos

$$G_1 = [\delta_{ji}]$$

$$G_2 = \left[ \frac{1}{2} C_{jmkl} \left( \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_l} + \delta_{il} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) n_m \right] \quad j = 1, 2, 3$$

$G_3 = \text{id}$  ( Función identidad )

$$G_4 = \left[ K_m n_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right]$$

$\hat{n} = (n_i)$  Vector normal exterior a la superficie  $\Gamma$

Las condiciones de borde representadas por los operadores  $G_1$  y  $G_3$  corresponden a las condiciones esenciales y las representadas por  $G_2$  y  $G_4$  corresponden a las condiciones naturales del modelo.

FORMULACION VARIACIONAL

La segunda fila del operador L correspondiente a la formulación fuerte del problema desarrollado en el capítulo anterior, representa la ecuación de continuidad. Esta ecuación se puede resolver con respecto a la variable temporal por medio de la transformación lineal, Transformada de Laplace.

Al reemplazar la condición inicial de Deformación Volumétrica nula se obtiene :

$$u_{i,i}(x,t) + g(t) * K_i P_{,ii} = 0 \quad (11)$$

en que :

\* : Producto convolución definido por

$$g(t) * K_i P_{,ii} = \int_0^t g(t-\tau) k_i P_{,ii}(x,\tau) d\tau$$

g (t) : Función constante (igual a 1)

Desde el punto de vista formal una condición suficiente para que la solución de la ecuación de continuidad tome la forma dada por <sup>11</sup> es que la variación de volumen por unidad de tiempo y la función P<sub>,ii</sub> sean de Orden Exponencial [6]

La formulación del problema queda ahora expresado mediante el Operador L definido por :

$$L = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} C_{jmk\ell} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_\ell} + \delta_{i\ell} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) & -\frac{\partial}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} & g * k_m \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}$$

j= 1,2,3

y las condiciones del problema se refieren a condiciones de contorno definidas por los operadores G<sub>1</sub>, G<sub>2</sub>, G<sub>3</sub> y G<sub>4</sub>.

La Formulación Variacional asociada al problema descrito anteriormente se obtiene através de la Formulación Débil del Método de Galerkin, minimizando la función residuo con respecto a las formas bilineales B<sub>1</sub>(u,v) y B<sub>2</sub>(u,v) [7] definidas por

$$B_1(u,v) = \langle u,v \rangle_\Omega = \int_\Omega u \cdot v \, d\Omega$$

$$B(u,v) = \langle u,v \rangle_\Gamma = \int_\Gamma u \cdot v \, d\Gamma \quad (13)$$

Γ: Frontera de Ω

La minimización de la función residuo toma la forma :

$$\langle \bar{L}_{ij} u_j - g_i, v_i \rangle_{\Omega} = \langle H_{ij} u_j - h_i, v_i \rangle_{\Gamma}$$

en que  $\bar{L} = ( \bar{L}_{ij} ) \quad \forall v_i \in U$  ( Conjunto admisible ) (14)

usando :

$$\begin{aligned} u_n &= P \\ g_i &= f_i \\ g_n &= 0 \\ H_{ni} &= G_n & i=1,2,3 \\ v_n &= Q & j=1,2,3 \\ H_{ij} &= G_{2ij} \end{aligned}$$

Reemplazando los operadores  $\bar{L}_{ij}$ , considerando el teorema de la divergencia, las propiedades del producto convolución y las propiedades de simetría del tensor  $C_{ijkl}$  la formulación variacional asociada al problema queda definida por :

Sea  $u, P \in C^{0,-1}(\Omega_x(0, +\infty))$

$$\int_{\Omega} [ C_{ijkl} u_{(k,l)} * v_{(i,j)} - g * k_i P_{,i} * Q_{,i} ] d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} [ f_i * v_i - u_{i,i} * Q - P * v_{i,i} ] d\Omega + \int_{\Gamma_c} \bar{T}_i * v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{\sigma_P}} g_n \sigma_P * Q d\Gamma$$

$$\forall v, Q \in C_0^{0,-1}(\Omega_x(0, +\infty)) \quad (15)$$

en que :

$C_0^{0,-1}(\Omega_x(0, +\infty))$  : Conjunto de funciones continuas en la variable espacial y seccionalmente continua en la variable temporal.

$$C_0^{0,-1}(\Omega_x(0, +\infty)) = \{ u \in C^{0,-1} / u|_{\Gamma_d} = 0 \text{ o } u|_{\Gamma_P} = 0 \}$$

Dado que los operadores  $\bar{L}_{ij}$  son autoadjuntos la ecuación variacional (15) tiene asociado un funcional definido por :

$$\begin{aligned}
 J(u, P) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [C_{ijkl} u_{(k, l)} * u_{(i, j)} - g * k_i P_{, i} * P_{, i}] d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} [u_{i, i} * P - f_i * u_i] d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{T}_i * u_i d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma_{\sigma_p}} g * \bar{\sigma}_p * P d\Gamma
 \end{aligned}$$

$$u, P \in C^{0,1}(\Omega \times (0, +\infty)) \quad (16)$$

#### RESOLUCION NUMERICA

La resolución numérica de la Formulación Variacional del problema de consolidación a través de la Ecuación Variacional o equivalentemente a través del funcional asociado, se realiza mediante un esquema de Elementos Finitos.

Para este efecto se considera un subespacio  $C_h^{0,1}$  del conjunto  $C^{0,1}$  de dimensión finita en la variable espacial, el cual queda caracterizado al definir la discretización espacial del dominio mediante elementos finitos.

A nivel de cada elemento  $\Omega_m$ , el Funcional toma la forma

$$\begin{aligned}
 J_m(u_h, P_h) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_m} [C_{ijkl} u_{h(k, l)} * u_{h(i, j)} - g * k_i P_{h, i} * P_{h, i}] d\Omega_m \\
 & + \int_{\Omega_m} [u_{h, i, i} * P_h - f_i * u_{h, i}] d\Omega_m - \int_{\partial\Omega_m} \bar{T}_i * u_{h, i} d\Gamma \\
 & + \int_{\partial\Omega_m} g * \sigma_p * P_h d\Gamma
 \end{aligned}$$

$$u_h, P_h \in C_h^{0,1}(\Omega_m \times (0, \infty)) \quad (17)$$

en que :  $\Omega_m$  : Dominio del Elemento mesimo

$\partial\Omega_m$  : Frontera de  $\Omega_m$

Aproximando las distintas funciones que definen el Funcional en función de una base del subespacio  $C_h^{0,1}$  se tiene :

$$\begin{aligned}
 u_{h, i} &= [N_u] \{u_m(t)\} & u_{h, i, i} &= \{B\}^T \{u_m(t)\} \\
 P_h &= \{N_p\}^T \{P_m(t)\} & P_{h, i} &= [B_p] \{P_m(t)\} \\
 \bar{T}_i &= [N_u] \{\bar{T}_m(t)\} \\
 \bar{\sigma}_p &= \{N_p\}^T \{\bar{\sigma}_{pm}(t)\}
 \end{aligned}$$



$$u_h(\kappa, \ell) = \begin{bmatrix} u_h(1,1) \\ u_h(2,2) \\ u_h(3,2) \\ u_h(1,2) \\ u_h(1,3) \\ u_h(2,3) \end{bmatrix} = [B_u] \{u_m(t)\}$$

en que :

$[N_u] = N_{uij}$  Elementos de la base del subespacio

$\{N_p\} = N_{pi}$   $C_h^{0,1}$  en la variable espacial

$\{B\}^T = \nabla \cdot [N_u]$   $\nabla \cdot$  Operador divergencia

$[B_p] = [\nabla N_{pi}]$   $\nabla$  Operador gradiente

$$[B_u] = [\Delta] [N_u]$$

con

$$|\Delta| = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$\{u_m(t)\}$  : Coordenadas Generalizadas correspondiente al valor de los desplazamientos en los puntos nodales del elemento mésimo

$\{P_m(t)\}$  : Coordenadas Generalizadas correspondiente al valor de la presión de poros en los puntos nodales del elemento mésimo

$\{\bar{T}_m(t)\}, \{\bar{\sigma}_{pm}(t)\}$  : Valores Interpolantes de la Tensión y Flujo en el borde.

Reemplazando estas expresiones en el Funcional  $J_m$  y sumando sobre todos los elementos se obtiene :

$$\begin{aligned}
 J(u_m, P_m) = & \sum_{m=1}^{N_e} \frac{1}{2} \{u_m(t)\}^T \int_{\Omega_m} [B_u]^T [D] [B_u] d\Omega_m * \{u_m(t)\} \\
 & - \frac{1}{2} g * \{P_m(t)\}^T \int_{\Omega_m} [B_p]^T [K] [B_p] d\Omega_m * \{P_m(t)\} \\
 & + \{u_m(t)\}^T \int_{\Omega_m} \{B\} \{N_p\}^T d\Omega_m * \{P_m(t)\} \\
 & - \{u_m(t)\}^T * \int_{\Omega_m} [N_u]^T \{f\} d\Omega_m - \{u_m(t)\}^T * \int_{\Gamma_{tm}} [N_u]^T [N_u] \{\bar{T}_m\} d\Gamma \\
 & + g * \{P_m(t)\}^T * \int_{\Gamma_{\sigma_{pm}}} \{N_p\} \{N_p\}^T \{\bar{\sigma}_{pm}\} d\Gamma \quad (19)
 \end{aligned}$$

en que :  $N_e$  : Número de elementos de la discretización

$\Gamma_{tm}$  : Frontera discretizada con condiciones de tensiones.

$\Gamma_{\sigma_{pm}}$  : Frontera discretizada con condiciones de Flujo.

$[D]$  : Matriz de constantes elásticas

Ensamblando los distintos elementos con sus correspondientes grados de libertad globales y definiendo :

$$[K_1] = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{\Omega_m} [B_u]^T [D] [B_u] d\Omega_m$$

$$[K_2] = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{\Omega_m} [B_p]^T [K] [B_p] d\Omega_m$$

$$[K_3] = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{\Omega_m} \{B\} \{N_p\}^T d\Omega_m$$

$$\{T_1\} = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{\Omega_m} [N_u]^T \{f\} d\Omega_m$$

$$\{T_2\} = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{\Gamma_{t_m}} [N_u]^T [N_u] \{\bar{T}_m\} d\Gamma$$

$$\{T_3\} = \sum_{m=1}^{N_e} \int_{\Gamma_{p_m}} \{N_p\} \{N_p\}^T \{\bar{\sigma}_{p_m}\} d\Gamma \quad (20)$$

el funcional toma la forma :

$$J(U,P) = \frac{1}{2} \{U(t)\}^T [K_1] * \{U(t)\} - \frac{1}{2} g * \{P(t)\}^T [K_2] * \{P(t)\}$$

$$+ \{U(t)\}^T [K_3] * \{P(t)\} - \{U(t)\}^T * \{T_1(t)\}$$

$$- \{U(t)\}^T * \{T_2(t)\} + g * \{P(t)\}^T * \{T_3(t)\} \quad (21)$$

en que  $\{U(t)\}$ : Vector de desplazamientos nodales en coordenadas globales.

$\{P(t)\}$ : Vector de presión de poros nodales en coordenadas globales.

Una condición necesaria para los puntos estacionarios de este funcional es que la primera variación con respecto a los variables de desplazamiento y de presión de poros sea nula, lo cual conduce a las siguientes ecuaciones:

$$[K_1] \{U(t)\} + [K_3] \{P(t)\} = \{T_1(t)\} + \{T_2(t)\} \quad (22)$$

$$[K_3]^T \{U(t)\} - g * [K_2] \{P(t)\} = -g * \{T_3(t)\} \quad (23)$$

La ecuación 22 representa la condición de equilibrio en que  $[K_1] \{U(t)\}$  y  $[K_3] \{P(t)\}$  representan los vectores de fuerzas nodales debida a las tensiones efectivas y presión de poros respectivamente. Los vectores  $\{T_1(t)\}$  y  $\{T_2(t)\}$  representan los vectores de fuerza debido a las fuerzas de volumen y tensiones de borde respectivamente.

La ecuación 23 representa la ecuación de continuidad en que  $[K_3]^T \{U(t)\}$  y  $g * [K_2] \{P(t)\}$  representan el flujo debido a la deformación del suelo y a la presión de poros respectivamente. El vector  $g * \{T_3(t)\}$  representa el flujo debido a condiciones de borde.

La ecuación de continuidad está definida en base a la operación convolución lo cual implica una integración temporal. Para estos efectos se define el siguiente operador discreto sobre un intervalo de tiempo  $\Delta t = [t_{n-1}, t_n]$

$$f_n = A f_{n-1} + L(f_n) \quad (24)$$

en que :

$$f_n = \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\tau) d\tau = \alpha \Delta t f(t_n) + (1-\alpha) \Delta t f(t_{n-1})$$

$f(t)$ : Función temporal

$$A = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$L(f_n) = \alpha \Delta t f(t_n) - \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \Delta t f(t_{n-2})$$

$\alpha$  = Parámetro real.

El esquema descrito anteriormente es estable para  $\alpha > 0.5$ . Este parámetro depende de la variación funcional de  $f$  en el intervalo  $\Delta t$ . Desde el punto de vista de la exactitud del método se sugiere utilizar una variación logarítmica dentro del intervalo [8] en la forma :

$$f(\tau) = f(t_{n-1}) + [f(t_n) - f(t_{n-1})] \frac{L_n(1+\tau)}{L_n(1+\tau_0)} \quad (25)$$

$$\tau = \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} \quad 0 < \tau < \frac{\Delta t}{t_n-t_{n-1}}$$

Con esta variación el parámetro  $\alpha$  queda definido por :

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{L_n(1+\tau_0)} \quad , \quad \tau_0 = \frac{\Delta t}{t_n-t_{n-1}} \quad (26)$$

Dicho parámetro es mayor que 0.5 con lo cual se tiene un esquema incondicionalmente estable.

Aplicando el operador  $A$  a la ecuación 23 en un intervalo  $\Delta t$  se tiene :

$$\begin{aligned} [K_3]^T \{U(t_n)\} - \alpha \Delta [K_2] \{P(t_n)\} &= [K_3]^T \{U(t_{n-1})\} \\ &+ (1-\alpha) \Delta t [K_2] \{P(t_{n-1})\} - \alpha \Delta t \{T_3(t_n)\} \\ &- (1-\alpha) \Delta t \{T(t_{n-1})\} \end{aligned} \quad (27)$$

Combinando con la ecuación 5.6, la ecuación para el tiempo  $t_n$  está definida por el sistema:

$$\begin{bmatrix} [K_1] & [K_3] \\ [K_3] & -\alpha \Delta t [K_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U(t_n)\} \\ \{P(t_n)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1(t_n)\} \\ \{F_2(t_n)\} \end{Bmatrix}$$

en que:

$$\begin{aligned} \{F_1(t_n)\} &= \{T_1(t_n)\} + \{T_2(t_n)\} \\ F_2(t_n) &= [K_3]^T \{U(t_{n-1})\} + (1-\alpha) \Delta t [K_2] \{P(t_{n-1})\} \\ &\quad - \alpha \Delta t \{T_3(t)\} - (1-\alpha) \Delta t \{T_3(t_{n-1})\} \end{aligned} \quad (28)$$

Ecuación que permite obtener la solución en el tiempo  $t_n$  en función de la solución en  $t_{n-1}$ .

### APLICACIONES

Las aplicaciones presentadas en este capítulo se refieren a problemas de Deformaciones Planas modeladas mediante la formulación definida en los capítulos anteriores. La no-linealidad del problema se refiere a la relación Tensión Deformación del suelo. Kondner [9] ha propuesto una relación del tipo :

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = \frac{\epsilon_{11}}{a' + b' \epsilon_{11}} \sigma_c \quad (29)$$

donde :

- $\sigma_{11}$  : Esfuerzo principal mayor en el plano de deformación
- $\sigma_{22}$  : Esfuerzo principal menor en el plano de deformación
- $\epsilon_{11}$  : Deformación axial principal en el plano de deformación
- $\sigma_c$  : Presión de confinamiento
- $a'$  =  $\sigma_c / E$
- $E$  : Módulo de elasticidad
- $(\sigma_{11} - \sigma_{22})_f$  : Esfuerzo desviados en la falla
- $b'$  =  $\sigma_c / (\sigma_{11} - \sigma_{22})_f$

Para deformaciones pequeños la tangente de esta curva en el punto  $\epsilon_{11}$  corresponde al Módulo de Elasticidad  $E$  a ese nivel de Deformación. De este modo, obtenida la solución en el instante  $t_n$ , se calculan las deformaciones en cada elemento mediante la relación (3). Con esto y con la relación (5) se obtienen los esfuerzos correspondientes, y de estos los esfuerzos principales en el plano de deformación. A partir de ellos se calcula la deformación axial principal mediante la relación inversa de (5).

Con estos datos puede obtenerse el esfuerzo de confinamiento teórico definido por:

$$\sigma_c = \frac{1}{2} ((1+\nu) \sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (30)$$

y mediante la relación (29) el Módulo de Elasticidad para el siguiente paso en la iteración.

En las siguientes figuras se muestran los resultados para dos suelos: el primero es una arcilla arenosa normalmente consolidada y el segundo el mismo suelo dividido por un estrato de arcilla altamente consolidada de baja permeabilidad, ambos sometidos a una sobrecarga uniforme. Las propiedades  $\nu$  parámetros de cada suelo se resumen en el Cuadro 1.

Las figuras 1 a 3 corresponden al primer suelo, en la primera se muestra la variación de la presión de los poros con la profundidad en un plano vertical por el eje de simetría, apreciándose una diferencia notable entre los análisis lineales y los no-lineales para los estratos superiores de este suelo. Esto se debe a la disminución en la resistencia a la deformación del suelo hacia la superficie cuando el comportamiento es no lineal. Esto hace al agua soportar la mayor parte de la carga aplicada, lo que se traduce en un aumento de la presión de poros por sobre los valores lineales, en iguales períodos de tiempo.

Al aumentar con la profundidad la resistencia a la deformación la presión de poros debería ser menor en el caso no-lineal que en el caso lineal. Esto no se aprecia en la figura 1, sin embargo, se puede explicar por la influencia decreciente de la carga en los esfuerzos, a medida que aumenta la profundidad. De este modo el efecto de una mayor resistencia a la deformación, resulta poco significativo en la presión de poros, y en general, solo se produce un retraso en la disipación de la presión de poros, respecto al análisis lineal, provocado por los altos valores en los estratos superiores.

En la figura 2, se aprecia la influencia de la carga sobre la presión de poros, para tres planos verticales. Se observa una clara disminución de la presión de poros al alejarse de la zona de aplicación de la carga, la cual se reduce a un 50% de los valores en el eje de simetría, para una distancia igual al ancho de la carga. Resulta interesante observar la gran diferencia entre el análisis lineal y no-lineal en el eje de simetría, diferencia que se reduce prácticamente a cero a una distancia igual a 2 veces el ancho de la carga. Esto indica, que el efecto es significativo sólo en una zona cercana a carga lo cual queda de manifiesto en la figura 3, donde se muestra el progreso de los asentamientos en el tiempo. Las diferencias mayores entre el análisis lineal y el no-lineal, se producen como era de esperarse en la zona de aplicación de la carga.

Las figuras 4 y 5 corresponden al segundo caso indicándose las propiedades en el recuadro inferior de la fig. 4. Esta figura muestra la evolución de las presiones de poros en el tiempo para un eje vertical por el plano de simetría tanto para un análisis lineal como no-lineal.

Para el estrato II hay un retardo de la disipación de la presión que aumenta con la profundidad, actuando como aislante para el estrato inferior, donde la disipación es muy lenta.

CUADRO 1

PROPIEDADES DE LOS SUELOS USADOS

	ARCILLA ARENOSA NORMAL MENTE CONSOLIDADA	ARCILLA ALTAMENTE CONSOLI- DADA DE BAJA PERMEABILIDAD
E	100 Kg/cm <sup>2</sup>	340 Kg/cm <sup>2</sup>
k	10 <sup>-7</sup> cm/seg	10 <sup>-9</sup> cm/seg
γ <sub>t</sub>	1.9 gr/cm <sup>3</sup>	2.0 gr/cm <sup>3</sup>
υ	0.35	0.45
K	0.50	0.60
a'	0.0050	0.0039
b'	0.1667	0.1350

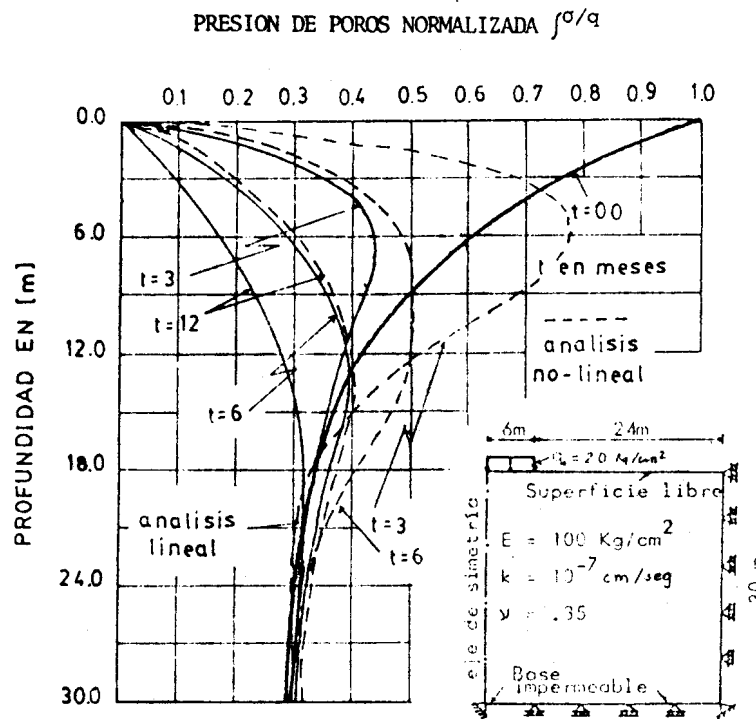


Fig. 1.- Arcilla arenosa normalmente consolidada  
Evolución temporal de las presiones de poros.

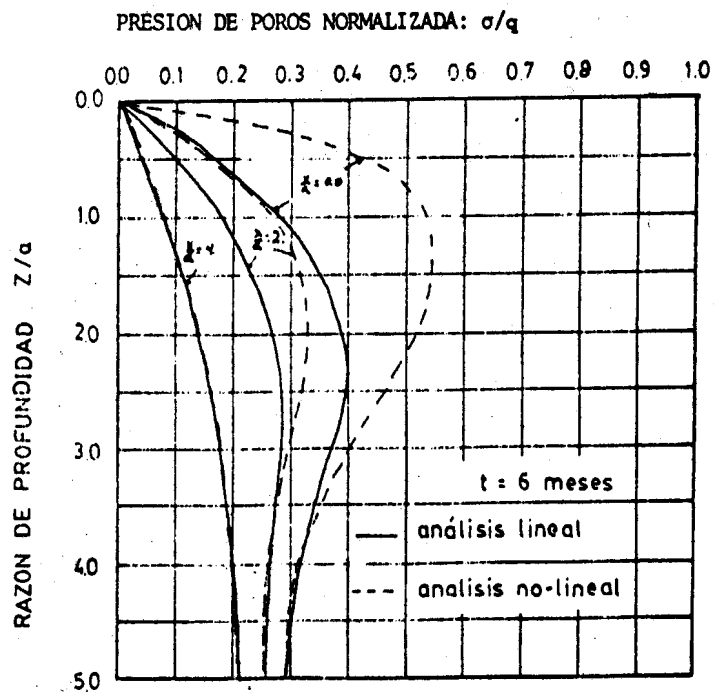


Fig.2.- Arcilla arenosa normalmente consolidada. Variación de las presiones de poros en diferentes planos verticales.

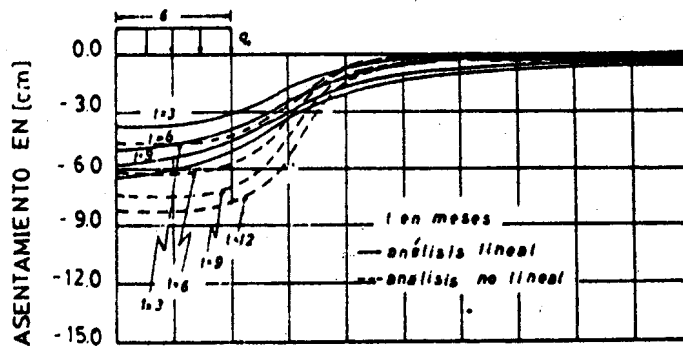


Fig.3.- Arcilla arenosa normalmente consolidada. Asentamiento por consolidación.



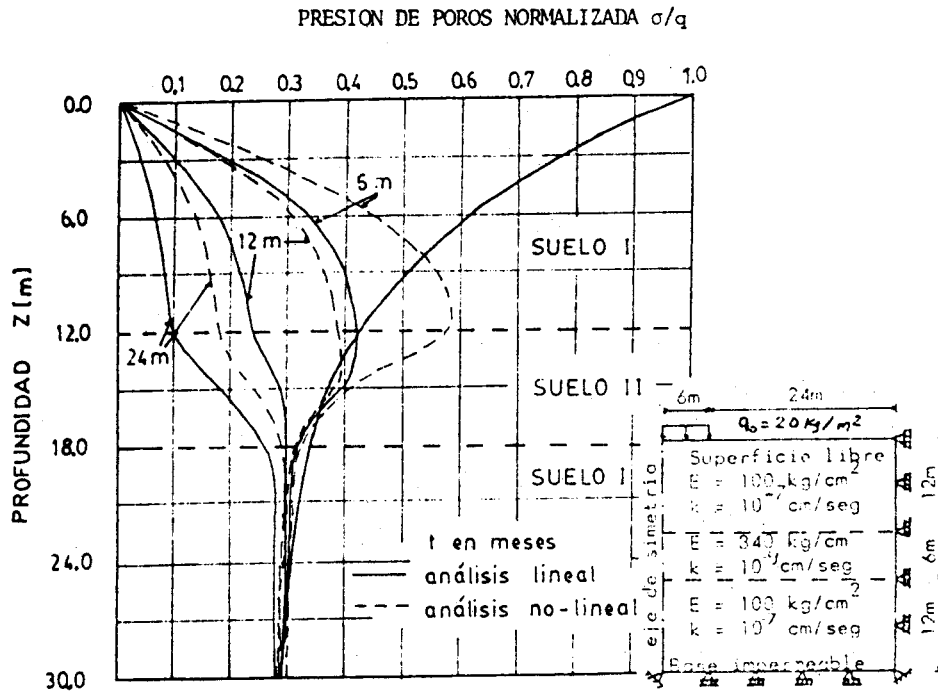


Fig.4 Arcilla arenosa normalmente consolidada dividida por arcilla altamente consolidada de baja permeabilidad. Evolución temporal de las presiones de poros.

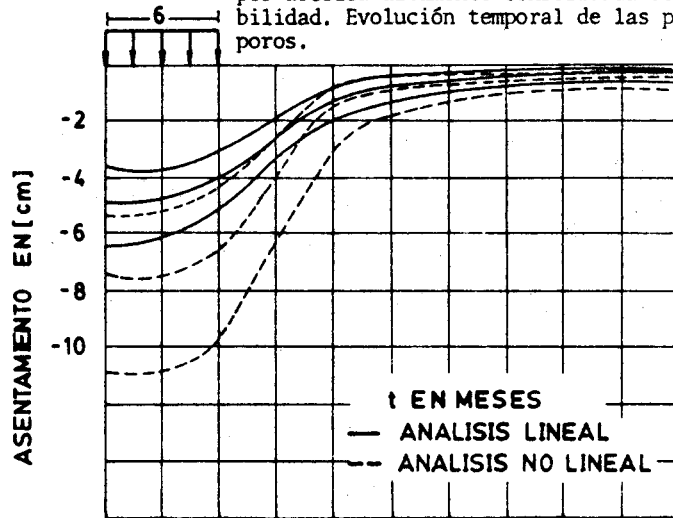


Fig.5.- Arcilla arenosa normalmente consolidada dividida por una arcilla altamente consolidada de baja permeabilidad.- Asentamiento por consolidación.

### ALCANCES FINALES

El procedimiento seguido asume una relación esfuerzo-deformación no lineal que permite variar en cada paso el módulo de elasticidad del suelo, constante en cada intervalo de tiempo.

El modelo no considera la variación del módulo de Poisson y de la permeabilidad, supuestos ambos pequeños en ese rango.

La reducida información de análisis no lineales del problema no permite una calibración del modelo, por lo cual se contempla comparar los resultados con medidas directas en terreno.

Las ecuaciones desarrolladas permiten un análisis tridimensional del problema lo cual se incorporará a futuro para dar generalidad al modelo.

### REFERENCIAS

- 1 K.Terzaghi, " From Theory to Practice in Soil Mechanics " New York, John Wiley and sons, 1948.
- 2 Sandhu, Ranbir S., Wilson E. : Finite Element Analysis of Flow of Saturated Porous Elastic Media. J. Eng. Mech. Division ASCE Vol 95 N°EM3, June 1969.
- 3 Shames, I.H.: Mechanic of Deformable Solid, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1964.
- 4 Biot M.A.: Mechanics of Deformation and Accoustic Propagation in Porous Media: Journal of Applied Physics Vol 33, N°4. 1962.
- 5 Christian J.T. : Two and Three Dimensional Consolitation. Numerical Methods in Geomechanics 1976.
- 6 Kreider D.L. Kuller R.G. Ostberg D-R: Elementary Differential Equations. Addisor-Wesley Publishing Company.March 1968.
- 7 Gurtin M.E. Variational Principles for Linear Elastodynamics. Archives for Rational and Analysis. Vol 16 N°1 1964.
- 8 Sandhu R. Fluid Flow in Saturated Porous Elastic Media. Ph.D Thesis Department of Civil Engineering. University of California, Berkeley 1968.
- 9 R.L. Kondner, " Hyperbolic Stress-Strain Response: Cohesive Soils", Journal of the Soil Mechanic and Foundation Division, ASCE, Vol 89, N°SM2, pags. 115- 143- 1963.