

RELAÇÕES CONSTITUTIVAS NÃO LINEARES  
NA DETERMINAÇÃO DAS CONFIGURAÇÕES PLANAS  
DE EQUILÍBRIO DE UM ANEL CIRCULAR EXTENSÍVEL

Edgar Nobuo Mamiya

Departamento de Engenharia de Materiais  
Universidade Federal de São Carlos  
São Carlos - Brasil

Rubens Sampaio

Departamento de Engenharia Mecânica  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro  
Rio de Janeiro - Brasil

RESUMO

Considerando-se relações constitutivas não lineares e a hipótese de extensibilidade, determinam-se as configurações planas de equilíbrio pós-flambagem de um anel circular delgado submetido à pressão externa. O modelo matemático é obtido a partir do princípio de Hamilton, e descreve o anel como uma curva regular plana: as configurações e os esforços internos são funções de um único parâmetro espacial. Obtém-se um sistema não linear de sete equações diferenciais ordinárias, acoplado a condições de periodicidade, que é resolvido pelo método do Tiro Simples. Os resultados são comparados com aqueles obtidos considerando-se equações constitutivas lineares.

ABSTRACT

Considering non linear constitutive relations and the extensibility hypothesis, the plane post-buckling configurations of a thin circular ring subjected to external pressure are determined. The mathematical model is obtained from the Hamilton's principle and describes the ring as a plane regular curve: the configurations and the internal forces are functions of only one spacial parameter. A non linear system of seven differential equations, coupled to periodicity conditions, is obtained, and is solved by the method of the Simple Shooting. The results are compared with those obtained by considering linear constitutive equations.

## INTRODUÇÃO

O surgimento de novos materiais possibilitou o projeto de estruturas mais leves e, conseqüentemente, mais esbeltas. Nestas condições, em muitos casos, o fator decisivo no projeto é a deformação da estrutura, e, em particular, o comportamento pós-flambagem.

Uma maneira de se estudar o comportamento mecânico de estruturas em que uma das dimensões predomina sobre as demais é a de se considerá-las como curvas seccionalmente regulares no espaço. Neste caso, as funções que caracterizam a configuração da estrutura passam a ser descritas em termos de um único parâmetro espacial e mais um parâmetro temporal.

O modelo matemático apresentado neste trabalho é obtido a partir de um princípio variacional e de uma forma adotada para a densidade de ação potencial, permitindo a análise do comportamento estático de estruturas elásticas que possam ser consideradas como curvas planas, regulares.

Classicamente são adotadas, como hipóteses constitutivas, relações lineares entre o esforço normal e a elongação e entre o momento fletor e a variação da curvatura. Entretanto, Tadjbakhsh [1] mostra que, nas condições do movimento plano de estruturas alongáveis não é possível se associar forma alguma para a densidade de ação potencial da qual as relações constitutivas lineares possam ser derivadas. Este fato sugere que um procedimento melhor consiste no estabelecimento de uma forma para a densidade de ação potencial e então derivar as relações constitutivas.

O desenvolvimento do presente modelo leva a um sistema não linear de sete equações diferenciais ordinárias a sete incógnitas. Os problemas associados podem então ser resolvidos pelo método do tiro simples. Em particular, apresentam-se os resultados correspondentes ao problema do anel circular delgado submetido à pressão externa, considerando-se as relações constitutivas não lineares. Estes valores são comparados com aqueles associados à utilização de relações constitutivas lineares clássicas, verificando-se diferenças sensíveis nas configurações de equilíbrio pós-flambagem, assim como nos pontos de bifurcação associados às mesmas.

## O MODELO MATEMÁTICO

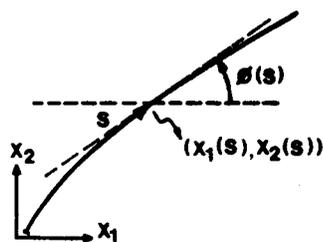
Seja uma estrutura unidimensional descrita como uma curva regular plana parametrizada pelo comprimento de arco  $S$  em uma configuração de referência e pelo comprimento de arco  $s$  em cada instante  $t$  distinto daquele associado à configuração de referência. No decorrer de um movimento, considere todas as variáveis do problema parametrizadas pela dupla  $(s,t)$ . Seja o mapeamento  $s = s(S,t)$  um difeomorfismo entre  $s$  e  $S$  para cada instante  $t$  considerado, de tal modo que as derivadas  $ds/dS$  e  $dS/ds$  existam em todos os pontos da curva e para todo  $t$ . Cada ponto da curva pode ser localizado pelas coordenadas  $X_i(S)$ ,  $i = 1, 2$  na configuração de referência e pelas coordenadas  $x_i(s,t)$  na configuração do instante  $t$ . O ângulo entre a tangente  $X_{,s}(S)$  e o eixo  $X_1$  é denotado por  $\theta(S)$ , enquanto o ângulo entre a tangente  $x_{,s}$  e o eixo  $x_1$  é dado por  $\theta(s,t)$ , conforme ilustra a Figura 1.

As equações do movimento e as relações constitutivas podem ser obtidas a partir do princípio de Hamilton [1,2,3], descrito pela expressão:

$$\delta \int_0^{\bar{S}} \int_0^{\bar{t}} L(x_{,t}, x_{,ts}, x_{,s}, x_{,ss}, s) ds dt + \int_0^{\bar{S}} \int_0^{\bar{t}} f \cdot \delta x ds dt + \int_0^{\bar{t}} (\bar{F} \cdot \delta x + \bar{R} \cdot \delta x_{,s}) \Big|_0^{\bar{S}} dt - \int_0^{\bar{S}} \bar{P} \cdot \delta x \Big|_0^{\bar{t}} ds + (\bar{A} \cdot \delta x) \Big|_0^{\bar{t}} = 0 \quad (1)$$

onde  $L$  é a densidade de ação, função da velocidade  $\dot{x}_i$ , do spin  $\dot{x}_{i,t}$ , e dos gradientes de deformação  $x_{i,s}$  e  $x_{i,ss}$ . As grandezas  $\bar{F}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{P}$  e  $\bar{A}$  representam, respectivamente, as densidades de força e de momento nos contornos, a inércia linear, nos instantes inicial e final, e a inércia angular, nos contornos e nos instantes inicial e final. O carregamento distribuído, em cada instante  $t$ , é dado por  $f$ .

Configuração de referência



Configuração no instante t

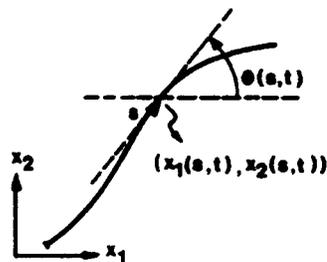


Figura 1. Parametrização da curva

Assumindo-se as regularidades necessárias para  $x_i$  e  $\delta x_i$ , o desenvolvimento de (1) fornece:

$$\int_0^{\bar{s}} \int_0^{\bar{t}} [F_{,s} + f - (P - A_{,s})_{,t}] \cdot \delta x \, ds \, dt + \int_0^{\bar{t}} [F - \bar{F}] \cdot \delta x + (R - \bar{R}) \cdot \delta x_{,s} \Big|_0^{\bar{s}} dt - \int_0^{\bar{s}} (P - \bar{P}) \cdot \delta x \Big|_0^{\bar{t}} ds + (A - \bar{A}) \cdot \delta x_{,s} \Big|_0^{\bar{t}} = 0 \quad (2)$$

onde:

$$F_i = - \frac{\partial L}{\partial x_{i,s}} + \left( \frac{\partial L}{\partial x_{i,ss}} \right)_{,s} + \left( \frac{\partial L}{\partial x_{i,ts}} \right)_{,t} \quad (3)$$

$$R_i = - \frac{\partial L}{\partial x_{i,ss}} \quad (4)$$

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial x_{i,t}} - \left( \frac{\partial L}{\partial x_{i,ts}} \right)_{,s} \quad (5)$$

$$A_i = - \frac{\partial L}{\partial x_{i,ts}} \quad (6)$$

Assim, as condições necessárias e suficientes para que (2) seja satisfeita são dadas por:

$$F_{i,s} + f_i = (P_i - A_{i,s})_{,t} \quad t \in [0, \bar{t}], \quad s \in [0, \bar{s}] \quad (7)$$

$$F_i = \bar{F}_i \quad ; \quad R_i = \bar{R}_i \quad s \in [0, \bar{s}] \quad (8)$$

$$P_i = \bar{P}_i \quad t \in [0, \bar{t}] \quad (9)$$

$$A_i = \bar{A}_i \quad t \in \{0, \bar{t}\}, \quad s \in \{0, \bar{s}\} \quad (10)$$

Assume-se que a densidade de ação  $L$  seja invariante sob a ação de rotações rígidas. Isto é expresso por:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x_{,t}} \Lambda x_{,t} + \frac{\partial L}{\partial x_{,ts}} \Lambda x_{,ts} + \frac{\partial L}{\partial x_{,s}} \Lambda x_{,s} + \frac{\partial L}{\partial x_{,ss}} \Lambda x_{,ss} = 0 \quad (11)$$

A expressão (11) pode ser reescrita utilizando-se as definições (3), (4), (5) e (6), obtendo-se:

$$(R \Lambda x_{,s})_{,s} + F \Lambda x_{,s} = (P - A_{,s}) \Lambda x_{,t} - (F \Lambda x_{,s})_{,t} \quad (12)$$

As equações (7) e (12) representam os balanços de esforços lineares e angulares na estrutura.

Sejam definidos os esforços solicitantes: densidade de força normal  $n$ , densidade de força constante  $q$  e densidade de momento fletor  $m$ , através das expressões:

$$n = x_{i,s} F_i \quad ; \quad q = e_{ij} F_j x_{i,s} \quad ; \quad m = e_{ij} R_j x_{i,s} \quad (13)$$

Com base nas definições (13), as equações (7) e (12) podem ser reescritas, para o caso estático, como:

$$n_{,s} - kq + f_n = 0 \quad (14)$$

$$q_{,s} + kn + f_q = 0 \quad (15)$$

$$m_{,s} + q = 0 \quad (16)$$

onde  $k = e_{ij} x_{j,ss} x_{i,s} = d\theta/ds$  é a curvatura na configuração deformada. As expressões (14) e (15) são as equações de equilíbrio de esforços lineares nas direções tangencial e transversal à curva, enquanto a expressão (16) representa a equação de equilíbrio de momentos.

É conveniente se parametrizar as equações (14), (15) e (16) segundo o comprimento de arco  $S$ . Definindo os esforços solicitantes: força normal  $N = nA$ , força cortante  $Q = qA$  e o momento fletor  $M = mA$ , onde  $A$  é a área da seção transversal, é possível se reescrever as equações de equilíbrio na forma:

$$N_{,S}(S) - Q(S) \theta_{,S}(S) + f_N(S) s_{,S} = 0 \quad (17)$$

$$Q_{,S}(S) + N(S) \theta_{,S}(S) + f_Q(S) s_{,S} = 0 \quad (18)$$

$$M_{,S}(S) + Q(S) s_{,S} = 0 \quad (19)$$

#### RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

É possível demonstrar [1] que, sob condições apropriadas, a densidade de ação  $L$  pode ser reescrita na forma:

$$L = K(v, \theta_{,t}, S) - E(S) \bar{W}(e, \tau) \quad (20)$$

onde  $v = (x_{i,t} x_{i,t})^{1/2}$  é o módulo da velocidade  $x_{,t}$ ,  $\theta_{,t} = (s_{,s})^{-2} e_{ij} x_{j,ts} x_{i,s}$  é a taxa de rotação da tangente,  $e = s_{,s} - 1$  é a alongação,  $E(S)$  é o módulo de Young do material e  $\tau = I^{1/2}(S)(\theta_{,s} - \theta_{,s})$  é a variação

adimensional da curvatura.  $I$  representa o momento de inércia de área da seção transversal no ponto  $S$ .

Considerando-se a densidade de ação potencial na forma da expressão (20) e as definições (13), as relações (3) e (4) reduzem-se a:

$$n = E \frac{\partial \hat{w}}{\partial e} s_{,S} \quad (21)$$

$$m = E I^{1/4} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} s_{,S} \quad (22)$$

É fácil verificar, a partir das expressões (21) e (22), que não é possível se definir forma alguma para a densidade de ação potencial  $\hat{w}$  tal que se obtenham relações lineares  $m = \alpha \tau$  e  $n = \beta e$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  constante, simultaneamente.

Seja adotada uma forma particular simples para  $\hat{w}$ :

$$\hat{w} = \frac{1}{2} \left( e^2 + \frac{I^{1/2}}{A} \tau^2 \right) \quad (23)$$

Nestas condições, as expressões (21) e (22) tomam a forma particular:

$$s_{,S} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left( 1 + 4 \frac{N}{EA} \right)^{1/2} \right] \quad (24)$$

$$\theta_{,S} = \frac{M}{E I s_{,S}} + \vartheta_{,S} \quad (25)$$

com a restrição de que:

$$N \geq - \frac{EA}{4} \quad (26)$$

Para efeito de comparação, as relações constitutivas lineares clássicas [4,5,6] são apresentadas abaixo:

$$s_{,S} = 1 + \frac{N}{EA} \quad (27)$$

$$\theta_{,S} = \frac{M}{EI} + \vartheta_{,S} \quad (28)$$

onde vale a restrição:

$$N \geq -EA \quad (29)$$

A configuração de equilíbrio é descrita pelas coordenadas  $x_i(S)$ , relacionadas com  $s$  e  $\theta$  através das expressões:

$$x_{1,S} = s_{,S} \cos \theta \quad (30)$$

$$x_{2,S} = s_{,S} \sin \theta \quad (31)$$

As expressões (17), (18), (19), (24), (25), (30) e (31) constituem um sistema não linear de sete equações diferenciais ordinárias, a sete incógnitas.

### O PROBLEMA DO ANEL CIRCULAR

Considere-se um anel circular delgado submetido à pressão externa. A configuração não carregada é caracterizada pela função curvatura:

$$K(S) = -R^{-1}$$

onde  $R$  é o raio do anel não deformado.

O equilíbrio é descrito pelo sistema não linear de equações diferenciais ordinárias apresentado no item anterior e mais as condições adicionais:

$$\begin{aligned}M(0) - M(2\pi R) &= 0 \\N(0) - N(2\pi R) &= 0 \\Q(0) - Q(2\pi R) &= 0 \\s(0) &= 0 \\ \theta(0) - \theta(2\pi R) - 2\pi &= 0 \\x_1(0) - x_1(2\pi R) &= 0 \\x_2(0) - x_2(2\pi R) &= 0\end{aligned} \tag{32}$$

Uma técnica utilizada na resolução do problema de condições adicionais genéricas consiste em transformá-lo em problemas de valores iniciais, para os quais existem procedimentos numéricos clássicos, como o método de Runge-Kutta, para resolvê-los. Este procedimento constitui o método do Tiro Simples [7]: se um dado problema é descrito por:

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), \quad x \in [a, b] \\y: [a, b] &\in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\F(y(a), y(b)) &= 0,\end{aligned} \tag{33}$$

é possível transformá-lo em problemas do tipo:

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), \quad x \in [a, b] \\y: [a, b] &\subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\y(a) &= t, \quad t \in \mathbb{R}^n\end{aligned} \tag{34}$$

tais que  $F(t, y(b, t)) = 0$ . O problema original é reduzido, através desta técnica, à pesquisa de zeros de  $F(t, y(b, t))$ . No caso, fixando-se os valores:

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \pi \\x_1(0) &= 0 \\x_2(0) &= 0\end{aligned} \tag{35}$$

as únicas condições iniciais que devem ser pesquisadas de modo a satisfazer as expressões (32) são  $M(0)$ ,  $N(0)$  e  $Q(0)$ , associadas, por exemplo, às

condições:

$$\begin{aligned} F_1(M(0), N(0), Q(0)) &= \theta(2\pi R) - \pi = 0 \\ F_2(M(0), N(0), Q(0)) &= x_1(2\pi R) = 0 \\ F_3(M(0), N(0), Q(0)) &= x_2(2\pi R) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

### RESULTADOS

A pesquisa de zeros das equações (36) foi efetuada utilizando-se o método de Newton, enquanto os problemas de valores iniciais foram integrados pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, particionando-se o intervalo  $[0, 2\pi R]$  em 300 partes iguais. O problema foi analisado adotando-se o raio de giração  $i = \sqrt{I/A} = 0,1$  e fazendo-se variar o carregamento  $pR^3/(EI)$  dentro do intervalo  $[-21,5, 0]$ .

Foram determinadas duas configurações pós-flambagem distintas, sendo os resultados ilustrados nas Figuras 2 e 3. Uma comparação com o caso em que se adotam equações constitutivas lineares (27) e (28) também é efetuada. Verifica-se que os pontos de bifurcação sofrem influência da não linearidade das relações constitutivas, conforme ilustra a Tabela I.

Tabela I. Carregamentos de bifurcação  $pR^3/(EI)$

Bifurcação	Equação Constitutiva Linear	Equação Constitutiva Não Linear
1 - 2	-3,2	-3,1
1 - 3	-9,5	-8,7

A Tabela II indica uma diferença de 22,6% na menor distância  $d$  do anel ao centro, entre os casos com equações constitutivas lineares e não lineares, para a configuração 3 com carga  $pR^3/(EI) = -11$ . As diferenças entre os valores máximos dos esforços solicitantes são igualmente significativas.

Tabela II. Resultados correspondentes à Figura 2

	Eq. Const. Linear	Eq. Const. Não Linear	Desv. Rel. à Hip. Não Lin.
Config. 2 (*)			
$d/R$	0,5582	0,4922	0,134
$\ MR\ /(EI)\ $	1,1551	1,2908	-0,105
$\ NR^2\ /(EI)\ $	4,3578	4,4534	-0,021
$\ QR^2\ /(EI)\ $	2,2444	2,5032	-0,103
Config. 3 (**)			
$d/R$	0,5907	0,4820	0,226
$\ MR\ /(EI)\ $	2,1487	2,5154	-0,146
$\ NR^2\ /(EI)\ $	11,4960	11,5195	-0,002
$\ QR^2\ /(EI)\ $	6,5670	7,6019	-0,136

\*  $pR^3/(EI) = -3,5$

\*\*  $pR^3/(EI) = -11$

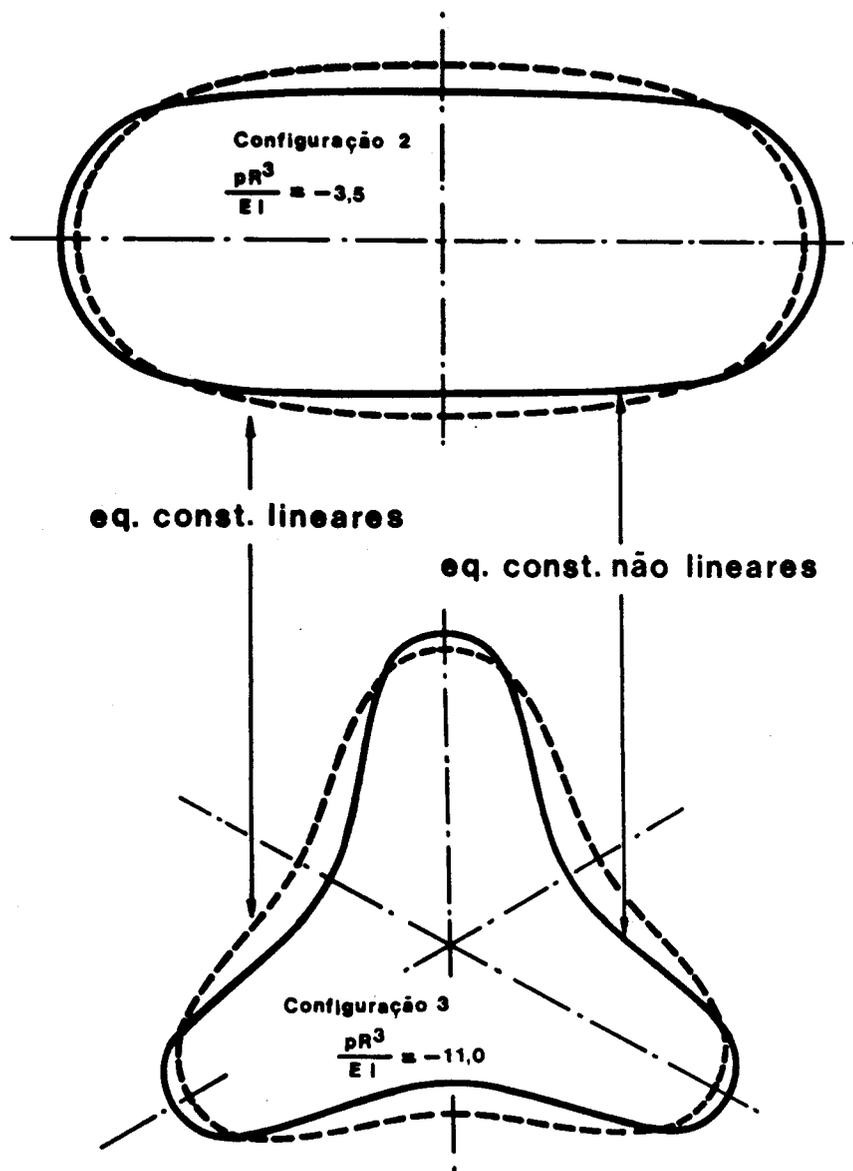


Figura 2. Configurações de equilíbrio pós-flambagem

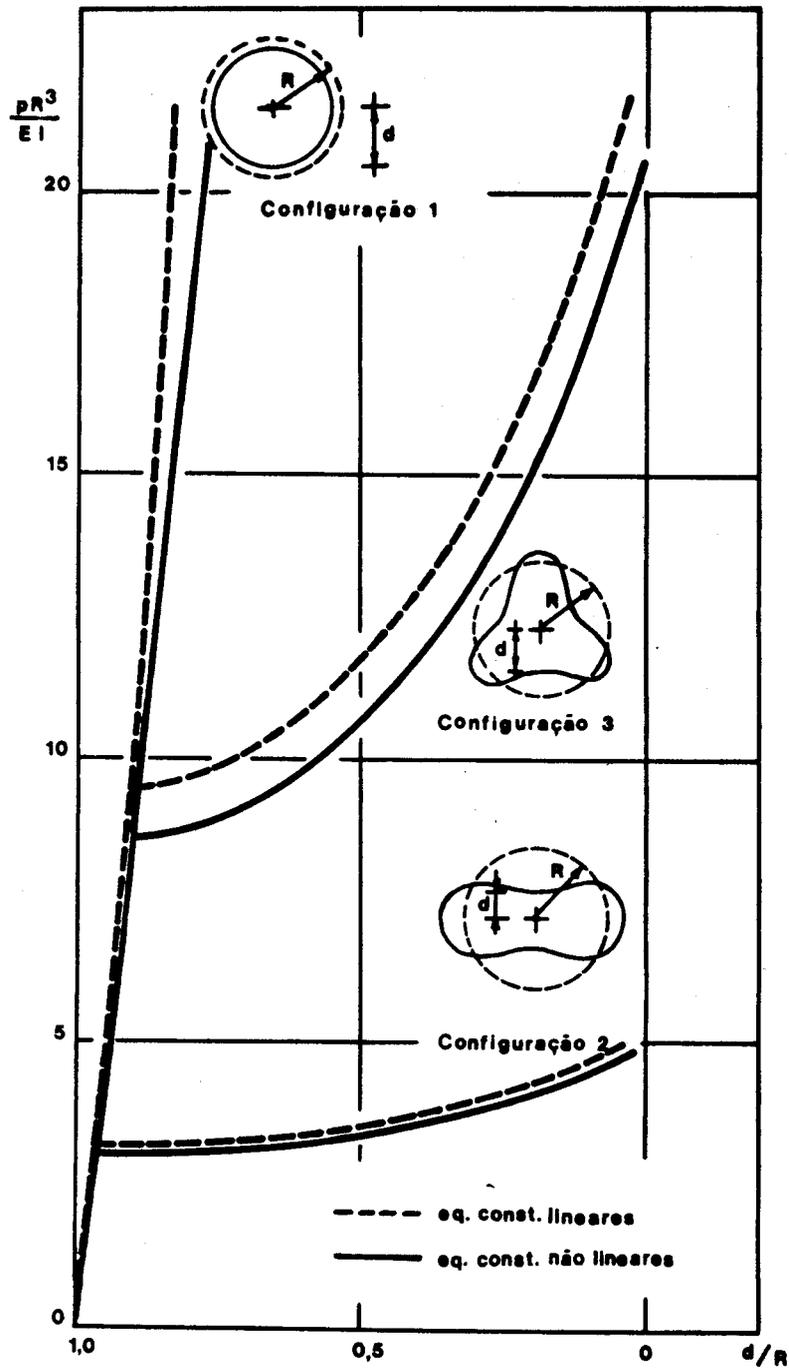


Figura 3. Distância mínima ao centro do anel

### CONCLUSÕES

Foram obtidas equações constitutivas não lineares para estruturas e lásticas unidimensionais, a partir do princípio de Hamilton e de uma forma particular para a densidade de ação potencial. Verificou-se que, uma vez assumido este princípio variacional, não se pode obter relações constitutivas lineares que expressem o comportamento mecânico da estrutura e lástica como uma variedade unidimensional. A partir do modelo matemático obtido, foram determinadas duas configurações de equilíbrio pós-flambagem para um anel circular delgado submetido à pressão externa. Os resultados mostram que a simplificação pela adoção de equações constitutivas lineares gera alterações significativas sobre as configurações de equilíbrio calculadas. Assim, é importante que as hipóteses constitutivas sejam levantadas sobre a densidade de ação potencial, e não diretamente sobre as relações constitutivas.

### AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com o apoio da FINEP e do CNPq.

### REFERÊNCIAS

- [ 1 ] Tadjbakhsh, I., "Buckled States of Elastic Rings," Int. J. Engng. Sci., vol.4, pp.433-450, 1966.
- [ 2 ] Toupin, R.A., "Theories of Elasticity with Couple-stress," Arch. Rational Mech. Anal., vol.17, pp.85-112.
- [ 3 ] Whitman, A.B. and De Silva, C.N., "A Dynamical Theory of Elastic Directed Curves," ZAMP, vol.20, 1969, pp.200-212.
- [ 4 ] Almeida, M.P. e Sampaio, R., "Flambagem de Barras com Compressão Axial," VII COBEM, Uberlândia, vol.B, p.201, 1983.
- [ 5 ] Costa Mattos, H.S., "Método do Tiro na Resolução de Estruturas Unidimensionais Elásticas," Tese de Mestrado, PUC/RJ, 1984.
- [ 6 ] Mamiya, E.N. e Sampaio, R., "Configurações Pós-flambagem de um Anel Circular Extensível," (Submetido ao VIII COBEM, S.J.Campos, 1985).
- [ 7 ] Stoer, J. e Bulirsch, R., "Introduction to Numerical Analysis," Springer Verlag, Nova Iorque, 1ª ed., 690p. 1980.