

IDENTIFICACION DE TRANSIENTES DE OPTIMIZACION  
EN PLANTAS DE PROCESO

Ernesto C. Martínez  
Ramón L. Cerro  
INGAR - Instituto de Desarrollo y Diseño  
Avellaneda 3657  
3000 - Santa Fe. Argentina

RESUMEN

Un esquema de optimización en línea de sistemas integrados de proceso basado en la identificación de un modelo dinámico con múltiples escalas de tiempo, se propone. La identificación recursiva de parámetros con el método de la variable instrumental en este tipo de sistemas es analizado y un esquema de identificación basado en una forma especial del método "bootstrap" para las variables instrumentales, es sugerido.

ABSTRACT

An on-line optimisation method for integrated processing systems based on identification of multi time scales Dynamic model is proposed. Recursive identification of parameters in this type of systems is analyzed and an identification scheme based on a special form of the "bootstrap" method for the instrumental variables, is suggested.

## 1. INTRODUCCION

En recientes trabajos, [1] [2] y [3], se ha puesto de manifiesto que la principal característica de la optimización de la operación de procesos es el "continuo cambio del óptimo operativo con el tiempo", para más detalles sobre la presencia de esta evolución, puede consultarse [4]. Esta característica dinámica del óptimo exige que cualquier política de seguimiento del óptimo sea aplicada en línea (on-line) y sobre la base de información proporcionada por el proceso real. Políticas de este tipo han sido previamente aplicadas [5], [7] y [8], en todas ellas se ha tomado como base la existencia de un estado estacionario para el modelo de la planta. Sólo recientemente [9] y [10], cierto tipo de información dinámica ha sido incorporado en el esquema de optimización.

A diferencia de otros sistemas ingenieriles, los sistemas de proceso son muy no-lineales y dependientes del tiempo, la incorporación de éstos, a través de modelos, en esquemas de optimización dan tiempo computacionales excesivos para ser aplicados en-línea. Por ésto, un esquema de identificación en-línea para ser lo más apropiado [8].

En [9] y [10] se propone que el seguimiento continuo del óptimo se lleve a cabo a través de la identificación de un modelo dinámico obtenido de la información proporcionada por la planta cuando un escalón en las variables manipulables del proceso, es introducido; en estos trabajos el problema de optimización en-línea se formula usando la parte de estado estacionario del modelo identificado. La suposición de estado estacionario para todas las variables de estado (supuestas medibles o conocidas) presenta varias dificultades y desventajas cuando es aplicado a sistemas de procesos con múltiples escalas de tiempo [11]. Un sistema posee múltiples escalas de tiempos cuando pueden distinguirse dos (o más) tipos de variables según una considerable diferencia de escala entre los autovalores de la matriz característica del sistema. Las dificultades pueden resumirse en:

i) las variables rápidas alcanzarán rápidamente el estado estacionario, pero las lentas no, por tanto la suposición de estado estacionario para todo el sistema solo será satisfecha si un considerable tiempo transurre entre dos actualizaciones sucesivas del óptimo, con lo cual disminuye la velocidad de seguimiento del óptimo.

ii) La matriz de información experimental usada en el esquema de identificación recursiva propuesto en [9] se torna singular cuando las variables "rápidas" alcanzan el estado estacionario, y por tanto un nuevo esquema de identificación es requerido.

mientras que las desventajas en:

i) La evolución dinámica del óptimo se manifiesta fundamentalmente a través de las variables lentas; por tanto un esquema de detección del movimiento del óptimo basado en estas variables sería más sencillo y rápido.

ii) no utiliza las escalas de tiempo para reducir la dimensionalidad del problema.

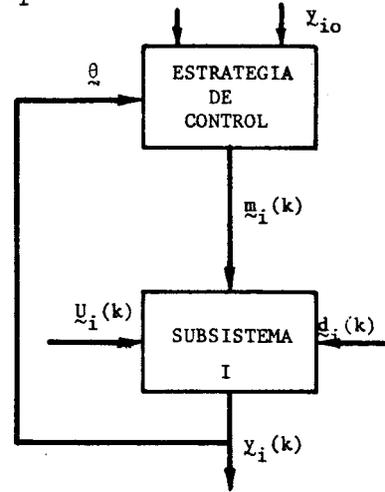
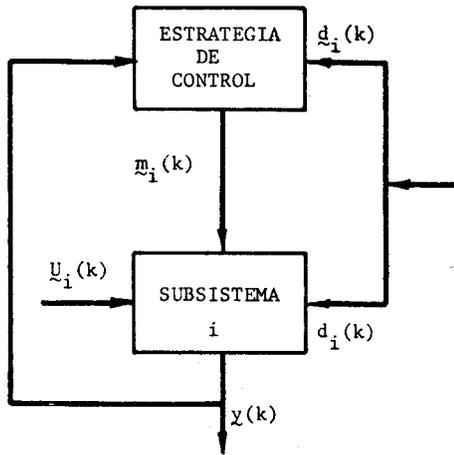
En este trabajo se propone identificar en-línea un modelo dinámico para la planta y utilizar la condición de estado estacionario sólo para

las variables rápidas. El problema de optimización en línea así planteado permite obtener una trayectoria óptima para las variables manipulables, que es permanentemente actualizada.

## 2. OPTIMIZACION EN-LINEA DE SISTEMAS DE PROCESO

### 2.1. El problema general:

Consideremos la optimización del subsistema  $i$  de la fig.1  $\underline{m}_i \in \mathbb{R}^m$  es el vector de entradas al subsistema  $i$  (libre de ruidos),  $\underline{U}_i \in \mathbb{R}^l$  es el vector de entradas al subsistema  $i$  (sujeto a "ruidos") debido a la interconexión con los otros subsistemas,  $\underline{\chi}_i \in \mathbb{R}^n$  es el vector de salidas y  $\underline{d}_i$  es el vector de perturbaciones.



En estas condiciones el problema de optimización se escribe como:

P1: sobre la base de las secuencias de valores  $\underline{\chi}_i(k)$ ,  $\underline{d}_i(k)$ ,  $\underline{U}_i(k)$   $k = 1, \dots, K-1$ , encontrar la secuencia de entradas  $\underline{m}_i^*(k)$ , que minimiza el funcional costo:

$$J_i = \sum_{k=0}^{k-1} \phi [ \underline{\chi}_i(k), \underline{U}_i(k), \underline{d}_i(k), \underline{m}_i(k) ] \quad (2.1)$$

sujeto a:

- ecuación de estado:

$$\underline{\chi}(k+1) = \underline{f} [ \underline{\chi}_i(k), \underline{U}_i(k), \underline{d}_i(k), \underline{m}_i(k) ] \quad (2.2)$$

$$\underline{\chi}_i(0) = \underline{\chi}_{i,0}$$

- ecuación de interconexión entre subsistemas:

$$\underline{U}_i = \underline{L} \underline{\chi} \quad (2.3)$$

donde  $\underline{L}_i$  es la matriz de "adyacencia"

- restricciones del tipo:

$$\underline{h}_i [y_i(k), \underline{U}_i(k), \underline{d}_i(k), \underline{m}_i(k)] \geq, 0 \quad (2.4)$$

$$k = 0, \dots, K-1$$

La presencia de las restricciones (2.4) puede implicar que alguna restricción se torne activa y por tanto un esquema de regulación deberá ser interfaceado con el optimizador [12]. A lo largo de este trabajo (2.4) no serán tenidas en cuenta; el esquema así concebido se denominará "optimización a lazo abierto", véase fig. 2.

Debido a que el vector  $\underline{d}_i$  es normalmente no medible y puesto que los modelos de proceso dados en (2.2) son en general no lineales y dependientes del tiempo, una considerable mejora en el esquema de optimización puede obtenerse si una solución en-línea del problema de optimización a lazo abierto se lleva a cabo sobre la base de información del sistema real. Un esquema "multicapa", como se propone en [13] - [15] sería el más adecuado en este caso. Como puede verse en la fig. 3, tres niveles de trabajo (podrían existir más) se distinguen: identificación, control directo y optimización en línea.

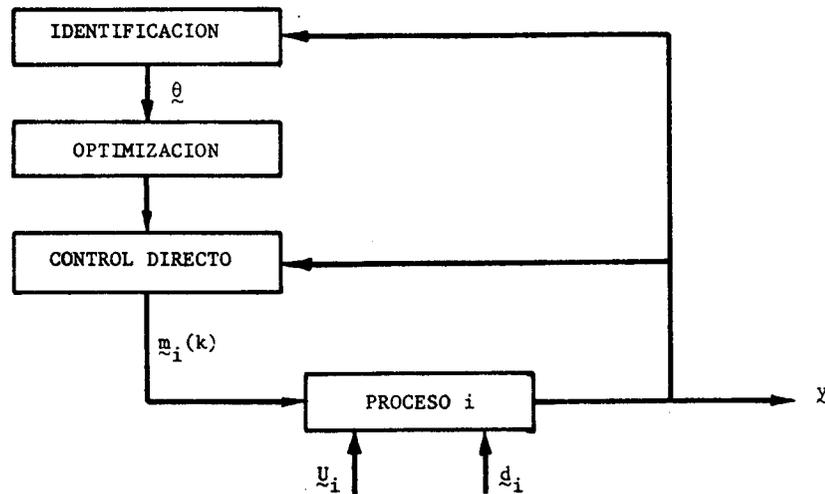


Fig. 3

\* Identificación : la ecuación de estado (2.2) se reescribe:

$$\underline{y}_i(k+1) = \psi [ \underline{y}_i(k), \underline{U}_i(k), \underline{m}_i(k), \underline{\theta} ] \quad (2.5)$$

donde  $\underline{\theta}$  es un vector de parámetros que contiene la información asociada a las perturbaciones y errores del modelo como así también la dependencia temporal de la descripción. La repetida identificación del vector  $\underline{\theta}$  es el elemento adaptativo que permite el seguimiento del óptimo.

\* Optimización en-línea: minimización del funcional (2.1) sujeto

a las restricciones (2.3) y (2.5).

\* Acción de control: debe transformar las "decisiones ( $U^*(k)$ )" provenientes de la capa de optimización en acciones de control real.

## 2.2. El problema Simplificado

La ocurrencia de singularidades (arcos singulares) en la solución del problema general, baja velocidad de convergencia, requerimientos de tiempo real, etc, hacen que la solución del problema general en línea, sea impracticable. Algunas simplificaciones basadas en "técnicas de agregación" de variables dinámicas o modelos de estado cuasi-estacionario han sido propuestos [16] y [17]. En este trabajo, se propone usar el esquema de perturbaciones singulares (véase sección 3) para separar las distintas partes de la dinámica de la planta.

Descripción del modelo:

Cada subsistema  $i$  será descrito por el modelo de tiempo discreto

$$\tilde{A}^i(q) \tilde{y}^i(k) = q^{\tau_i} \{ \tilde{B}^i(q) \tilde{m}^i(k) + \tilde{C}^i(q) \tilde{u}^i(k) \} + \tilde{v}^i(k) \quad (2.6)$$

$i=1,2,\dots,S$

donde  $\tilde{A}^i(q)$ ,  $\tilde{B}^i(q)$  y  $\tilde{C}^i(q)$  son matrices polinomiales en el operador "backward"  $q$ :

$$q \tilde{y}(k+1) = \tilde{y}(k) \quad (2.7)$$

y  $S$  es el número de subsistemas. El orden y estructura de estos modelos discretos dependen de la dimensión de estado y propiedades de observabilidad de los subsistemas individuales. El vector de "ruidos"  $\tilde{v}^i(k)$  combina los efectos de error de modelado de orden elevado con los errores de medida; debido a las interconexiones entre subsistemas, las  $\tilde{v}_j$  ( $j \neq i$ ) estará correlacionado a  $\tilde{v}_i$ .

Asumiremos que los órdenes de las matrices polinomiales, como así también los retardos dados por  $\tau_i$  son obtenidos previamente a la identificación ya sea por experimentación o conocimientos previos del sistema (se acepta comúnmente que modelos de 2º orden con retardo describen los procesos químicos con suficiente exactitud para propósitos de control).

Descripción del modelo con múltiples escalas de tiempo:

El modelo linealizado de un sistema de gran tamaño exhibiendo múltiples escalas de tiempo puede modelarse como conteniendo un "núcleo lento" y  $S$  "núcleos rápidos", lo cual puede escribirse como (en tiempo continuo):

$$\dot{Y}^S = \tilde{A}_{00} Y^S + \sum_{j=1}^S \tilde{A}_{0j} Z_j + \sum_{j=1}^S \tilde{B}_{0j} m_j \quad (2.8)$$

$Y(0) = Y_0$

$$\dot{Z}_i = \tilde{A}_{i0} Y^1 + \tilde{A}_{ii} Z_i + \sum_{j \neq i} \tilde{A}_{ij} Z_j + \tilde{B}_{ii} m_i \quad (2.9)$$

$Z_i(0) = Z_0$

Siendo:

$\gamma^s$ , parte lenta de  $\gamma$

$\underline{z}$ , parte rápida de  $\gamma$

Los parámetros de perturbaciones singulares  $\epsilon_i > 0$  (uno por cada subsistema) representan los parámetros físicos asociados a la existencia de las distintas escalas de tiempo, mientras que  $\epsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) son parámetros de perturbación regulares que representan el acople entre los subsistemas rápidos.

Vamos a suponer que en el  $k$ -ésimo subsistema despreciamos los parámetros de acople  $\epsilon_{ij}$ , lo cual significa que la dinámica rápida de cada subsistema es independiente y que los subsistemas interactúan sólo en las variables lentas. Con esta simplificación la "vista" que tenemos del sistema global cuando lo miramos desde el  $i$ -ésimo subsistema, queda descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\gamma}_i^s = \underline{A}_{io} \gamma_i^s + \sum_{j=1}^S \underline{A}_{oj} z_j + \sum_{j=1}^S \underline{B}_{oj} m_j \quad (2.10)$$

$$\epsilon_i z_i = \underline{A}_{io} \gamma_i^s + \underline{A}_{ii} z_i + \underline{B}_{ii} m_i \quad (2.11)$$

$$0 = \underline{A}_{jo} \gamma_i^s + \underline{A}_{ij} z_j + \underline{B}_{jj} m_j \quad (2.12)$$

$$j \neq i, i = 1, \dots, S$$

Si las  $\underline{A}_{jj}$  son no singulares, la sustitución de:

$$z_j = \underline{A}_{jj}^{-1} (\underline{A}_{jo} \gamma_i^s + \underline{B}_{jj} m_j), \quad j \neq i \quad (2.13)$$

$$j = 1, \dots, S$$

en (2.10), (2.11) y (2.12) da el  $i$ -ésimo modelo simplificado:

$$\dot{\gamma}_i = \underline{A}_{io} \gamma_i^s + \underline{A}_{oi} z_i + \underline{B}_{oi} m_i + \sum_{j \neq i} \underline{B}_{ij} m_j \quad (2.14)$$

$$\epsilon_j z_i = \underline{A}_{io} \gamma_i^s + \underline{A}_{ii} z_i + \underline{B}_{ii} m_i \quad (2.15)$$

En tiempo discreto el modelo de cada subsistema será:

$$\underline{A}_s^i(q) \gamma^i(k) = q^{\tau_i} \{ \underline{B}_s^i(q) m^i(k) + \underline{C}_s^i(q) z^i(k) + \sum_{j \neq i} \underline{D}_s^j(q) m^j(k) \} + \underline{v}_s^i(k) \quad (2.16)$$

$$\underline{A}_f^i(q) z^i(k) = q^{\tau_i} \{ \underline{D}_f^i(q) \gamma^i(k) + \underline{B}_f^i(q) m^i(k) \} + \underline{v}_f^i(k) \quad (2.17)$$

Esquema simplificado de optimización

La presencia de escalas de tiempo permite suponer a los efectos de la optimización en-línea que la parte rápida de cada subsistema se encuentra en estado estacionario, con lo cual (2.17) queda:

$$\underset{\approx}{A}_f^i \underset{\approx}{z}^i = \underset{\approx}{D}_f^i \underset{\approx}{x}^i + \underset{\approx}{B}_f^i \underset{\approx}{m}^i \quad (2.18)$$

Nótese que la relación (2.18) permite eliminar las variables rápidas del "núcleo lento" (visto desde un subsistema cualquiera), y escribirlo simplemente en la forma de:

$$\underset{\approx}{x}^i(k+1) = \underset{\approx}{f}_i[\underset{\approx}{x}^i(k), \underset{\approx}{m}^i(k)], \underset{\approx}{x}^i(0) = \underset{\approx}{x}_{i0} \quad (2.19)$$

$$i = 1, \dots, S$$

En lo que sigue supondremos que cada subsistema tiene una función objetivo  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , tales que dos cualesquiera  $\phi_i$  y  $\phi_j$  ( $i \neq j$ ) no son competitivas. Si así ocurriera el problema de optimización en-línea, será uno con múltiples objetivos [18].

Desde el punto de vista de todo el sistema, el problema de optimización en-línea consiste en la minimización del funcional:

$$J = \sum_{k=0}^{K-1} \phi[\underset{\approx}{x}(k), \underset{\approx}{u}(k)] \quad (2.20)$$

Sujeto a las restricciones:

$$\underset{\approx}{x}(k+1) = \underset{\approx}{f}[\underset{\approx}{x}(k), \underset{\approx}{u}(k)] \quad (2.21)$$

$$\underset{\approx}{x}(0) = \underset{\approx}{x}_0$$

y utilizando el esquema de "modelos múltiples" dado por las ecuaciones (2.19), el problema puede ser reescrito como:

$$\text{Min } J_D = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{i=1}^S \phi_i(\underset{\approx}{x}^i(k), \underset{\approx}{u}^i(k)) \quad (2.22)$$

sujeto a:

$$\underset{\approx}{y}^i(k+1) = \underset{\approx}{f}_i[\underset{\approx}{x}^i(k), \underset{\approx}{u}^i(k)] \quad (2.23)$$

$$\underset{\approx}{y}^i(0) = \underset{\approx}{y}_{i0}$$

$$k = 0, \dots, K-1; \quad i = 1, \dots, S$$

Llamando:

$$H_i = \phi_i[\underset{\approx}{y}^i(k), \underset{\approx}{u}^i(k)] + \lambda_i^T(k+1) \underset{\approx}{f}_i[\underset{\approx}{y}^i(k), \underset{\approx}{u}^i(k)] \quad (2.24)$$

La solución óptima del problema dada por (2.22) - (2.23) debe satisfacer las siguientes condiciones necesarias [18]:

$$\underset{\approx}{y}^i(k+1) = \frac{\partial H_i}{\partial \underset{\approx}{y}_i(k+1)} = \underset{\approx}{f}_i[\underset{\approx}{y}^i(k), \underset{\approx}{u}^i(k)] \quad (2.25.a)$$

$$\underset{\approx}{y}^i(0) = \underset{\approx}{y}_{i0}$$

$$\tilde{\lambda}_i(k) = \frac{\partial H_i}{\partial y^i(k)} = \frac{\partial \phi_i}{\partial y^i(k)} + \frac{\partial f_i^T}{\partial y^i(k)} \cdot \tilde{\lambda}_i(k+1) \quad (2.25.b)$$

$$\tilde{\lambda}_i(K) = 0$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial u^i(k)} + \frac{\partial f_i^T}{\partial u^i(k)} \cdot \tilde{\lambda}_i(k+1) = 0 \quad (2.25.c)$$

La forma lineal propuesta para las  $f_i$  simplifican notablemente la integración de las ecuaciones (2.25) [18], no obstante existen eficientes métodos iterativos para la solución del problema [19].

### 3. Escalas de tiempo en modelos dinámicos

El intento por desarrollar métodos de Control aproximado ha crecido notablemente en los últimos años debido principalmente a la necesidad de simplificar los problemas matemáticos que describen el control y la optimización en-línea de sistemas de gran tamaño. Muchas de ellas se basan en técnicas de agregación de variables [20], otras en cambio se basan en las múltiples escalas de tiempo existentes en un macro sistema dinámico. Estas múltiples escalas de tiempo son fácilmente obtenibles cuando se introduce el parámetro de perturbación singular  $\epsilon$ , que permite reescribir el modelo de tiempo discreto:

$$\underline{X}(k+1) = \underline{A} \underline{X}(k) \quad (3.1)$$

en una forma perturbada del tipo, [21]:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ Z(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \epsilon A_2 \\ A_3 & \epsilon A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ Z(k) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

u otras equivalentes, [22].

Las condiciones bajo las cuales un modelo lineal en tiempo discreto posee escalas de tiempo puede obtenerse del siguiente análisis; sea el sistema completamente controlable, lineal y en tiempo discreto:

$$\begin{bmatrix} \underline{x}(k+1) \\ Z(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ Z(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\approx 1} \\ B_{\approx 2} \end{bmatrix} U(k) \quad (3.3)$$

donde  $\underline{x}(k) \in R^{N_S}$ ,  $Z(k) \in R^{N_f}$ ,  $U(k) \in R^M$

Si el sistema dado por (3.3) posee múltiples escalas de tiempo deberá existir una base tal que:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ Z(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\approx S} & 0 \\ 0 & A_{\approx f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ Z(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\approx S} \\ B_{\approx f} \end{bmatrix} U_k \quad (3.4)$$

de tal suerte que si:

$$\lambda_f \stackrel{\Delta}{=} \max_j | \lambda_j(A_{\approx f}) | \quad (3.5.a)$$

$$\lambda_s \triangleq \min | \lambda(A_s) | \quad (3.5.b)$$

entonces:  $\lambda_f \ll \lambda_s$ . En suma, la existencia de múltiples escalas de tiempos implica una considerable diferencia entre las magnitudes de los autovectores de  $A_f$  y  $A_s$ . Más recientemente ha sido demostrado que para el sistema (3.3f), [22], la existencia de escalas de tiempo implica que:

$$d > [c (d^2 + 8 ab)] \quad (3.6)$$

donde:

$$a = \| \tilde{A}_{22} - \tilde{A}_{21} A_{11}^{-1} \tilde{A}_{12} \| \quad (3.7.a)$$

$$b = \| \tilde{A}_{21} \tilde{A}_{11}^{-1} \| \cdot \| \tilde{A}_{12} \| \quad (3.7.b)$$

$$c = \| \tilde{A}_{11}^{-1} \| \quad (3.7.c)$$

$$d = a + b$$

el parámetro de perturbación puede elegirse como:

$$\epsilon = \frac{\| \tilde{A}_{22} \|}{\| \tilde{A}_{11} \|} \quad (3.8)$$

#### 4. Identificación de sistemas con escalas de tiempo

##### 4.1. Introducción

Como se hace notar en [9], para que un método de identificación pueda ser eficientemente aplicado en optimización en-línea debe cumplir requerimientos básicos, tales como:

- \* proporcionar estimaciones no-sesgadas
- \* presentar una forma recursiva
- \* Aptitudes para tratar con medidas sujetas a "ruidos"

La estimación de parámetros de un modelo dinámico usando el esquema de cuadrados mínimos (LS) es uno de los esquemas más apropiados, su forma recursiva es atractiva para su implementación en-línea, no obstante en subsistemas que presentan escalas de tiempo la correlación del "ruido" entre las variables lentas y rápidas provocará que el método LS proporcione estimaciones "sesgadas". Entre las otras técnicas de identificación disponibles, el método de la Variables Instrumental (IV) será estudiado para su aplicación en la identificación del tipo especial de sistema que estamos estudiando.

- Método de IV para sistemas SISO:

Sea el modelo de tiempo discreto modelado a partir de  $N+p$  medidas:

$$A(q) y(k) = B(q) m(k) + v(k) \quad (4.1)$$

Definimos:

$$\tilde{y}_N(k) = (y(k), y(k+1), \dots, y(N+k-1))^T \quad (4.2.a)$$

$$Y_N(k) = (v(k), v(k+1), \dots, v(N+k-1))^T \quad (4.2.b)$$

$$M_N(k) = (m(k), m(k+1), \dots, m(N+k-1))^T \quad (4.2.c)$$

$$\Phi_N(y, m) = (Y_N(0), Y_N(-1), \dots, Y_N(1-p), M_N(0), \dots, M_N(1-p)) \quad (4.2.d)$$

$$\theta = (a_1, \dots, a_p, \dots, b_p)^T \quad (4.2.e)$$

Con esta notación (4.1) es equivalente a:

$$Y_N(1) = \Phi(y, m) \theta + V_N(1) \quad (4.3)$$

premultiplicando (4.3) por  $Z_N$ , una matriz ( $N \times 2p$ ) a definir y despejando  $\theta$

$$\theta = \hat{\theta}_N - [Z_N^T \Phi_N(y, m)]^{-1} Z_N^T V_N(1) \quad (4.4)$$

donde  $\hat{\theta}_N$  es la estimación de  $\theta$ :

$$\hat{\theta}_N = [Z_N^T \Phi_N(y, m)]^{-1} Z_N^T Y_N(1) \quad (4.5)$$

$\hat{\theta}_N$  es un estimador consistente de  $\theta$  [23], si la matriz de "variables instrumentales"  $Z_N$  se selecciona de forma tal que los siguientes límites se verifican:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T V_N(1) = 0 \quad (4.6.a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^T \Phi_N(y, m) = R \text{ (no singular)} \quad (4.6.b)$$

Es interesante notar que para  $Z_N = \Phi_N(y, m)$  el método de la variable instrumental es igual al método de cuadrados mínimos. Puesto que  $y(k)$  y  $v(k)$  están correlacionados:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \Phi_N^T(y, m) V_N(1) \neq 0 \quad (4.7)$$

por tanto el método LS da estimadores sesgados.

Muchas alternativas existen para la elección de la matriz de variable instrumental IV, una de ellas consiste en el método "bootstrap" [23], [24]:

$$Z_N = \Phi_N(\hat{y}, m) \quad (4.8)$$

donde:

$$\hat{y}(k) = \hat{a}_1 \hat{y}(k-1) + \dots + \hat{a}_p \hat{y}(k-p) + \hat{b}_1 m(k-1) + \dots + \hat{b}_p m(k-p) \quad (4.9)$$

El método propone usar en vez de las salidas verdaderas, las salidas predichas por el modelo para construir  $Z_N$ , donde los coeficientes contenidos en A y B son continuamente actualizados como resultado de la identificación.

#### 4.2. Identificación de sistemas con escalas de tiempo

supongamos que se tiene un sistema con una variable rápida  $x_1$  y una lenta  $x_2$ , y si además el modelo de la planta es libre de ruidos, el sistema lineal que describe el estado de la planta es:

$$\left. \begin{aligned} x_1(k+1) &= a_{11} x_1(k) + a_{12} x_2(k) + b_1 m_1(k) \\ x_2(k+1) &= a_{21} x_1(k) + a_{22} x_2(k) + b_2 m_2(k) \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

con medidas:

$$\left. \begin{aligned} y_1(k) &= x_1(k) + e_1(k) \\ y_2(k) &= x_2(k) + e_2(k) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

donde  $e_1$  y  $e_2(k)$ , son secuencias de errores de medida gaussianos, mutuamente independientes,

o sea :

$$E[e_1(k) e_2(k-t)] = 0, \quad \forall t \quad (4.12)$$

$$E[e_i(k) e_i(k-t)] = \Sigma_t \delta(t), \quad i = 1, 2$$

En estas condiciones el sistema conteniendo escalas de tiempo puede representarse como se muestra en la fig. 4.

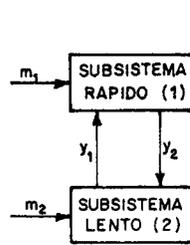


FIG. 4

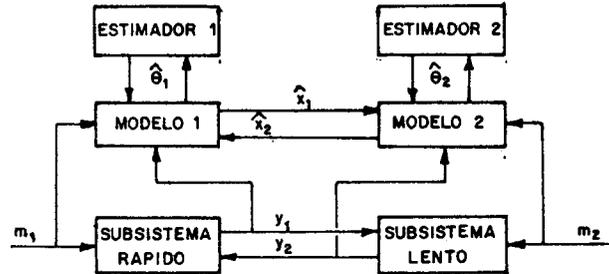


FIG. 5

Subsistema lento:

$$\left. \begin{aligned} y_1(k+1) &= a_{11} y_1(k) + b_1 m_1(k) + a_{12} U_1(k) + v_1(k+1) \\ \text{Subsistema rápido:} \\ y_2(k+1) &= a_{22} y_2(k) + b_2 m_2(k) + a_{21} U_2(k) + v_2(k+1) \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

donde  $U_1(k) = y_2(k)$ ;  $U_2(k) = y_1(k)$  representan las variables de interconexión entre los subsistemas rápidos y lentos. Los ruidos  $v_1(k+1)$  y  $v_2(k+1)$  siguen la dinámica:

$$\left. \begin{aligned} v_1(k+1) &= e_1(k+1) - a_{11} e_1(k) - a_{12} e_2(k) \\ v_2(k+1) &= e_2(k+1) - a_{21} e_1(k) - a_{22} e_2(k) \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Asumiendo que el método de estimación "bootstrap" es aplicado a la identificación del subsistema rápido, examinemos el límite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^{1T} V_N^1(1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} N \\ \sum_{k=1}^N \hat{x}_1(k-1) v_1(k) \\ N \\ \sum_{k=1}^N m_1(k-1) v_1(k) \\ N \\ \sum_{k=1}^N U_1(k-1) v_1(k) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

donde:

$$\hat{x}_1(k+1) = \hat{a}_{11} x_1(k) + \hat{b}_1 m_1(k) + \hat{a}_{12} U_1(k)$$

y:

$$U_1(k) = a_{22} U_1(k-1) + b_2 m_2(k-1) + a_{21} y_1(k-1) + v_2(k)$$

Es importante observar en (4.15) que: puesto que  $x_1(k-1)$  no está correlacionado con  $v_1(k)$  la primera suma es nula; ya que  $m_1$  es libre de ruido el segundo elemento es también asintóticamente nulo; finalmente el último elemento es proporcional al coeficiente de interacción  $a_{12}$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} Z_N^{1T} V_N^1(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{12} \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

donde se advierte que el "sesgo" de la estimación es proporcional a la interacción entre la dinámica rápida y lenta. No obstante, cuando la separación de escalas de tiempo es muy grande el "desacople" entre las variables es "casi" total y  $a_{12} \rightarrow 0$  (véase las condiciones de existencia de escalas de tiempo); en estas condiciones la relación para estimación no sesgada se verá satisfecha. Más aún, si  $a_{12}$  tuviese un valor tal que el "acople" perjudicara la estimación, un esquema alternativo para la IV puede ser utilizado. Nótese que si usamos  $\hat{x}_2$  en vez  $U_1$  en la matriz, la consistencia buscada es alcanzada, pero  $\hat{x}_2$  es la variable generada por el algoritmo de identificación del subsistema lento. En suma, en sistemas con múltiples escalas de tiempo el sesgo de la estimación puede eliminarse suministrando al estimador de cada subsistema con la IV del otro subsistema. La fig. 5 muestra la estructura de identificación coordinada apropiada en este caso.

#### 4.3. Divergencia de algoritmo recursivo:

Para un modelo SISO la forma recursiva del algoritmo de la variable instrumental, [25], es:

$$\hat{\theta}_{N+1} = \hat{\theta}_N + K_{N+1} (y(N+1) - \phi_{N+1}^T \hat{\theta}_N) \quad (4.17.a)$$

$$K_{N+1} = P_{N+1} Z_{N+1} \quad (4.17.b)$$

$$P_{N+1} = [P_N - P_N Z_{N+1}^T (\lambda + \phi_{N+1}^T P_N Z_{N+1})^{-1} \phi_{N+1} P_N] / \lambda \quad (4.17.c)$$

$$P_N = (Z_N^T \phi_N)^{-1} \quad (4.17.d)$$

donde  $Z_{N+1}$  y  $\phi_{N+1}$  son los vectores conteniendo las últimas muestras y

$0 < \lambda \leq 1$  es el "factor de olvido" que se incluye para hacer eficiente la estimación en parámetros que varían con el tiempo. Si la matriz de información  $Z_N^T \hat{\phi}_N$  es singular, la estimación  $\hat{\phi}_N$  divergirá. Vamos a analizar cuando esto puede ocurrir en un sistema con escalas de tiempo.

Sea el sistema con dos escalas de tiempo del tipo 2-inputs-2out-puts:

$$y_1(k) = \sum_{i=1}^p a_1^i y_1(k-i) + \sum_{i=1}^p b_1^i n_1(k-i) + \sum_{i=1}^p c_1^i y_2(k-i) \quad (4.18.a)$$

$$y_2(k) = \sum_{i=1}^p a_2^i y_2(k-i) + \sum_{i=1}^p b_2^i n_2(k-i) + \sum_{i=1}^p c_2^i y_1(k-i) \quad (4.18.b)$$

donde  $y_1$  corresponde a la salida de una variable rápida e  $y_2$  a una lenta. De acuerdo a Soderstrom [26] la siguiente relación debe verificarse para un estimador bootstrap libre de ruidos:

$$\hat{Z}_N^T \hat{\phi}_N = \hat{D} \hat{M} \hat{D}^T \quad (4.19)$$

donde  $\hat{M}$  es una matriz cuadrada de entradas "en retraso" la cual es positiva definida si las secuencias  $m_i(k), i = 1, 2$ , son persistentemente excitantes;  $\hat{D}$  es una matriz de los parámetros verdaderos del sistema y  $\hat{D}$  es una matriz con igual estructura que  $\hat{D}$  pero con los parámetros del modelo. Puede demostrarse que la condición de definida positiva para  $\hat{M}$  y de rango completo para  $\hat{D}$  y  $\hat{D}$  son suficientes para asegurar la no-singularidad de la matriz de información. La excitación persistente del sistema puede asegurarse con una adecuada política de cambios de Set-points [18], por tanto analicemos las condiciones bajo las cuales  $\hat{D}$  o  $\hat{D}$  tienen rango completo. La matriz  $\hat{D}$  presenta para el caso sencillo "bajo estudio:

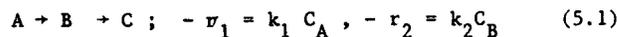
$$\hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^p & 0 \\ 0 & 0 & b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_1^1 & b_1^2 & \dots & b_1^p \\ \hline 0 & b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^p & 0 \\ 0 & 0 & b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & b_2^1 & b_2^2 & \dots & b_2^p \\ \hline & & & & & & Q \\ \hline & & & & & & R \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Donde  $Q$  y  $R$  son matrices de coeficientes de rango completo de los  $a_i^j$  y  $c_i^j$ . Es fácil advertir de (4.20) que cuando la variable rápida  $y_1$  alcanza el estado estacionario  $b_1^1, b_1^2, \dots, b_1^p$  serán cero y  $\hat{D}$  disminuirá su rango.

### 5. Ejemplo

Consideremos un reactor químico continuamente agitado donde tie-

nen lugar las reacciones de primer orden:



Las constantes físicas y de diseño a la temperatura del reactor para el sistema son:

$$k_1(t) = 1. \text{ min}^{-1} e^{-\frac{t}{150} [\text{min}]} [\text{min}^{-1}] \quad (5.2.a)$$

$$k_2(t) = 100 \text{ min}^{-1} e^{-\frac{t}{350} [\text{min}]} [\text{min}^{-1}] \quad (5.2.b)$$

$$\text{tiempo de residencia medio} = 30 \text{ min} \quad (5.2.c)$$

El objetivo de la optimización en-línea consiste en maximizar el objetivo:

$$\Phi = C_B - \frac{C_A^2}{2} - \frac{C_B^2}{2} \quad (5.3)$$

Usando como variables controladas  $C_{B,f}$  y  $C_{A,f}$  en la corriente de alimentación. La más importante perturbación a la operación que origina la evolución del óptimo, está presente en los factores exponenciales de decaimiento dados en (5.2.a.) y (5.2.b). En este problema la variable lenta es  $C_A$  y la rápida  $C_B$ . La forma de modelo propuesta para el subsistema lento y rápido son:

Subsistema lento:

$$x_1(k+1) = a_{11} x_1(k) + a_{12} U_1(k) + b_1 m_1(k) + d_1 \quad (5.4)$$

Subsistema rápido:

$$x_2(k+1) = a_{22} x_2(k) + a_{21} U_2(k) + b_2 m_2(k) + d_2 \quad (5.5)$$

donde:

$$x_1 = U_2 = C_A ; x_2 = U_1 = C_B ; C_{A,0} = 1 \text{ gr.mol}$$

$$m_1 = C_{A,f} ; m_2 = C_{B,f} ; C_{B,0} = C_{C,0} = 0$$

Los parámetros  $d_1$  y  $d_2$  se incluyen para tener en cuenta la condición de estado estacionario distinto de cero. En la fig. 6 se muestra la evolución de los cambios de set-points en el plano  $C_{B,f}$  y  $C_{A,f}$  para la simulación de 500 min del sistema real. En la Fig. 7 se muestra la evolución de la función objetivo.

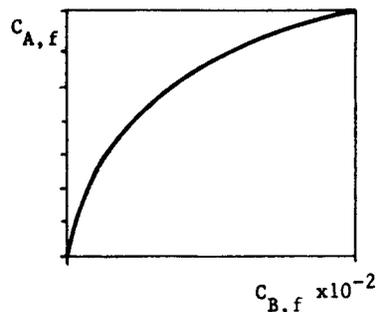


Fig. 6

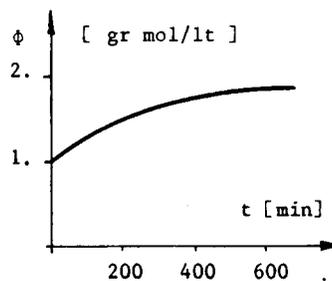


Fig. 7

BIBLIOGRAFIA

- [1] Cutler C. R., and Perry, R. T., "Real time optimization with multivariable control is required to Maximize profits", *Comp. & Chem. Eng.*, Vol 7, N° 5, 1983, pags. 663-667.
- [2] Cutler C. R., and Remaker B. L., "Dynamic matrix control - a computer Control algorithm", 86th congreso Nacional del Aiche, trabajo N° 51b, 1979.
- [3] Prett D.M., and Gillette R.D., "Optimization and Constrained multivariable control of a Catalytic cracking unit", 86th Congreso Nacional del Aiche, trabajo N° 51.C, 1979.
- [4] Martínez, E., Informe primer año beca Iniciación. CONICET, Febrero 1985.
- [5] Box G. E. P. and J. Chanmugam, "Adaptive optimization of continuous processes", *I.E. C. Fund.*, Vol 1, N°2, 1962.
- [6] Edler, J. P., Nikiforuk P. N., Tinker E.B., "A comparison of the performance of techniques for direct, on-line optimization", *The Can. J. of Chem. Eng.*, Vol 48, 1970, pag. 470.
- [7] Davis, T.A., Griffin D. E., and Webb P. U., "Cat cracker optimization and control", *Chem, Eng. Prog.* Vol. 70, N° 11, 1974, pag.53.
- [8] Isermann, R., Baur U., Bamberger W., Kneppo P., Siebert H., "Comparison of six on-line identification and parameter estimation methods", *Automática*, Vol 10, 1974, pág. 81.
- [9] García C.E., and Morari M., "Optimal operation of integrated processing Systems, Part I: Open-loop on-line optimizing control", *Aiche J*, Vol 27, N° 6, 1981, pág. 960-968.
- [10] García, C. E., "Studies in optimizing and regulatory control of chemical processing systems", Ph. D Thesis, University of Wisconsin - Madison, 1982.
- [11] Anderson L., "Decoupling of two -Time scale linear systems", *Proceedings of JACC*, 1978, pág. 153-163.
- [12] Martínez, E., "Closed-loop on-line optimizing control in processing systems with multiple time scale", (en preparación), 1985.
- [13] Findeisen W, Bailey F.N., Brdys M., Malinowski K., Tatjewski P., Woźniak, A., "Control and Coordination in Hierarchical Systems", J. Wiley, 1980.
- [14] Wilson I. D., "Foundations of hierarchical control", *Int. J. of control*, Vol 29, pág. 899-933, 1979.
- [15] Papageorgiou M., "Multilayer control system design applied to Free way traffic", *IEEE trans. on aut. control*, Vol AC-29, N° 6, 1984, 482-490.
- [16] Aoki, M., "Aggregation", in "optimization methods for large-scale system-with applications", D. A., Wismer, ed. N.Y, Mc-Graw Hill,

1971, pág. 191-232.

- [17] Jamshidi M., "Large scale systems: modelling and Control", J. Wiley, 1983.
- [18] Martínez, E, Tesis doctoral (en preparación), 1985
- [19] Sage A. P. and White C.C., "Optimum system Control", Prentice Hall
- [20] Restorick, S. J., "Multilayer decompositions for dynamic control problems", Int. J. of Control, Vol 40, N° 6, 1984, pág. 1149-1169.
- [21] Phillips, R. G., "Reduced order modelling and Control of two-time scale discrete systems", Int J. Control, Vol 31, 1980, pág. 765.
- [22] Syrcos G. P., and Sannutti P., "Singular perturbation modelling of continuous and discrete physical System", Int. J. of Control, Vol 37, N° 5, 1983, pág. 1007-1023.
- [23] Rowe, I. H., "A bootstrap method for the statistical estimation of model parameters", Int. J. of Control, Vol 12, 1970, pág. 721.
- [24] Wong K. Y., Polak E., "Identification of linear discrete time systems using the instrumental variable method, IEEE, trans. on Aut. Cont., AC-12, 1967, 707.
- [25] Goodwin, G. C., and Payne R. L. , "Dynamic System identification experiment design and Data analysis", Academic Press, N.Y, (1977)
- [26] Söderström, T., "Convergence of identification method Based on the instrumental variable approach", Automática, Vol 10, 1974, pág. 685