

## **ANÁLISIS DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA LINEAL DE 1 GDL EXCITADO POR UN MODELO GAUSSIANO NO ESTACIONARIO DE TERREMOTO**

**Jorge E. Crempien Laborie<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería  
Universidad de los Andes  
San Carlos de Apoquindo 2200, Las Condes, Santiago, Chile  
e-mail: [jcrempie@uandes.cl](mailto:jcrempie@uandes.cl) , web page: [://http.www.uandes.cl](http://www.uandes.cl)

**Key words:** Respuesta sísmica, dinámica, acelerogramas, probabilidad

**Resumen.** *El problema de los sistemas lineales sometidos a acción sísmica se ha estudiado usando modelos de vibraciones no estocásticas no estacionarias para modelar la excitación. En estos casos, el comportamiento de estructuras ha sido bien estudiado por varios autores en el pasado, si embargo para sistemas no lineales bajo el mismo modelo de acción sísmica hay poca literatura. En este trabajo un método para calcular la estadística de la respuesta se propone, suponiendo que esta se puede modelar como proceso de Markov. La suposición de proceso de Markov para la respuesta lleva primero a determinar la ecuación de Chapman Kolmogorov la que a su vez lleva a la ecuación de Fokker-Planck para determinar la función de densidad de probabilidad del desplazamiento y la velocidad para cualquier instante de tiempo.*

## INTRODUCCION

El comportamiento sísmico de estructuras es uno de los temas más recurrentes en la investigación de ingeniería estructural, ya que a pesar de los adelantos en técnicas de diseño y análisis, la construcción de estructuras cada vez más osadas hace que las teorías sean llevadas al límite y siempre existen desastres como en los terremotos de la década del 90. Los terremotos de Japón en 1994, California 1995, Turquía y Grecia en 1999, y Corea en 1999 son los exponentes más característicos, en los cuales se constató que a pesar del desarrollo en la ingeniería estructural y en los materiales, las pérdidas fueron muy altas, tanto en costo de vidas como en pérdidas materiales.

Para niveles de deformación pequeños, las estructuras se comportan en forma lineal, sin embargo, cuando las sollicitaciones son grandes, el límite de deformación lineal y elástica se sobrepasa, llevando a la estructura a un comportamiento no lineal, aparece el daño estructural, la capacidad de soportar fuerza empieza a decrecer y los desplazamientos empiezan a aumentar. Esta etapa además es caracterizada por la aparición de deformaciones permanentes (no elásticas) es decir que la estructura ya no vuelve a su posición inicial y si las deformaciones son lo suficientemente grandes pueden llevar a la estructura al colapso. Para saber que una estructura no colapsará es necesario conocer su comportamiento mas allá del rango lineal, o sea en la zona de comportamiento no lineal hasta llegar al colapso.

En el rango lineal el comportamiento de la estructura se puede representar por la ecuación diferencial siguiente:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = -[M]\{e\}\ddot{u}_g \quad (1)$$

En que [M] es la matriz de masas de la estructura, [C] es la matriz de amortiguamiento y [K] la matriz de rigidez; en tanto que  $\{\ddot{u}\}$  es el vector de aceleraciones,  $\{\dot{u}\}$  es el vector de velocidades y  $\{u\}$  el vector de desplazamientos de los grados de libertad de la estructura, en tanto que  $\{e\}$  es un vector de coeficientes de influencia y  $\ddot{u}_g$  es la aceleración del suelo inducida por el terremoto. En el tratamiento de este problema el factor más complicado es  $\ddot{u}_g$ , ya que nunca es conocido con anterioridad, más aun, se da que en un mismo sitio para terremotos distintos los registros son muy distintos, y para el mismo terremoto en lugares separados escasos metros también los registros de aceleraciones son distintos.

La manera más racional de resolver el problema es suponer que los registros de aceleraciones pertenecen a una familia de procesos estocásticos, del tipo series de tiempo, con distribución Gaussiana y no estacionarios. Existen varios modelos para el estudio, análisis y simulación de terremotos, como los propuestos por Saragoni y Hart<sup>1</sup>, Shinozuka<sup>2</sup> y Chang et al.<sup>3</sup>. En este trabajo se usarán los modelos propuestos por Der Kiureghian y Crempien<sup>4</sup> y Crempien y Orozco<sup>5</sup>.

En el presente trabajo, se estudiará el caso de estructuras no lineales, en este caso la situación es distinta, ya que el comportamiento de la estructura se puede representar a través de la ecuación diferencial no lineal siguiente:

$$[M]\{\ddot{u}\} + \{F(\dot{u}, u, t)\} = -[M]\{e\}\ddot{u}_g \quad (2)$$

en que en este caso  $\{F(\dot{u}, u)\}$  es una función no lineal de fuerzas que depende del nivel de desplazamiento y de la velocidad, corresponde a la relación constitutiva de la estructura. Este tipo de ecuación normalmente no tiene una solución analítica por lo que para integrarla y encontrar la respuesta  $\{u\}$  es necesario recurrir a métodos numéricos.

Por otra parte, como se supone que  $\ddot{u}_g(t)$  es un proceso estocástico, entonces el problema se complica ya que en este caso para conocer la respuesta que será un proceso estocástico también, es necesario conocer los parámetros y funciones que caracterizan la estructura probabilística de la respuesta. El proceso estocástico de respuesta será del tipo serie de tiempo, pero no será Gaussiano, ya que al no ser lineal la estructura se pierde el principio de superposición de las soluciones, con lo cual la propiedad de gaussianidad también se pierde.

Como datos del problema están las propiedades de la estructura y las características de la acción sísmica, la cual si se supone gaussiana tiene una estructura probabilística dada por la función de media temporal y su función de autocorrelación. Se puede suponer que la función de media temporal es nula, esto es:

$$E\{u(t)\} = 0 \quad (3)$$

y que la función de autocorrelación es conocida, esto es:

$$E\{u_g(t_1)u_g(t_2)\} = \Phi(t_1, t_2) \quad (4)$$

El modelo que se utilizará es un modelo del tipo Der Kiureghian-Crempien el cual está dado por la expresión:

$$\ddot{u}_g(t) = \sum_{k=1}^m \psi_k(t) \cdot s_k(t) \quad (5)$$

en que  $\psi_k(t)$  es una función determinística del tiempo que multiplica a  $s_k(t)$  que es un proceso estocástico, estacionario, Gaussiano, con contenido de frecuencia en una banda de frecuencia definida por  $D_k = \{[-\omega_{k+1}, -\omega_k) \cup (\omega_k, \omega_{k+1}]\}$ . La suma es sobre el número de bandas de frecuencia que se han definido para representar el proceso de aceleraciones.

## 2. FORMULACIÓN DE LA RESPUESTA ESTRUCTURAL COMO PROCESO DE MARKOV. ECUACION DE CHAPMAN KOLMOGOROV.

Los procesos de Markov se caracterizan por ser procesos estocásticos con memoria, esto es si se tiene la estructura probabilística del proceso en un instante de tiempo  $t$ , la estructura de probabilidad a un tiempo  $t + \Delta t$  se puede conocer, es decir hay una dependencia los resultados anteriores del proceso.

Esta forma de caracterizar la respuesta ha sido usada por varios autores en el pasado, entre los cuales destacan los trabajos de Caughey<sup>6</sup> en el cual expone la teoría de la respuesta de sistemas lineales excitados por procesos estocásticos y formula la ecuación de Chapman y Kolmogorov para la solución en base a la probabilidad de transición de un estado al otro. En este trabajo Caughey hace algunas aplicaciones al caso de sistemas no lineales pero suponiendo que el terremoto corresponde a un proceso estocástico estacionario, lo cual no se ajusta a la realidad por que los terremotos son fenómenos transientes. Posteriormente, siguiendo los trabajos de Caughey se publican una serie de trabajos entre los cuales destacan los de Koberi et al.<sup>7</sup>, Asano y Suzuki<sup>8</sup>, Koberi et al.<sup>9</sup> y Sakata y Kimura<sup>10</sup>. En estos trabajos se vuelve a formular la respuesta de estructuras bajo excitación sísmica usando el camino de considerar la respuesta como un proceso de Markov, formulando para ello la ecuación de Chapman Kolmogorov y a partir de ella encontrando la ecuación diferencial de Fokker Planck, que es la que controla la función de densidad de probabilidad de transferencia. Koberi et al. usan una estructura excitada por un ruido blanco cayendo en el mismo problema de Caughey ya que este tipo de procesos es estacionario. Asano y Suzuki derivan las ecuaciones del método para una estructura cuyas relaciones constitutivas son elastoplásticas. Usando un modelo no estacionario de terremoto pero de contenido de frecuencia constante. Crempien<sup>11</sup> y Der Kiureghian y Crempien muestran que en general si bien un terremoto se puede suponer gaussianamente distribuido (Saragoni y Crempien<sup>12</sup>), este tiene un contenido de frecuencia que varía con el tiempo, lo cual se debe a la naturaleza dispersiva de las ondas sísmicas, por lo cual el modelo de Asano y Suzuki tiene esa limitación.

Caughey y Ma<sup>13</sup> publicaron evaluaron la respuesta de sistemas no lineales bajo la acción excitaciones de tipo estocástico estacionarias pero aplicadas súbitamente, con lo cual la respuesta del sistema es evolutiva hasta que se llega al régimen permanente. En su trabajo, los autores, hacen uso de las ecuaciones de Fokker Planck y encuentran la estadística de respuesta.

Otros autores como Barber y Wen<sup>14</sup> (1980) también han trabajado con sistemas no lineales mediante la técnica de linearización equivalente. Esto es, hacen una transformación de la estructura no lineal en una lineal equivalente mediante algún criterio, por ejemplo que los desplazamientos sean los mismos o que la energía disipada por la estructura sea la misma. Tiene el problema que se resuelve una estructura distinta. Este camino también ha sido seguido por Cai y Lin<sup>15</sup>, Casciati<sup>16</sup> y Eliashakoff y Cai<sup>17</sup>.

En un proceso de Markov la función de densidad de probabilidad acumulada está dada por

$$P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} = P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \quad (6)$$

para cualquier  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ . Lo anterior quiere decir que la probabilidad de que el proceso  $\mathbf{X}(t)$  tenga un valor en el tiempo  $t_n$  menor o igual a  $\mathbf{x}_n$  condicionado ha que haya tomado los valores  $\mathbf{x}_{n-1}$  en el tiempo  $t_{n-1}$ ,  $\mathbf{x}_{n-2}$  en el tiempo  $t_{n-2}$  hasta el valor  $\mathbf{x}_1$  en el tiempo  $t_1$ , depende solamente de que haya tomado el valor  $\mathbf{x}_{n-1}$  en  $t_{n-1}$ , No depende de lo que pasó anteriormente. Por eso se llama proceso con un paso de memoria. En el caso de un

proceso continuo la probabilidad de que en  $\mathbf{t}_n$  se tenga  $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}_n$  se conoce, si se conoce la distribución de probabilidad inicial y la función de densidad de probabilidad de transición entre dos estados  $\mathbf{n}-1$  y  $\mathbf{n}$ .

$$F(x_2, t_2 | x_1, t_1) = P\{X(t_2) \leq x_2 | X(t_1) = x_1\} \quad \text{con } t_1 < t_2 \quad (7)$$

La función de transición de probabilidad se relaciona con la función de densidad de probabilidad de transición a través de:

$$F(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{x_2} p_c(u, t | x_1, t_1) du \quad (8)$$

Si  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{t})$  es la función inicial de distribución de probabilidad de los procesos, las funciones de densidad de probabilidad superiores o a tiempos posteriores se puede expresar como:

$$\begin{aligned} p(x_1, t_1; x_2, t_2) &= p(x_1, t_1) p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \\ &\vdots \\ p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= p(x_1, t_1) p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \dots p(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \end{aligned} \quad (9)$$

Para  $m < n$  se puede escribir

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_m, t_m) = \underbrace{\int_{-\infty}^{x_{m+1}} \int_{-\infty}^{x_{m+2}} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_{m+1} dx_{m+2} \dots dx_n}_{n-m} \quad (10)$$

ahora si el valor inicial del proceso, para  $\mathbf{t} = 0$ ,  $\mathbf{x}_0$  es totalmente conocido, lo que desde el punto de vista probabilístico significa que se conoce con probabilidad 1, entonces, la función de distribución inicial se puede escribir como:

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(x, t) \rightarrow \delta(x - x_0) \quad (11)$$

en que  $\delta(\mathbf{x})$  es la distribución de Dirac. Luego

$$p(x_1, t_1) = p_c(x_1, t_1 | x_0, t_0) \quad (12)$$

Con la ecuación, se puede escribir que:

$$p(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_c(x, t | x_1, t_1) p(x_2, t_2 | x, t) dx \quad \text{con } \mathbf{t}_2 < \mathbf{t} < \mathbf{t}_1 \quad (13)$$

esta última es la ecuación de Chapman Kolmogorov, (Stratonovich<sup>18</sup>), que como se ve es una ecuación integral, que además quiere decir que  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_2, \mathbf{t}_2 | \mathbf{x}_1, \mathbf{t}_1)$  es independiente del camino seguido entre  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ .

### 3. ECUACION DE FOKKER PLANCK

A partir de esta ecuación de Chapman Kolmogorov se puede derivar una ecuación diferencial que debe cumplir en forma puntual la función de densidad de probabilidad. Para hacer se definen los momentos incrementales de primer y segundo orden de los desplazamientos en el espacio de fase para un intervalo de tiempo pequeño  $\Delta t$ . Estas cantidades se definen a través de las siguientes integrales:

a) Momentos de primer orden:

$$A_i(y, t) = \int \cdots \int (z_i - y_i) p(y | z, \Delta t) dz_1 \cdots dz_n \quad (14)$$

b) Momentos de segundo orden:

$$B_{ij}(y, t) = \int \cdots \int (z_i - y_i)(z_j - y_j) p(y | z, \Delta t) dz_1 \cdots dz_n \quad (15)$$

Se hace la suposición de que cuando se toma el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , solo estos momentos tienden a ser proporcionales a  $\Delta t$ , de modo que los siguientes límites existen:

$$a_i(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A_i}{\Delta t} \quad (16)$$

$$b_{i,j}(y, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{ij}}{\Delta t} \quad (17)$$

Los momentos de orden superior son del orden de  $\Delta t$  y se pueden despreciar en el límite. Esto significa que en un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$ , las coordenadas del punto en espacio de fase cambian solo en pequeñas cantidades, lo cual está de acuerdo con la suposición de gaussianidad de las perturbaciones del sistema.

Suponiendo ahora que se define una función  $R(y)$  arbitraria de la clase  $C_2$  que cumple con la propiedad de que  $R(y) \rightarrow 0$  cuando  $y_i \rightarrow \pm\infty$ . Multiplicando la ecuación de Chapman Kolmogorov por  $R(y)$  e integrando en todo el dominio del espacio de fase se tiene:

$$\int \cdots \int R(y) p(x | y, t + \Delta t) dz_1 \cdots dz_n = \int \cdots \int \left[ \int \cdots \int R(y) p_0(x | z, t) p(z | y, \Delta t) dy_1 \cdots dy_n \right] dz_1 \cdots dz_n$$

(18)

Ahora, desarrollando  $R(y)$  en serie de Taylor para  $\mathbf{y}_i - \mathbf{z}_i$ , esto es:

$$R(y) = R(z) + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i) \frac{\partial R(y)}{\partial z_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_i - z_i)(y_j - z_j) \frac{\partial^2 R(y)}{\partial z_i \partial z_j} + O(|y - z|^2)$$

(19)

Sustituyendo este desarrollo para  $R$  en la ecuación anterior, dividiendo por  $\Delta t$  y tomando el límite cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  se tiene:

$$\int \dots \int R(y) \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} [a_i p] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [b_{ij} p] \right\} dy_1 \dots dy_n = 0$$

(20)

Como la función  $\mathbf{R}(\mathbf{y})$  es arbitraria, entonces necesariamente debe cumplirse que:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} [a_i p] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [b_{ij} p] = 0$$

(21)

Esta es la ecuación de general de Fokker Planck para la probabilidad de transferencia entre el estado 2 en  $t_2$  y el estado 1 en  $t_1$ , en un proceso de Markov.

#### 4. ESTRUCTURA ELASTICA PERFECTAMENTE PLASTICA DE 1 GDF

Un gran número de sistemas estructurales usado en la práctica se puede modelar como estructuras de 1 GDL y cuyas características de comportamiento están dadas por relaciones no lineales entre fuerza y deformación. Uno de los modelos más usados es el llamado modelo elástico perfectamente plástico, que se basa en la observación de que los sistemas estructurales responden linealmente a medida que se le aplica fuerza hasta un cierto límite y después las deformaciones crecen sin que aumente la fuerza, como se muestra en la figura 2. El límite del comportamiento lineal está dado por el llamado desplazamiento de fluencia  $\mathbf{u}_y$ , asociado a la fuerza de fluencia  $F_y$ , en que  $\mathbf{F}$  es la fuerza aplicada y  $\mathbf{u}$  el desplazamiento que esta produce.

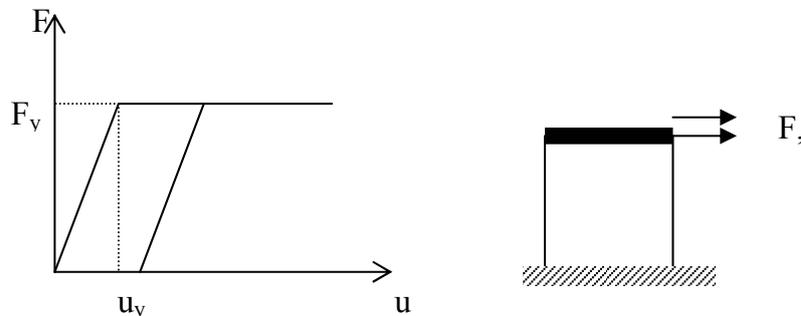


Fig. 1 Relación fuerza deformación en una estructura elastoplástica

En este caso, la ecuación del movimiento del sistema se puede escribir como:

$$m\ddot{u} + 2c\dot{u} + f(\dot{u}, u) = -m\ddot{u}_g(t) \quad (22)$$

en que  $m$  es la masa del sistema,  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento viscoso,  $f$  es la función de fuerza interna de la estructura, que depende del desplazamiento y de la velocidad y que en el caso de una estructura no lineal del tipo elástico perfectamente plástico es como se muestra en la figura 2. En este caso, cuando la estructura se comporta en el rango lineal se puede hablar de frecuencia natural de vibrar  $\omega_n$ . En la ecuación anterior,  $u$  es el desplazamiento relativo a la base de la estructura y  $\ddot{u}_g$  es la aceleración basal inducida por el terremoto. Si se define un tiempo adimensional  $\tau = \omega_n t$ , y se normaliza el desplazamiento con respecto al desplazamiento de fluencia del sistema  $u_y$ , se tiene que:

$$\omega_n^2 \ddot{z} + 2\eta\omega_n^2 \dot{z} + \frac{f(z, \dot{z})}{mu_y} = \frac{\ddot{u}_g}{u_y} \quad (23)$$

Dividiendo esta ecuación por  $\omega_n^2$  se tiene:

$$\ddot{z} + 2\eta\dot{z} + F(z, \dot{z}) = w(t) \quad (24)$$

en esta última ecuación se define la función  $g(z, \dot{z})$  como

$$g(z, \dot{z}) = 2\eta\dot{z} + F(z, \dot{z}) \quad (25)$$

con lo que la ecuación del movimiento resulta

$$\ddot{z} + g(z, \dot{z}) = w(t) \quad (26)$$

en que  $z$  es el desplazamiento adimensional, relativo,  $\eta$  es el coeficiente de amortiguamiento crítico,  $F(z, \dot{z}) = f(z, \dot{z})/F_y$  es la fuerza de restitución en el sistema en forma adimensional y relativa a la fuerza de fluencia, por último  $w(t) = \ddot{u}_g(t)/\omega_n^2 u_y$ , que también corresponde a una aceleración adimensional. Con esta representación adimensional y normalizada de la ecuación diferencial del movimiento se puede trabajar en forma más conveniente. En general  $F(z, \dot{z})$  es una relación que representa el comportamiento de la estructura, en este caso elastoplástica, pero puede también representar otros comportamientos como estructuras bilineales, de rigidez degradante, etc.

Si se define el vector de estado como:

$$y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

o sea  $y_1 = z$  e  $y_2 = \dot{y}_1 = \dot{z}$

la ecuación del movimiento se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -g(y_1, y_2) + w(t) \end{aligned} \quad (28)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma incremental

$$\Delta y_1 = y_2 \Delta t \quad (29)$$

$$\Delta y_2 = -g(y_1, y_2) \Delta t + \int_t^{t+\Delta t} w(\theta) d\theta \quad (30)$$

en que  $w(t)$  es un proceso estocástico Gaussiano no estacionario dado por la ecuación 5. Si en la ecuación 5 se elige  $m=1$  se tiene un caso particular del proceso del tipo Saragoni y Hart.

$$w(t) = \varphi(t)s(t) \quad (31)$$

Con estos antecedentes, se puede determinar que los coeficientes  $a_i$  y  $b_{ij}$  de la ecuación de Fokker Planck, teniéndose que:

$$\begin{aligned} a_1 &= y_1 \\ a_2 &= -g(y_1, y_2) \end{aligned} \quad (32)$$

y

$$\begin{aligned} b_{11} &= 0 \\ b_{12} &= b_{21} = 0 \\ b_{22} &= S(\omega_n)\varphi^2(t) \end{aligned} \quad (33)$$

por lo que finalmente la ecuación de Fokker Planck queda:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + y_2 \frac{\partial p}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} [g(y_1, y_2)p] - \frac{1}{2} K_0 \varphi^2(t) \frac{\partial^2 p}{\partial y_2^2} = 0 \quad (34)$$

en que  $K_0 = \frac{S(\omega_n)}{\omega_n^2 u_Y}$  es una constante

Si el sistema estructural se encuentra en reposo en el momento que empieza el terremoto, entonces las condiciones de borde para la ecuación anterior son:

$$p(y_1, y_2, t) = \delta(y_1)\delta(y_2) \quad \text{cuando } t \rightarrow 0^+ \quad (35)$$

Las ecuaciones 34 y 35 indican que se trata de un problema de valor de frontera bien definido por lo que la solución existe y es única. Sin embargo no se ha podido determinar una solución analítica por lo que será necesario explorar la posibilidad de obtener una solución numérica.

### 5. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE FOKKER PLANCK A TRAVÉS DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Varios autores han tratado el tema de vibraciones estocásticas de sistemas no lineales discretizando la ecuación de Fokker Planck mediante el método de elementos finitos. Uno de los primeros trabajos es el Bergman y Heinrich<sup>19</sup>, para procesos estacionarios. Posteriormente, Bergman y Spencer<sup>20</sup>, Wojtkiewicz et al.<sup>21</sup>, lo aplican a la respuesta transiente de sistemas no lineales. Langley<sup>22,23,24</sup> aplica el método para osciladores no lineales excitados por procesos Gaussianos estacionario y no estacionario de banda ancha para determinar la probabilidad de de sobre vivencia del sistema. Todas estas aplicaciones han sido en el área de la ingeniería aeronáutica.

Considerando que en el caso de osciladores no lineales excitados por procesos de aceleraciones de terremotos no estacionario Gaussianos, la función de densidad de probabilidad debe cumplir la condición de probabilidad total

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(y_1, y_2, t) dy_1 dy_2 = 1, \quad \forall t \quad (36)$$

y además, las condiciones de borde

$$\lim_{y_1, y_2 \rightarrow \pm\infty} p(y_1, y_2, t) = 0 \quad \forall t$$

Para llevar la ecuación de Fokker Planck a una forma variacional con el objeto de desarrollar una formulación débil y desarrollar una solución de elementos finitos se debe considerar una función del conjunto de funciones admisibles de la ecuación diferencial  $q(y_1, y_2, t)$  que pertenezca a  $C_2$  en  $\mathbf{R}^3$  y que además

$$\lim_{y_1, y_2 \rightarrow \pm\infty} q(y_1, y_2, t) = 0 \quad \forall t \quad (37)$$

y también

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(y_1, y_2, t) dy_1 dy_2 = 1 \quad \forall t \quad (38)$$

Si multiplicamos la ecuación de Fokker Planck por esta función de ensayo  $q$  e integramos sobre el dominio de  $y_1$  e  $y_2$  se tiene el siguiente funcional

$$F = \iint \left\{ q \frac{\partial p}{\partial t} + q y_2 \frac{\partial p}{\partial y_1} - q \frac{\partial}{\partial y_2} [g(y_1, y_2, t)p] - \frac{1}{2} K \varphi^2(t) q \frac{\partial^2 p}{\partial y_2^2} \right\} dy_1 dy_2 \quad (39)$$

Si  $p$  es la solución de la ecuación de F-P, entonces  $F$  es igual a cero y el problema variacional es equivalente a la Ec. diferencial. Si a continuación la ecuación .... e integra por partes se obtiene:

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ q \frac{\partial p}{\partial t} + q y_2 \frac{\partial p}{\partial y_1} + \frac{\partial q}{\partial y_2} [gp] + \frac{1}{2} K \varphi^2(t) \frac{\partial q}{\partial y_2} \frac{\partial p}{\partial y_2} \right\} dy_1 dy_2 = 0 \quad (40)$$

Esta integral la subdividimos en un conjunto de particiones  $\Omega_k$  tal que

$$\bigcup_{k=1}^{k=n} \Omega_k = \Omega$$

y

$$\bigcap_{k=1}^{k=n} \Omega_k = \phi$$

en este caso se tiene:

$$\sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ q \frac{\partial p}{\partial t} + q y_2 \frac{\partial p}{\partial y_1} + \frac{\partial q}{\partial y_2} [gp] + \frac{1}{2} K \varphi^2(t) \frac{\partial q}{\partial y_2} \frac{\partial p}{\partial y_2} \right\} dy_1 dy_2 = 0 \quad (41)$$

Hasta este punto no hay ninguna aproximación en la expresión, la única diferencia es que el grado de diferenciabilidad necesario de la función solución y como de la función de ensayo  $q$  se ha reducido a  $C_1$ .

## 6. FORMULACIÓN MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS.

Este método lo que hace en palabras simples es aproximar las funciones involucradas en la ecuación diferencial por funciones mas simples y conocidas, generalmente polinomios, en una porción pequeña del dominio de la solución. Esto se repite en todos los sub dominios  $\Omega_k$  en que se ha subdividido el dominio en que la solución existe, y la integral de la ecuación que aparece en el funcional se lleva acabo dominio a dominio, quedando como incógnitas los coeficientes de los polinomios, transformándose de esta manera la ecuación diferencial en una ecuación algebraica de varias variables que es mas directo de resolver que la ecuación diferencial misma.

En este trabajo se ha elegido usar elementos finitos del tipo cuadriláteros con funciones de aproximación lineales. En este caso, las funciones de interpolación que se usarán son:

$$\begin{aligned} N_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\ N_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \\ N_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\ N_4(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \end{aligned} \tag{42}$$

En que las coordenadas x e y quedan dadas por:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_1, \xi_2) Y_{1i} \\ y_2 &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_1, \xi_2) Y_{2i} \end{aligned} \tag{43}$$

en que  $Y_{1,i}$  e  $Y_{2,i}$  son las coordenadas del vértice i. Las funciones  $\mathbf{p}(y_1, y_2, t)$  y  $\mathbf{q}(y_1, y_2, t)$  quedan aproximadas dentro del cuadrilátero por:

$$\begin{aligned} p(y_1, y_2, t) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_1, \xi_2) P_i(t) \\ q(y_1, y_2, t) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi_1, \xi_2) Q_i(t) \end{aligned} \tag{44}$$

y sus derivadas se puede expresar en términos de los polinomios de acuerdo a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial y_1} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial y_1} P_i(t) \\
 \frac{\partial p}{\partial y_2} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial y_2} P_i(t) \\
 \frac{\partial q}{\partial y_1} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial y_1} Q_i(t) \\
 \frac{\partial q}{\partial y_2} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial y_2} Q_i(t)
 \end{aligned} \tag{45}$$

Reemplazando estas aproximaciones en la formulación débil de la ecuación de F-P. se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \int \int \left\{ \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 N_i N_j Q_i \dot{P}_j + y_2 \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 N_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y_1} Q_i P_j + g \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial \xi_n}{\partial y_2} N_j Q_i P_j + \right. \\
 \left. \frac{1}{2} K \varphi^2(t) \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_m} \frac{\partial \xi_n}{\partial y_2} \frac{\partial \xi_m}{\partial y_2} Q_i P_j \right\} dy_1 dy_2 = 0
 \end{aligned} \tag{46}$$

Llamando a los términos:

$$\begin{aligned}
 M_{ij}^K &= \int \int N_i N_j dy_1 dy_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i N_j |J| d\xi_1 d\xi_2 \\
 K_{ij}^{(K1)} &= \int \int y_2 N_i \frac{\partial N_j}{\partial y_1} dy_1 dy_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y_1 N_i \frac{\partial N_j}{\partial \xi_j} |J| d\xi_1 d\xi_2 \\
 K_{ij}^{K2} &= \int \int g \frac{\partial N_i}{\partial y_2} N_j dy_1 dy_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g \frac{\partial N_i}{\partial \xi_n} |J| d\xi_1 d\xi_2 \\
 K_{ij}^{K3} &= \int \int \frac{\partial N_i}{\partial y_2} \frac{\partial N_j}{\partial y_2} dy_1 dy_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_i}{\partial \xi_n} \frac{\partial N_j}{\partial \xi_m} |J| d\xi_1 d\xi_2
 \end{aligned} \tag{47}$$

y reemplazando en la ecuación anterior se tiene

$$\sum_{K=1}^n \left\{ \{Q\}^T [M] \{\dot{P}\} + \{Q\}^T \left[ [K]^{(1)} + [K]^{(2)} + \frac{1}{2} C \varphi^2(t) [K]^{(3)} \right] \{P\} \right\} = \{0\} \tag{48}$$

La sumatoria es sobre todos los elementos en que fue subdividido el dominio de la solución de la ecuación de F-P. Dado que las funciones  $N_i$  tienen continuidad C1 y son distintas de cero en los elementos concurrentes al nodo  $i$  y cero en todos los otros, se forma una matriz acoplada de  $n \times n$  en que  $n$  es el número total de puntos nodales que tiene el dominio.

De esta forma la ecuación anterior se convierte en:

$$\{Q\}^T [M] \{\dot{P}\} + \{Q\}^T [K(t)] \{P\} = \{0\} \quad (49)$$

Como en general  $\{Q\} = \{0\}$  la ecuación anterior se puede simplificar quedando un sistemas de ecuaciones diferenciales acoplado, dado por:

$$[M] \{\dot{P}\} + [K(t)] \{P\} = \{0\} \quad (50)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales entrega la probabilidad de transición de un instante de tiempo  $t_i$  a  $t_{i+1}$  en los nodos de la malla de elementos finitos.

## 7. EJEMPLOS

Se han procesado dos ejemplos para el caso del oscilador elastoplástico. El primero corresponde a una excitación de un ruido estacionario que parte súbitamente. Este ruido tiene en consecuencia una función de potencia dada por una función escalón que parte en cero. El segundo ejemplo es un proceso no estacionario que corresponde a la modelación de un registro de aceleraciones tomado en Orión, California para el terremoto de San Fernando en 1971. En ambos procesos se supondrá que la función de densidad espectral de potencia es del tipo:

$$\Gamma(\omega) = S_0 e^{-Q|\omega|} |\omega|^P \quad (51)$$

Esta función fue originalmente propuesta por Saragoni y Hart para representar el contenido de frecuencia de los registros de terremotos. En el caso del registro de Orión los parámetros de la función de densidad espectral de potencia son:

$$P = 0.2252$$

$$Q = 0.0749$$

$$S_0 \text{ se obtiene de la condición que } \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\omega) d\omega = 1$$

En el caso del proceso estacionario la función de potencia es

$$\varphi(t) \begin{cases} = 0 & \text{si } t \leq 0 \\ = 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (52)$$

En el caso del modelo para el registro de Orión la función de potencia es;

$$\varphi(t) = \sqrt{\beta} e^{-\frac{\alpha}{2}t} t^{\frac{\gamma}{2}} \quad (53)$$

En este caso los parámetros son:

$$\alpha = 0.454$$

$$\beta = 0.000137$$

$$\gamma = 3.65$$

En las figura 2 a 5 se puede apreciar el resultado de la función de densidad de probabilidad para los desplazamientos en el caso de la estructura sometida al proceso estacionario de partida brusca. En estas figuras se puede ver como la función de probabilidad se empieza a difundir a medida que el tiempo pasa, por otra parte también se ve que para amortiguamientos más grandes la difusión es mayor, lo cual quiere decir que aumenta el grado de incertidumbre. Para los distintos períodos naturales de vibrar las diferencias observadas son menores.

En la figura 6, se presenta la evaluación de la respuesta media cuadrática para distintos amortiguamientos en un oscilador estandarizado, teniéndose como es esperado que para mayor amortiguamiento la respuesta es menor. La respuesta es en función del número de ciclos para la parte inicial del proceso de respuesta.

## 8. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una metodología para estudiar el comportamiento de estructuras no lineales bajo acción sísmica estocástica. Esta metodología permite obtener las funciones de probabilidad de la respuesta y evaluar a partir de ella su respuesta media cuadrática. Se ha visto que en general para mayor amortiguamiento la difusión de la probabilidad de desplazamientos es mayor.

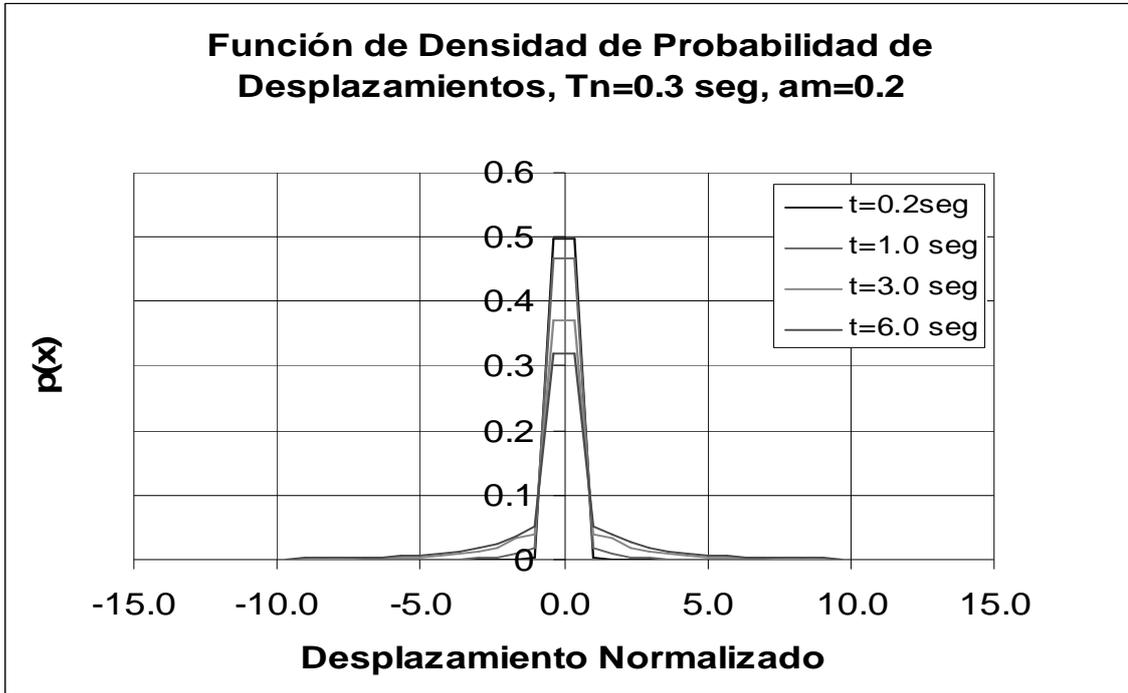


Fig. 2. Función de densidad de probabilidad del desplazamiento de un oscilador elástico perfectamente plástico solicitado por un ruido estacionario.

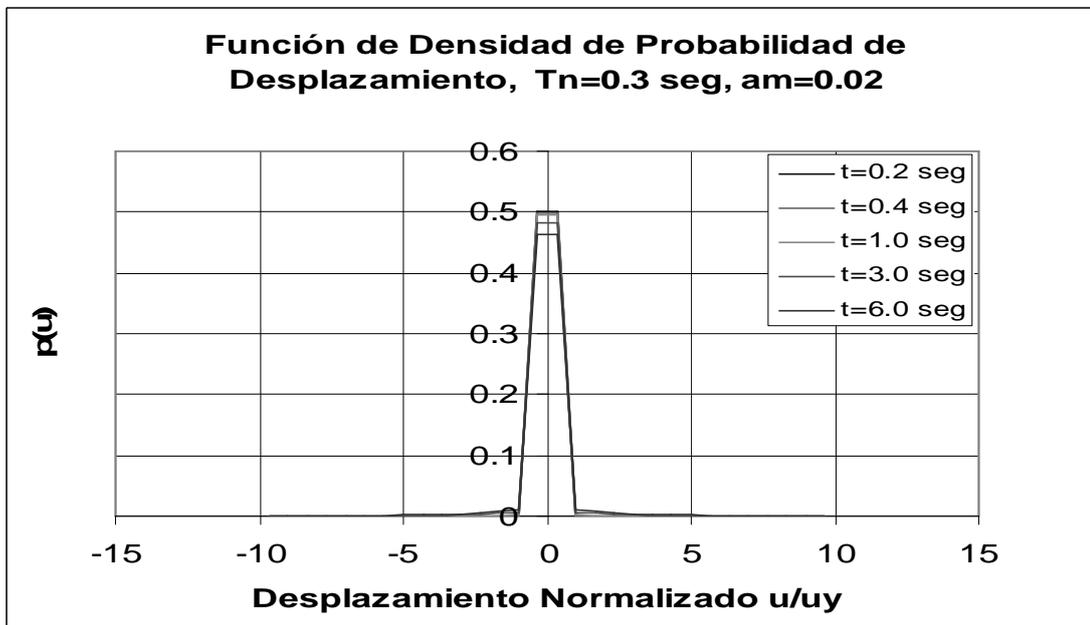


Fig. 3. Función de densidad de probabilidad de desplazamiento de un oscilador elástico perfectamente plástico solicitado por un ruido estacionario súbito.

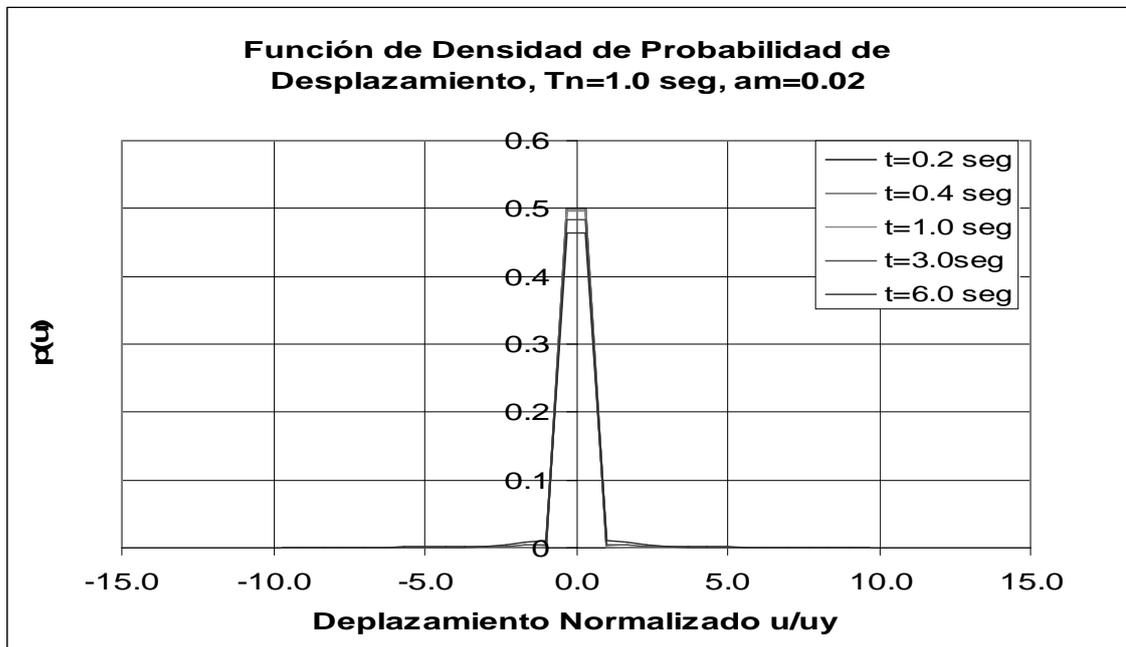


Fig. 4. Función de densidad de probabilidad de desplazamiento de un oscilador elástico perfectamente plástico solicitado por un ruido estacionario súbito.

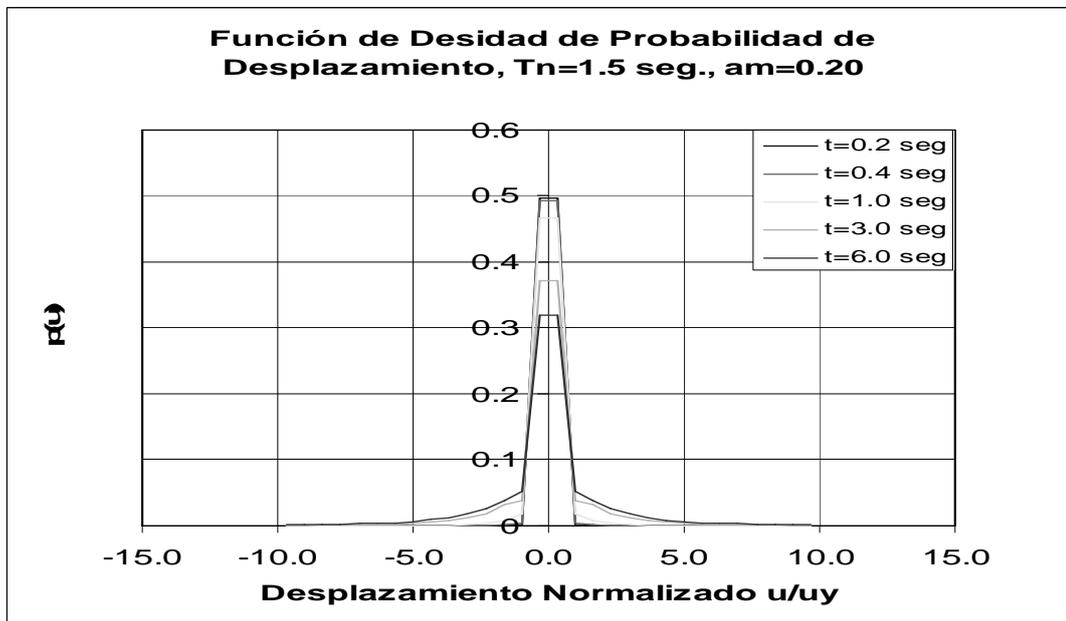


Fig. 5. Función de densidad de probabilidad de desplazamiento de un oscilador elástico perfectamente plástico solicitado por un ruido estacionario súbito.

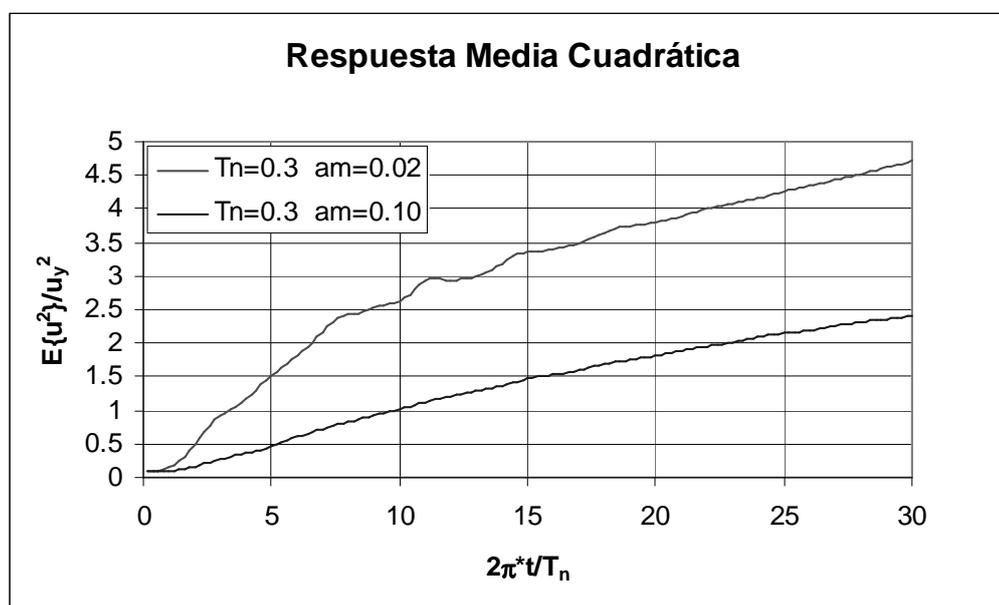


Fig. 6 Respuesta media cuadrática de un oscilador elástico perfectamente plástico para dos amortiguamientos diferentes.

## 9. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue financiado por la Dirección de Investigación de la Universidad de los Andes, proyecto ICIV02-002. Este soporte es profundamente agradecido.

## 10. REFERENCIAS

- [ 1 ] Saragoni G.R., y G. Hart, (1974) "Simulation of Artificial Earthquakes", *International journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 2, No. 3, pp. 249-267.
- [ 2 ] Shinozuka, M., (1970) "Random processes with evolutionary power", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, vol. 93, No. EM4, pp. 543-545.
- [ 3 ] Chang M., J. Kwiatkowski, R. Nau, R. Oliver, K. Pister, (1982) "ARMA models for earthquake ground motions", *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. Vol. 10, pp. 651-662.
- [ 4 ] Der Kiureghian, A. y J. Crempien, (1989) "An evolutionary model for earthquake ground motion" *Structural Safety*, Vol. 6, pp. 235-246.
- [ 5 ] Crempien J. y L. Orozco, (2000) "An evolutionary ground motion model for earthquake analysis of structures in zones with little history", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 20, pp.373-379.

- [ 6 ] Caughey T. (1963) “ Derivation and application of the Fokker-Planck equation to discrete nonlinear dynamic systems subjected to white random excitation”, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 35, No. 11, pp. 1683-1692.
- [ 7 ] Kobori, T., R. Minai, Y. Suzuki, (1976) “Stochastic seismic response of hysteretic structures”, *Bulletin of the Disaster Prevention Institute*, Universidad de Kioto, Japón, Vol. 26, Part 1, No. 236, pp. 57-70.
- [ 8 ] Asano, K. y S. Suzuki, (1975) “Study on nonlinear hysteretic response of a single and multi storeyed building structures to random excitation”, *Report No. 17*, Kansay University, pp. 143-155.
- [ 9 ] Kobori, T., R. Minai, y K. Asano, (1974) “Random response of the nonlinear system with hysteretic characteristics”, *Theoretical and Applied Mechanics*, University of Tokyo Press, Vol. 24, pp. 239-248.
- [ 10 ] Sakata, M. y K. Kimura, (1980) “Calculation of the non stationary mean square response of a nonlinear system subjected to non-white excitation”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 73, No. 3, pp. 333-243.
- [ 11 ] Crempien, J., (1988). *A time-frequency evolutionary model for earthquake motion and structural response*, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley.
- [ 12 ] Crempien, J., y Saragoni, R., (1980) “Gaussian Properties of Earthquake Ground Motions”, *Proceedings, 7<sup>th</sup> World Conference on Earthquake Engineering*, Vol 2., pp. 491-498, Estambul, Turquía.
- [ 13 ] Caughey T. y F. Ma (1982) “The exact steady state response of a class of nonlinear stochastic systems” , *International Journal of Nonlinear Mechanics*, Vol. 17, No. 3, pp.137-142.
- [ 14 ] Barber T. y Y.K. Wen, (1980) “Stochastic equivalent linearization for hysteretic, degrading, multistory structures”, *Civil Engineering Studies*, SRS No. 471, Department of Civil Engineering, University of Illinois, Urbana.
- [ 15 ] Cai G. y Y.K. Lin, (1988) “On exact stationary solutions of equivalent nonlinear stochastic systems”, *International Journal of Non Linear Mechanics*, Vol. 23, No. 4, pp. 315-325.
- [ 16 ] F. Casciati, (1987) “Nonlinear Stochastic Dynamics of Large Structural Systems by equivalent linearization”, *Proceedings, 5<sup>th</sup> International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*, Vancouver, Canada, pp. 1165-1172.
- [ 17 ] Eliashakoff, I. y G. Cai, (1992) “Approximate solution for nonlinear random vibration problems by partial stochastic linearization.”, *Non Linear Vibrations*, ASME winter annual meeting, AMD, Vol. 144, pp. 117-121.
- [ 18 ] Stratonovic, R.I., (1963), *Topics in the theory of random noise*, Gordon and Breach Science publishers, London, 1963.
- [ 19 ] Bergman, L.A., Spencer B.F,(1992) “Robust Numerical Solution of the Transient Fokker Planck Equation for Non Linear Systems,” en *Nonlinear Stochastic Mechanics*, F. Bellomo y F. Casciatti Eds.) Springer Verlag, Berlin, pp. 49-60.
- [ 20 ] Wojtkiewicz, S.F., Bergamn. L.A., y Spencer, B.F., (1995), “Numerical Solution of some Three-State Random Vibration Problems, *Proceedings*, Symposium on

- Dynamics and Control of Stochastic Dynamical Systems, Fifteenth ASME Biennial Conference on Mechanics Vibration and Noise, Boston, Mass. Pp. 939-947.
- [ 21 ] Langley, R.S., (1985) "A Finite Element Method for the Statistics of Non-Linear Random Vibration", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 101, No.1 , pp. 41-54.
- [ 22 ] Langley, R.S., (1987), "A Finite Element Method for the Survival Probability of Nonlinear Oscillations", *Computers and Structures*, Vol. 27, No. 5, pp. 611-617.
- [ 23 ] Langley, R.S., (1988)"A Variational Formulation of the FPK Equations with Application to the First Passage Problem in Random Vibration", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 123, No. 2, pp. 213-227.