

MODELO VORTICIDADE - FUNÇÃO DE CORRENTE PARA INTEGRAÇÃO
INVERSA DE CAMADA LIMITE LAMINAR E INCOMPRESSÍVEL

José Carlos A. do Amarante

Seção de Engenharia Mecânica
Instituto Militar de Engenharia
Rio de Janeiro - Brasil

RESUMO

Um modelo vorticidade-função de corrente, baseado em variáveis de similaridade, é utilizado na integração inversa das equações da camada limite antes, durante e após a separação. Essa formulação, além de eliminar das equações de governo o desconhecido campo de pressões, assegura uma transição numérica simplificada do método direto para o inverso. Outra característica do modelo é a obtenção de uma relação simples entre a função de corrente e a espessura de deslocamento prescrita para a região separada. O processo numérico selecionado é o Método Caixa de Keller, que é implícito, incondicionalmente estável e com uma acurácia de segunda ordem. O modelo é aplicado com sucesso aos casos-teste de Carter, considerados por Cebeci et. al. como os testes mais severos da literatura.

ABSTRACT

A vorticity-stream function, based on similarity variables, is used for the inverse integration of the boundary-layer equations for either separated flows or flows before separation. This formulation eliminates the unknown pressure distribution from the governing equations and ensures a simplified numerical transition from the direct to the inverse mode. Another feature of the model is the establishment of simple relationship between the stream function and the prescribed displacement thickness for the separated region. The adopted numerical procedure is the Keller Box Method, which is implicit, unconditionally stable and second order accurate. The model is applied with success to the test cases proposed by Carter, considered by Cebeci et. al. as the most severe teste available on the literature.

1. INTRODUÇÃO

Desde o estudo pioneiro de Goldstein [1] sobre a separação da camada limite incompressível, plana e laminar, vários pesquisadores vêm se dedicando à análise desse complexo fenômeno. O método clássico de integração das equações da camada limite, conhecido como problema direto, sofre a influência do comportamento singular constatado por Goldstein e não consegue ultrapassar o ponto de descolamento.

Há cerca de duas décadas, Catherall e Mangler [2] descobriram que é possível a remoção de singularidade do tipo raiz quadrada, no ponto de separação, efetuando uma integração regular das equações da camada limite, pela consideração de interações visco-inviscidas. Esse enfoque, conhecido hoje como o problema inverso da camada limite [3], consiste na adoção de um suposto perfil de espessura de deslocamento [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11] ou da tensão de cisalhamento [3, 4, 5, 12, 13] e da avaliação do campo de pressão correspondente.

A grande vantagem relacionada com a simplicidade das equações da camada limite pode ser comprometida pelo uso de uma equação parabólica para estudar a região de separação. Esta, de caráter sabidamente elítico, é caracterizada pela existência de uma região de circulação, onde os efeitos se propagam a montante. Entretanto, quando essa bolha recirculante é pequena, torna-se possível eliminar a fonte de problemas supondo o termo convectivo $u \partial u / \partial x$, na equação da quantidade de movimento, nulo sempre que u for negativo. Este procedimento é conhecido como a aproximação de Rayhner e Flügge-Lotz [14].

Neste trabalho, é proposto um modelo com variáveis de similaridade para resolver numericamente escoamento planos antes, durante e após a região de separação. Uma vantagem óbvia desse tratamento é a transição simplificada do método numérico direto para o indireto, uma vez que nenhuma transformação de variáveis é necessária. Uma formulação vorticidade-função de corrente é utilizada para eliminar das equações de governo o conhecido campo de pressões [9].

O procedimento numérico adotado, conhecido como o Método Caixa de Keller [15], tem sido largamente empregado em problemas do tipo camada limite. Suas propriedades de realce são velocidade, estabilidade e acurácia.

O modelo plano é aplicado com sucesso aos casos-teste propostos por Carter [4], que, segundo Cebeci et. al. [7], parecem ser os testes mais severos para um método inverso, uma vez consideram espessuras de deslocamento com grandes gradientes.

2. FORMULAÇÃO ANALÍTICA

As equações da camada limite para um fluido incompressível em escoamento plano, laminar e em regime permanente são:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\theta u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2)$$

onde u e v são os componentes do vetor velocidade nas direções das coordenadas Cartesianas x e y , respectivamente. O campo de pressões é representado por $p(x)$ e a viscosidade cinemática por ν . O parâmetro de Rayhner e Flügge-Lotz [14], θ , é nulo no interior da região onde u é negativo. Fora dessa região, θ é unitário e as usuais equações da camada limite são recuperadas.

A pressão não conhecida $p(x)$ é eliminada das equações de governo pela diferenciação da equação da quantidade de movimento (2) em relação a y . Além da vantagem de eliminar da integração aquela variável desconhecida, esse enfoque permite a construção, do modelo vorticidade-função de corrente. Outro objetivo, é estabelecer um relacionamento simples entre a função de corrente e a espessura de deslocamento prescrita e, consequentemente, simplificar as condições de contorno externas.

A introdução da vorticidade aproximada da camada limite, $w(x,y)$, e da função de corrente, $\psi(x,y)$, definidas por

$$w(x,y) = - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4 \text{ a,b})$$

permite estabelecer o sistema de equações da camada limite para escoamento com recirculação:

$$\theta \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + (\theta-1) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} w - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - w \quad (6)$$

As condições de contorno para o problema são:

na parede: $\psi(x,0) = 0 \quad , \quad u(x,0) = \frac{\partial \psi(x,0)}{\partial y} = 0 \quad (7 \text{ a,b})$

no topo: $w(x,y_e) = 0 \quad (7 \text{ c})$

$$\delta_T(x) = \int_0^{y_e} \left(1 - \frac{1}{U_e(x)} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy = \text{função prescrita} \quad (7 \text{ d})$$

Tradicionalmente, os escoamentos não similares na camada limite têm sido resolvidos com variáveis de similaridade. Assim, a função de corrente pode ser definida como

$$\Psi(x,\eta) = \sqrt{\nu x} U_\infty f(x,\eta) \quad (8)$$

onde

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} \quad (9)$$

A substituição da equação (8) na equação (6) conduz a definição da nova função vorticidade $g(x, \eta)$,

$$w(x, \eta) = -U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} g(x, \eta) \quad (10)$$

O sistema de governo expresso em termos das variáveis de similaridade é:

$$g_{\eta\eta} + f g_\eta + (\theta-1)\eta f_\eta g_\eta + \theta f_\eta g + (\theta-1)\eta f_{\eta\eta} g = \quad (11)$$

$$= 2 \bar{x}(\theta f_\eta g_{\bar{x}} - f_{\bar{x}} g_\eta) + 2(\theta-1)\bar{x} f_{\eta\bar{x}} g$$

$$f_{\eta\eta} = g \quad (12)$$

As condições de contorno são:

na parede: $f(\bar{x}, 0) = 0$, $f_\eta(\bar{x}, 0) = 0$ (13 a,b)

no topo: $g(\bar{x}, \eta_e) = 0$ (13 c)

$$f(\bar{x}, \eta_e) = \frac{U_e(\bar{x})}{U_\infty} [\eta_e - \delta^*(\bar{x})] \quad (13 d)$$

onde

$$\delta^*(\bar{x}) = \delta_T(\bar{x}) \sqrt{\frac{R_{\infty, L}}{2\bar{x}}} = \text{função prescrita} \quad (14)$$

As barras referem-se à adimensionalização relativa ao comprimento arbitrário L . Aqui, $R_{\infty, L}$ é o número de Reynolds baseado na velocidade potencial não perturbada, U_∞ , e em L .

A velocidade no topo da camada é dada por

$$U_e(\bar{x}) = U_\infty f_\eta(\bar{x}, \eta_e) \quad (15)$$

e o campo de pressões é obtido da equação de Bernoulli

$$\rho U_e \frac{dU_e}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0 \quad (16)$$

É importante considerar que o problema inverso tem como condição inicial a solução do problema padrão em algum ponto x_0 a montante da região de separação. Conseqüentemente, é necessário resolver o problema direto na região $0 < x < x_0$. No caso de escoamento plano, uma camada limite não-similar começa como um perfil de Blasius e evolui segundo as equações:

$$g_{\eta\eta} + f g_{\eta} + f_{\eta} g = 2 \bar{x} (f_{\eta} g_{\bar{x}} - f_{\bar{x}} g_{\eta}) \quad (17)$$

$$f_{\eta\eta} = g \quad (18)$$

A única modificação nas condições de contorno do problema inverso para o direto é a especificação da velocidade potencial no topo em substituição à espessura de deslocamento:

$$f_{\eta}(\bar{x}, \eta_e) = \frac{U_e(\bar{x})}{U} = \bar{U}_e(\bar{x}) = \text{função conhecida} \quad (19)$$

Assim, a transição entre o método padrão e o inverso no código computacional é consideravelmente simplificada. Ela se dá através de um simples comando, fazendo alterar a condição de contorno no topo da camada.

Para controlar a proximidade dos pontos de separação e de recolamento, o método utiliza o parâmetro de Meksyn [16], definido por

$$\lambda(x) = - \frac{2}{U_e^2} \frac{dU_e}{dx} \int_0^x U_e dx \quad (20)$$

Meksyn mostrou, para diversos casos de separação laminar, que $\lambda(x)$ atinge um máximo pouco antes do ponto de separação.

3. PROCEDIMENTO NUMÉRICO

3.1. SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENÇA DE PRIMEIRA ORDEM

O procedimento numérico selecionado é o Método Caixa, desenvolvido por Keller [15] e descrito detalhadamente por Cebeci e Bradshaw [17]. Esse método é implícito, incondicionalmente estável e possui acurácia de segunda ordem.

Basicamente, a idéia é escrever as equações de governo (11) - (12) na forma de um sistema de primeira ordem:

$$f_{\eta} = t \quad (21 a)$$

$$t_{\eta} = g \quad (21 b)$$

$$s_{\eta} = w \quad (21 c)$$

$$w_{\eta} = -fw - (\theta-1)ntw - \theta tg - (\theta-1)\eta g^2 + 2x(\theta tg_x - wf_x + (\theta-1)gt_x) \quad (21 d)$$

Com o sistema resultante, e numa malha retangular arbitrária (figura 1), são consideradas fórmulas de diferença central de primeira ordem e são tomados valores médios das funções nos pontos centrais dos segmentos e dos retângulos. Os pontos nodais da malha são

$$x_0 = \text{conhecido}, \quad x^n = x^{n-1} + k^n \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

$$\eta_0 = 0, \quad \eta_j = \eta_{j-1} + h_j \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad \eta_J = \eta_e$$

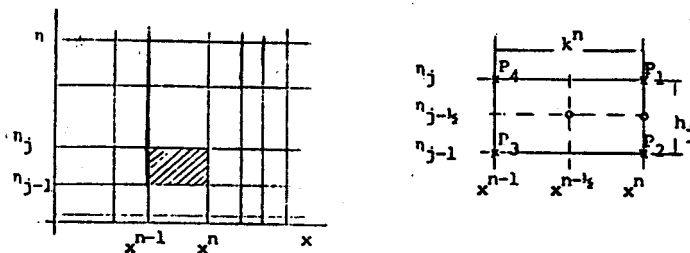


Figura 1 Malha retangular (16).

As equações (21a)-(21c) são centradas em torno de $(x^{n-1/2}, \eta_{j-1/2})$, pois não envolvem derivadas em x :

$$h_j^{-1} (f_j^n - f_{j-1}^n) = t_{j-1/2}^n; \quad h_j^{-1} (t_j^n - t_{j-1}^n) = g_{j-1/2}^n; \quad h_j^{-1} (g_j^n - g_{j-1}^n) = w_{j-1/2}^n \quad (23 \text{ a-c})$$

Por outro lado, a equação (21 d) é centrada em torno de $(x^{n-1/2}, \eta_{j-1/2})$:

$$h_j^{-1} (w_j^n - w_{j-1}^n) + Q_1 (fw)_{j-1/2}^n + \beta_1 (tg)_{j-1/2}^n + (\theta-1) \eta_{j-1/2} [(tw)_{j-1/2}^n + (g^2)_{j-1/2}^n] + \alpha [t_{j-1/2}^n g_{j-1/2}^{n-1} - t_{j-1/2}^{n-1} g_{j-1/2}^n + w_{j-1/2}^{n-1} f_{j-1/2}^n - w_{j-1/2}^n f_{j-1/2}^{n-1}] = R_{j-1/2}^{n-1} \quad (23 \text{ d})$$

onde

$$R_{j-1/2}^{n-1} = - \{ h_j^{-1} (w_j^{n-1} - w_{j-1}^{n-1}) + Q_2 (fw)_{j-1/2}^{n-1} + \beta_2 (tg)_{j-1/2}^{n-1} + (\theta-1) \eta_{j-1/2} [(tw)_{j-1/2}^{n-1} + (g^2)_{j-1/2}^{n-1}] \} \quad (24)$$

$$\alpha = 2 \frac{x^{n-1/2}}{k^n}, \quad Q_1 = 1 + \alpha, \quad Q_2 = 1 - \alpha$$

$$\beta_1 = \theta - (2\theta-1)\alpha, \quad \beta_2 = \theta + (2\theta-1)\alpha$$

As condições de contorno para o problema inverso (equações 13 a-d) assumem a seguinte forma em x:

$$f_0^n = 0 \quad t_0^n = 0 \quad g_j^n = 0 \quad f_j^n = t_j^n (j - \bar{\delta} * (x^n)) \quad (25a-d)$$

Um sistema algébrico implícito, não linear, de $4J+4$ equações e tendo como incógnitas $(f_j^n, t_j^n, g_j^n, w_j^n)$ é obtido a partir das equações (23) quando submetidas as condições de contorno (25). Esse sistema pode ser efetivamente resolvido (17), através de sua linearização pelo método de Newton e, em seguida, pelo uso do método de eliminação em bloco no conjunto de equações resultante.

3.2. LINEARIZAÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON

O processo consiste em resolver iterativamente o sistema de diferenças finitas (23)-(25) em cada estação x^n , considerando como valor inicial de cada iteração o valor das funções na estação anterior x^{n-1} . Para facilitar a manipulação das equações, é estabelecida, para qualquer função na malha de integração em x^n , a notação $q_j^n = q_j^{(i)}$ ($i=0,1,2,\dots$).

A linearização entra em cena através das iterações de ordem superior, que são aproximadas por:

$$q_j^{(i+1)} = q_j^{(i)} + \delta q_j^{(i)} \quad (26)$$

A substituição do lado direito da equação (26) por cada função de malha no sistema (23) e a eliminação dos termos quadráticos em $(\delta f_{j-1}^{(i)}, \delta t_{j-1}^{(i)}, \delta g_{j-1}^{(i)}, \delta w_{j-1}^{(i)})$ resulta num conjunto linearizado de equações do tipo (por simplicidade, os índices i nas quantidades são omitidos):

$$\delta f_j - \delta f_{j-1} + a_j (\delta t_j + \delta t_{j-1}) = (r_1)_j \quad (27 a)$$

$$\delta t_j - \delta t_{j-1} + a_j (\delta g_j + \delta g_{j-1}) = (r_2)_j \quad (27 b)$$

$$\begin{aligned} (s_1)_j \delta w_j + (s_2)_j \delta w_{j-1} + (s_3)_j \delta g_j + (s_4)_j \delta g_{j-1} + (s_5)_j \delta t_j + \\ + (s_6)_j \delta t_{j-1} + (s_7)_j \delta f_j + (s_8)_j \delta f_{j-1} = (r_3)_{j-1} \end{aligned} \quad (27 c)$$

$$\delta g_j - \delta g_{j-1} + a_j (\delta w_j + \delta w_{j-1}) = (s_4)_{j-1} \quad (27 d)$$

Uma descrição detalhada dos termos do sistema (27) é encontrada na referência [9]. As condições de contorno linearizadas são obtidas de (25):

$$\delta f_0 = 0 \quad (28 a)$$

$$\delta u_0 = 0 \quad (28 b)$$

$$\delta g_J = 0 \quad (28 \text{ c})$$

$$\delta f_J - \delta U_J(\eta_J - \bar{\delta}^*) = (\eta_J - \bar{\delta}^*) u_J^{(i)} - f_J^{(i)} = K^{(i)} \quad (28 \text{ d})$$

3.3. MÉTODO DE ELIMINAÇÃO EM BLOCO

O conjunto linearizado das equações diferenças obtido a partir das equações da função de corrente e da vorticidade possui uma estrutura tri-diagonal em bloco. Devido a essa característica, ele pode ser resolvido de modo eficiente pelo método de eliminação em bloco proposto por Keller (15).

O sistema acima é expresso na seguinte forma matricial:

$$A \delta = \lambda \quad (29)$$

onde A é uma matriz tipo banda da forma

$$A \equiv [B_j, A_j, C_j], \quad 0 < j < J; \quad (30)$$

e δ e λ são vetores definidos por

$$\delta^T \equiv (\delta_0, \dots, \delta_J); \quad \lambda^T \equiv (\lambda_0, \dots, \lambda_J) \quad (31)-(32)$$

onde o índice superior T refere-se ao vetor transposto.

B_j , A_j e C_j são matrizes 4x4 expressas por:

$$B_j = \begin{bmatrix} -1 & a_j & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -a_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 1 < j < J \quad (33)$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ (s_8)_1 & (s_6)_1 & (s_4)_1 & (s_2)_1 \\ 0 & 0 & -1 & -a_1 \end{bmatrix}; \quad A_J = \begin{bmatrix} 1 & -a_J & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_J & 0 \\ 1 & -(\eta_J - \bar{\delta}^*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} 1 & -a_j & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_j & 0 \\ (s_8)_{j+1} & (s_6)_{j+1} & (s_4)_{j+1} & (s_2)_{j+1} \\ 0 & 0 & -1 & -a_{j+1} \end{bmatrix} \quad 0 < j < J-1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (s_7)_{j+1} & (s_5)_{j+1} & (s_3)_{j+1} & (s_1)_{j+1} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{j+1} \end{bmatrix} \quad 0 < j < J-1$$

(35)

δ_j e r_j são vetores expressos por:

$$\delta \equiv \begin{bmatrix} \delta f_j \\ \delta t_j \\ \delta g_j \\ \delta w_j \end{bmatrix} \quad 0 \leq j \leq J \quad (36)$$

$$r_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (r_3)_o \\ (r_4)_o \end{bmatrix}; \quad r_j = \begin{bmatrix} (r_1)_j \\ (r_2)_j \\ (r_3)_j \\ (r_4)_j \end{bmatrix} \quad 1 \leq j \leq J-1; \quad r_J = \begin{bmatrix} (r_1)_J \\ (r_2)_J \\ K \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Keller mostrou que se A pode ser fatorada na forma

$$A = L U; \quad L \equiv [\Gamma_j, I, 0]; \quad U \equiv [0, \Delta_j, C_j] \quad 0 \leq j \leq J \quad (38)$$

então a sua solução é dada pelo sistema:

$$U \delta = t \quad (39)$$

$$L t = \lambda \quad (40)$$

Aqui, I é a matriz identidade de ordem 4, $\Gamma_j = (\gamma_{ik})_j$ e $\Delta_j = (\alpha_{ik})_j$ são matrizes 4x4.

A fatoração em (38) requer que:

$$\Delta_0 = A_0 \quad (41a)$$

$$\Delta_j = A_j - \Gamma_j C_{j-1} \quad 1 \leq j \leq J \quad (41b)$$

$$\Gamma_j \Delta_{j-1} = B_j \quad 1 \leq j \leq J \quad (41c)$$

A avaliação dos elementos $(\gamma_{ik})_j$, de Γ_j , e $(\alpha_{ik})_j$, de Δ_j fornece os dados necessários para a resolução do sistema (39) e (40).

A equação matricial (40) gera os componentes do vetor t :

$$t_0 = r_0 \quad (42a)$$

$$t_j = r_j - \Gamma_j t_{j-1} \quad 1 \leq j \leq J \quad (42b)$$

Da mesma forma, a equação matricial (39) possibilita a obtenção do vetor solução δ :

$$\Delta_J \delta_J = t_J \quad (43a)$$

$$\Delta_j \delta_j = t_j - C_j \delta_{j+1} \quad J-1 \geq j \geq 0 \quad (43b)$$

A aplicação do método de eliminação em bloco é feita em duas fases principais: a) varredura para frente, mediante o cálculo de Γ_j , Δ_j e t_j ; b) varredura para trás, quando são calculados os componentes δ_j .

As varreduras são repetidas até que um critério de convergência seja satisfeito. Segundo Cebeci e Bradshaw [17], o critério mais comum para métodos iterativos de integração da camada limite é relacionado à tensão de cisalhamento na parede:

$$\left\{ (f_{\eta\eta})_w^{(i+1)} - (f_{\eta\eta})_w^{(i)} \right\} < \epsilon_1 \quad (44)$$

No caso presente, este critério não é adequado porque nas imediações da separação a tensão de cisalhamento na parede, pode ser $O(\epsilon_1)$. Em consequência, é proposto um critério mais apropriado.

$$\left\{ f_e^{(i+1)} - f_e^{(i)} \right\} < \epsilon_1 \quad (45)$$

uma vez que a função de corrente não se anula no topo da camada limite. Nos trabalhos de aplicação foi utilizado $\epsilon_1 = 10^{-5}$.

4. APLICAÇÃO

Para examinar o comportamento do modelo desenvolvido, foram selecionados os casos A e B prescritos por Carter [4]. O perfil inicial, em x_0 , é o de Blasius. A figura 2 mostra as espessuras de deslocamento consideradas como condição de contorno para o método inverso de integração da camada limite.

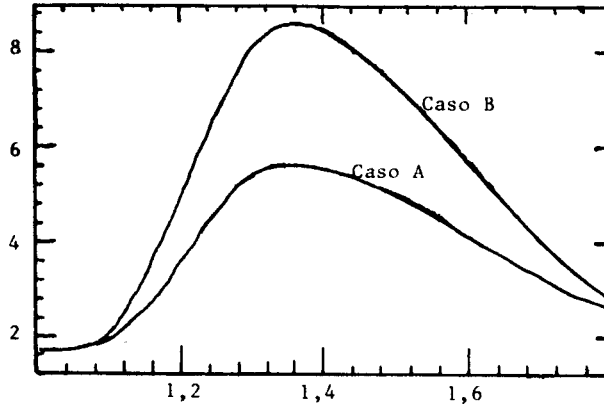


Figura 2 Espessuras de deslocamento prescritas para os Casos Testes (Carter [4]).

Foram utilizadas duas malhas de integração. Na malha grossa, tomouse $\Delta x = 0,025$ e $\Delta \eta = 0,20$ e, na malha fina, $\Delta x = 0,0125$ e $\Delta \eta = 0,10$.

As figuras 3 e 6 mostram a coincidência na predição dos pontos de separação e de recolamento entre os resultados obtidos nesse trabalho e os obtidos por Carter. O coeficiente de fricção calculado pela malha grossa reproduziu o valor do coeficiente resultante da integração com a malha fina.

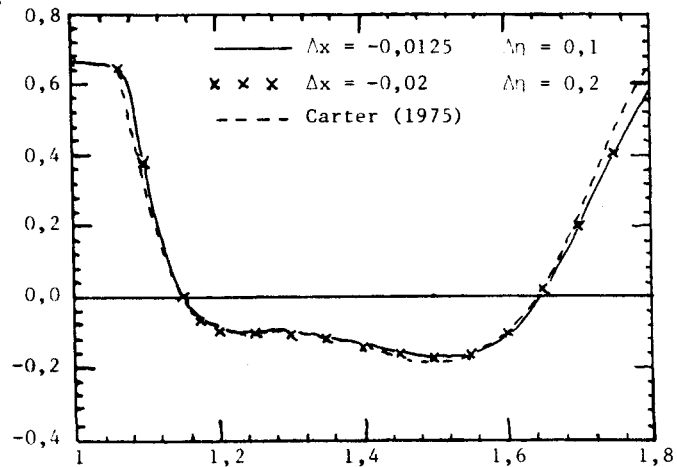


Figura 3 Coeficiente de fricção na parede para o Caso A.

As figuras 4 e 7 mostram a velocidade no topo da camada limite calculada pelo modo inverso. No caso A, observa-se excelente concordância entre os resultados de Carter e os de ambas as malhas. Entretanto, no caso B, o mais severo, a integração com a malha grossa não reproduziu tão bem os resultados obtidos com a malha fina e por Carter.

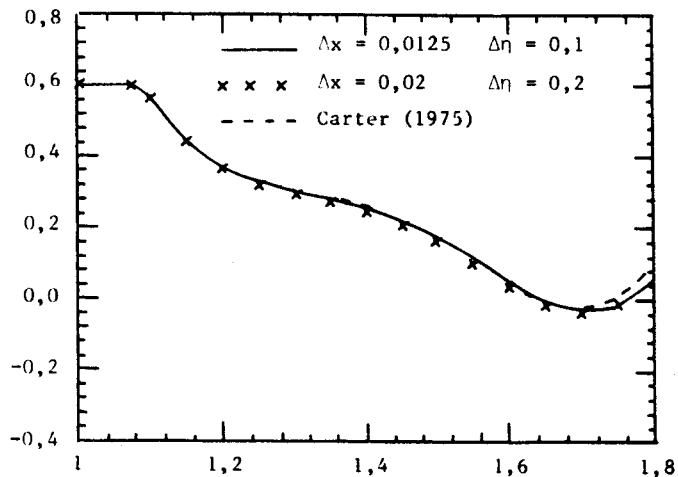


Figura 4 Velocidade no topo para o Caso Teste A.

Meksyn [17] observou que $\lambda(x)$ atinge um máximo antes do ponto de descolamento. As figuras 5 e 8 evidenciam um interessante aspecto daquele parâmetro, já constatado por Carter: o recolamento ocorre a uma pequena distância a jusante de um segundo máximo local.

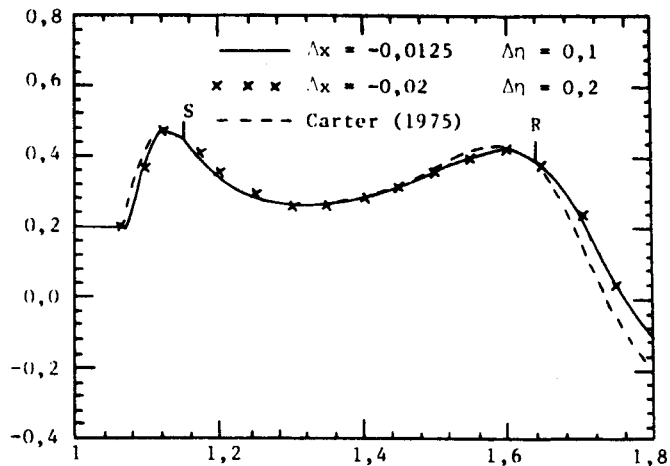


Figura 5 Parâmetro gradiente de pressão de Meksyn para o Caso Teste A (S - separação; R - recolamento).

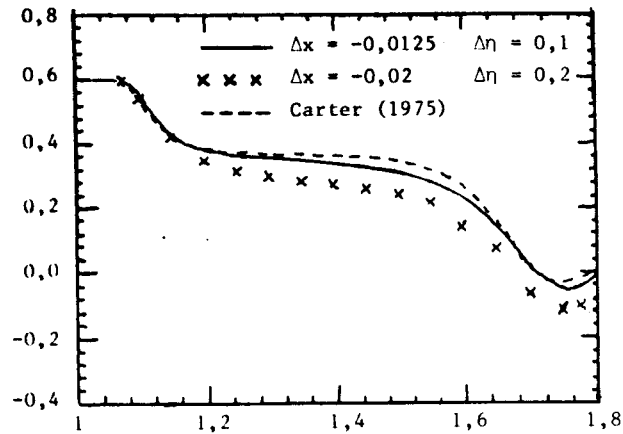


Figura 6 Coeficiente de fricção na parede para o Caso Teste B

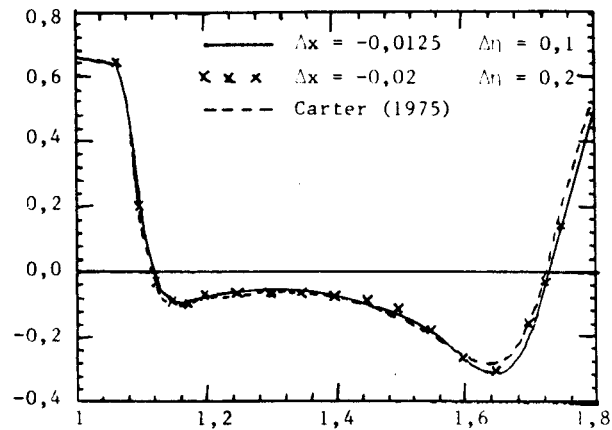


Figura 7 Velocidade no topo para o Caso B.

Uma vantagem considerável do método desenvolvido é a grande velocidade de convergência. Na tabela 1, é feita uma comparação entre o número médio de iterações por estação na direção de escoamento obtido com as soluções de Carter. Em certos casos, o Método Caixa é sete vezes mais rápido do que o Método de Crank-Nicholson adotado por Carter.

A velocidade de processamento é outra característica do método. O tempo CPU, em computador IBM 370/168, para todos os casos considerados foi inferior a um minuto (Caso A - malha grossa: 0,25 min, malha fina : 0,72 min; Caso B - malha grossa: 0,28 min, malha fina: 0,82 min).

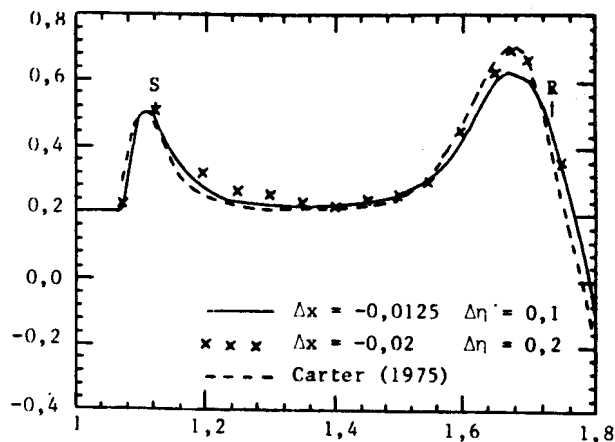


Figura 8 Parâmetro gradiente de pressão de Meksyn para o Caso B (S - separação; R - recolamento).

Tabela I - Comparação da taxa média de convergência em diferentes estações na direção do escoamento.

Caso	Número Médio de Iterações por Coluna	
	Carter (1975)	Valor Obtido
A, malha grossa ($\Delta x = 0,25$; $\Delta \eta = 0,2$)	18	4
A, malha fina ($\Delta x = 0,0125$; $\Delta \eta = 0,1$)	14	3
B, malha grossa	41	6
B, malha fina	28	4

5. CONCLUSÃO

Houve uma excelente concordância de resultados entre o modelo vorticidade-função de corrente proposto e as soluções de Carter para o coeficiente de fricção, a velocidade potencial e o parâmetro de Meksyn.

No caso A, o resultado da integração da camada limite com a malha fina reproduz a solução obtida com a malha grossa. Entretanto, no caso B a superposição de resultados não é tão boa. Assim, dependendo da severidade das condições de integração, pode-se valer da propriedade de estabilidade incondicional do método para a seleção da maior malha de integração que assegure resultados reprodutíveis com malhas mais apertadas.

Os dois máximos apresentados pelo parâmetro de Meksyn têm uma conotação muito importante quando da análise de sua definição (equação 20) e, em particular, do gradiente da velocidade potencial dU_e/dx . As interações visco-inviscidas induzem pontos de inflexão no perfil de velocidade de topo nas vizinhanças da separação e do recolamento. Isso significa que uma região separada pequena perturba e ajusta o escoamento externo de tal forma que a variação na velocidade potencial (ou na pressão) pode ser pequena, mas a variação de seu gradiente pode ser substancial.

A implementação numérica do Método Caixa de Keller é complexa. Entretanto, as vantagens referentes à estabilidade, à acurácia, à velocidade de convergência e à velocidade de processamento justificam a sua utilização na integração inversa das equações da camada limite.

6. REFERÊNCIAS

- [1] Goldstein, S., "On Laminar Boundary Layer Flow near a Position of Separation", Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol.1, 1948, págs. 43-69.
- [2] Catherall, C. e Mangler, K.W., "The Integration of the Two-Dimensional Laminar Boundary-Layer Equations Past the Point of Vanishing Skin Friction", J.Fluid Mech., Vol. 26, Part 1, 1966, págs.163-182.
- [3] Anderson, D.A., Tannehill, J.C. e Pletcher, R.H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", McGraw-Hill, 1984.
- [4] Carter, J.E., "Inverse Solutions for Laminar Boundary Layer Flows with Separation and Reattachment", NASA TR-477, 1975.
- [5] Carter, J.E. e Wornum, S.F., "A Forward Marching Procedure for Separated Boundary-Layer Flows", AIAA J., Vol. 13 nº 8, 1975, págs. 1101-1103.
- [6] Ghia, K.N., Ghia, U. e Tesch, W.A., "Evaluation of Several Approximate Models for Laminar Incompressible Separation by Comparison with Complete Navier-Stokes Equations", AGARD Symposium on Separated Flows, CP-168, 1975.
- [7] Cebeci, T., Keller, H.B. e Williams, P.G., "Separating Boundary Layer Calculations", comunicação privada, 1978.
- [8] Cebeci, T., "The Calculation of Momentum and Heat Transfer in Internal Flows and in Flows with Small Regions of Separations", Aula na Universidade de Bogazici, Turkey, 1978.
- [9] Amarante, J.C.A., "Viscous-Inviscid Interactions in Laminar Flows near Separation Regions and Corners", Ph.D. Thesis, Stanford University, 1979.
- [10] Horton. H.P., "Comparisons Between Inverse Boundary - Layer Calculations and Detailed Measurements in Laminar Separated Flows", Aero. Quart., Vol. XXXII, Aug 1981, págs. 169-187.
- [11] Radwan, S.F. e Lekoudis, S.G., "Boundary Layer Calculations in the Inverse Mode for Incompressible Flows over Infinite Swept Wings", AIAA J., Vol. 22, nº 6, 1984, págs. 737-743.
- [12] Horton, H.P., "Separating Laminar Boundary Layers with Prescribed Wall Shear", AIAA J., Vol. 12, 1974, págs. 1772-1774.
- [13] Klineberg, J.M. e Steger, J.L., "On Laminar Boundary Layer Separation", AIAA Paper nº 74-94, 1974.
- [14] Reyhner, T.A. e Flugge-Lotz, I., "The Interaction of a Shock - Wave with a Laminar Boundary Layer", Int. J. Nonlinear Mech., Vol. 3, nº 2, 1968, págs. 173-199.
- [15] Keller, H.B., "Accurate Difference Methods for Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems", SIAM J. Numer. Anal., Vol.11, 1974, págs. 305-320.
- [16] Meksyn, D., "New Methods in Laminar Boundary Layer Theory", Pergamon Press, London, 1961.
- [17] Cebeci, T. e Bradshaw, P., "Momentum Transfer in Boundary Layers", McGraw-Hill, New York, 1977.