

PREDICCIÓN DE LA EFICIENCIA TÉRMICA DE UN YACIMIENTO GEOTÉRMICO
MEDIANTE EL MÉTODO DE DIFERENCIACIÓN PARAMÉTRICA

Marta B. Peirotti

Julio A. Deiber

Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria
Química (INTEC)

UNL-CONICET

Guemes 3450 - 3000 Santa Fe

RESUMEN

Se presenta la evaluación de la eficiencia térmica de un yacimiento geotérmico de agua caliente (sobresaturado) mediante un modelo bidimensional, que contempla la transferencia de calor por convección forzada y natural debido a la inyección y extracción de fluido y a la variación de densidad con los gradientes térmicos.

El modelo involucra el acoplamiento de los perfiles de velocidad y térmico y es resuelto mediante el método de diferenciación paramétrica.

ABSTRACT

The evaluation of the thermal efficiency of a hot water geothermal reservoir is presented through a two dimensional model which considers heat transfer by means of forced and natural convection due to injection and extraction of fluid and to the density variation with thermal gradients.

The model involves coupled thermal and velocity profiles and it is solved through the method of parametric differentiation.

INTRODUCCION

La energía geotérmica es considerada actualmente como una de las alternativas más importantes para absorber la creciente demanda de energía en el mundo, contribuyendo principalmente a sustituir al gas y petróleo, para ser aprovechados con mayor beneficio final en las industrias petroquímicas.

Los yacimientos geotérmicos se pueden clasificar como vapor dominante y líquido dominante. El primero produce vapor seco o sobrecalentado mientras que el segundo entrega agua caliente o una mezcla de agua y vapor. Dependiendo del valor entálpico, los fluidos geotérmicos se pueden usar para la generación de energía o para operaciones de intercambio calórico en la industria.

Una vez que la etapa de exploración geotérmica ha terminado, se requiere el modelado del yacimiento para estimar su dinámica bajo condiciones de explotación y determinar la factibilidad económica, de su uso como fuente de energía. Entre los parámetros más importantes a evaluar se pueden mencionar: eficiencia térmica, velocidad óptima de extracción, duración o vida útil del yacimiento, etc., estos parámetros son a su vez función de las siguientes propiedades del yacimiento y su contenido: presión, temperatura, profundidad, espesor, permeabilidad, porosidad, conductividad térmica, densidad, viscosidad, compresibilidad, etc. Por consiguiente, modelar la respuesta de un yacimiento geotérmico implica contemplar todas las propiedades de la roca porosa y del fluido en la evaluación de los campos de temperatura y velocidad, para comprender así sus efectos en los mecanismos termoconvectivos que gobiernan la producción del líquido térmico y generar también criterios óptimos de explotación (ver, por ejemplo, Kruger, 1976).

En este trabajo se estudia un sistema simple que modela como primera aproximación un yacimiento de agua caliente. En la frontera inferior del yacimiento en contacto con el magma, se supone que la temperatura es constante, además las fronteras lateral y superior del yacimiento son adiabáticas. En el mismo se contemplan una boca de inyección de fluido térmicamente degradado (más frío) y una boca de extracción. Para facilitar los cálculos y obtener una rápida interpretación de los resultados técnicos a costos computacionales relativamente bajos, el modelo sólo contempla dos direcciones.

Especial énfasis se pone en la metodología numérica usada. El método de diferenciación paramétrica es descrito en detalle con las razones prácticas que justifican su uso en modelos discretizados por diferencias finitas.

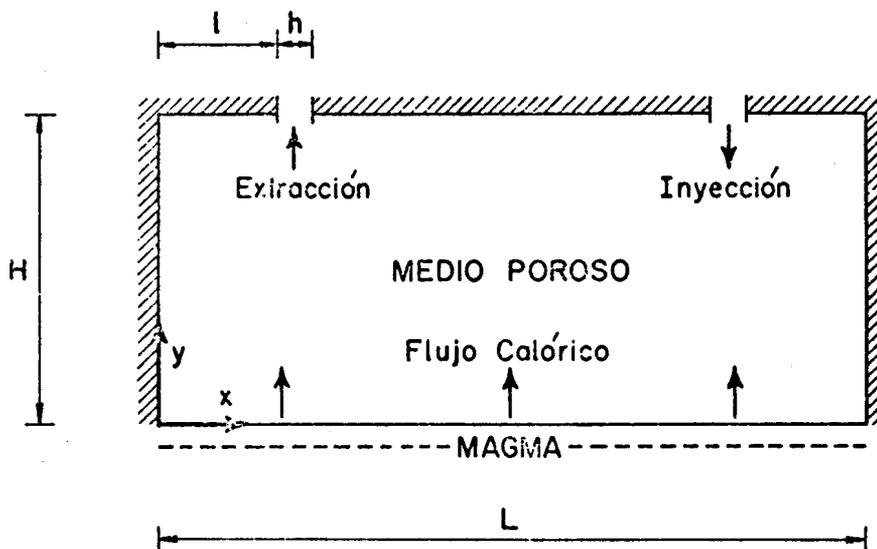
MODELO

La figura 1 muestra la geometría del modelo en forma dimensional.

Siguiendo el análisis de Ping Chen (1978) (ver también, Horne y Sullivan, 1974; Blake y Bejan, 1984) se aplican las siguientes ecuaciones de balance,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{v} = \frac{K}{\mu} (-\nabla p + \rho \mathbf{g}) \quad (2)$$



La ecuación (1) impone la conservación de materia mientras que la ecuación (2) es la Ley de Darcy con permeabilidad constante K y viscosidad del agua μ independiente de la temperatura T . En esta ecuación \vec{v} es el vector de velocidad cuyas componentes son u en la dirección \vec{x} y v en la dirección \vec{y} , \vec{g} es el vector gravitacional, p es la presión y ρ es la densidad del fluido que depende linealmente de la temperatura, es decir,

$$\rho = \rho_0 - \beta(T - T_0) \quad , \quad T \leq T_0 \quad (3)$$

siendo T_0 la temperatura en $y = 0$, donde el medio poroso recibe el flujo calórico desde el magma. Además β es el coeficiente de dilatación térmica del fluido.

Designando con α la difusividad térmica del material compuesto por la matriz porosa y el fluido, el balance de energía en el yacimiento se reduce a,

$$\vec{v} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T \quad (4)$$

Las ecuaciones (2) y (4) requieren las siguientes condiciones de contorno compatibles con los aspectos físicos mencionados arriba (figura 1):

$$x = 0 \quad , \quad \forall y \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad , \quad u = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad (5)$$

$$x = L \quad , \quad \forall y \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad , \quad u = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad (6)$$

$$\forall x \quad , \quad y = 0 \quad , \quad T = T_0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad (7)$$

$$0 < x < l \quad , \quad y = H \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad (8)$$

$$l < x < l+h \quad , \quad y = H \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad , \quad vh = Q \quad , \quad \psi = \frac{Q}{h} (l-x) \quad (9)$$

$$l+h < x < L-l-h \quad , \quad y = H \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad \psi = -Q \quad (10)$$

$$L-l-h < x < L-l \quad , \quad y = H \quad , \quad T = T_e \quad , \quad vh = -Q \quad , \quad \psi = -Q + Q[x+l+h-L]/h \quad (11)$$

$$L-l < x < L \quad , \quad y = H \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad (12)$$

En estas ecuaciones se usa la función línea de corriente ψ para satisfacer sistemáticamente la ecuación (1), es decir,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (13)$$

También es conveniente remarcar que el fluido se extrae adiabáticamente (ecuación (9)) y se inyecta a una temperatura inferior $T_e < T_o$ (ecuación (11)). Q es el caudal de inyección o extracción por unidad de la longitud perpendicular al plano $x-y$.

Se definen los siguientes números adimensionales,

$$\theta = \frac{T - T_e}{T_o - T_e} \quad , \quad \Psi = \psi/\alpha$$

$$X = x/L \quad , \quad Y = y/H$$

$$\hat{Q} = Q/\alpha \quad , \quad \Lambda = H/L$$

$$f_1 = l/L \quad , \quad f_2 = h/L$$

$$R_a = \beta(T_o - T_e) g K H / (\nu \alpha) \quad (14)$$

siendo R_a el número de Rayleigh donde $\nu = \mu/\rho_o$ es la viscosidad cinemática y g la componente del vector gravitacional.

Aplicando luego el operador rotor ∇_x en la ecuación (2) para eliminar la presión, se obtiene mediante álgebra simple el siguiente modelo adimensional,

$$\psi_{YY} + \Lambda^2 \psi_{XX} = -R_a \Lambda \theta_X \quad (15)$$

$$\Lambda(\psi_Y \theta_X - \psi_X \theta_Y) = \theta_{YY} + \Lambda^2 \theta_{XX} \quad (16)$$

con las correspondientes condiciones de contorno,

$$0 < X < f_1 \quad , \quad Y = 1 \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad (17)$$

$$f_1 < X < f_1 + f_2, \quad Y = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \quad \Psi = \hat{Q}(f_1 - X)/f_2 \quad (18)$$

$$f_1 + f_2 < X < 1 = f_1 - f_2, \quad Y = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \quad \Psi = -\hat{Q} \quad (19)$$

$$1 - f_1 - f_2 < X < 1 - f_1, \quad Y = 1, \quad \theta = 0, \quad \Psi = -\hat{Q} + \hat{Q}[X + f_1 + f_1 - 1]/f_2 \quad (20)$$

$$1 - f_1 < X < 1, \quad Y = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \quad \Psi = 0 \quad (21)$$

$$X = 0, \quad \forall Y, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \quad \Psi = 0 \quad (22)$$

$$X = 1, \quad \forall Y, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \quad \Psi = 0 \quad (23)$$

$$\forall X = 0, \quad Y = 0, \quad \theta = 1, \quad \Psi = 1 \quad (24)$$

Una vez resuelto el modelo adimensional para los diferentes valores asignados a R_a , \hat{Q} , Λ , f_1 y f_2 , es decir, cuando los campos θ y Ψ se encuentran disponibles, la eficiencia E del yacimiento geotérmico se puede calcular a través de la siguiente relación,

$$E = \frac{\text{Entalpía del agua a la salida}}{\text{Entalpía máxima posible del agua a la salida}} = \frac{T_s - T_e}{T_o - T_e} = \theta_s \quad (25)$$

donde T es la temperatura del fluido en la boca de extracción. Para el cálculo de las entalpías se usa T_e como temperatura de referencia. Se concluye entonces que la eficiencia térmica es igual a la temperatura adimensional de salida θ_s .

Además la consistencia del balance térmico implica que el calor ingresado por conducción y convección desde el magma, es igual al calor extraído por convección forzada en la boca de extracción, más el calor perdido por conducción en la boca de inyección, menos el calor ingresado por convección en esta misma boca. Es decir, mediante el cálculo de los flujos calóricos mencionados, se obtiene

$$\eta = -\hat{Q} \Lambda \left\{ \theta_s - \int_{1-f_1-f_2}^{1-f_1} \theta_Y \, dX \right\} / \left\{ \int_0^1 \theta_Y \, dX \right\} \quad (26)$$

Es evidente que la consistencia del balance térmico implica $\eta = 1$. Por consiguiente, la ecuación (26) es muy útil no sólo para comprobar la validez de los resultados numéricos sino también para verificar en forma indirecta primero la convergencia del modelo discreto al modelo continuo y segundo la consistencia de los resultados con el modelo discreto. En efecto, si $\eta = 1$ numéricamente, los resultados numéricos son tan buenos como los resultados de la solución analítica. Probado esto, cuando $\eta \rightarrow 1$ la evaluación numérica es consistente con el modelo discreto (ver Noye, 1978 para las definiciones de convergencia y consistencia).

RESOLUCION NUMERICA POR DIFERENCIACION PARAMETRICA

El método de diferenciación paramétrica tiene implícita la condición de existencia, unicidad y consistencia del modelo continuo arriba formulado, es decir, las soluciones $\Psi(X,Y,\Lambda)$ y $\theta(X,Y,\Lambda)$ son como consecuencia funciones continuas en el parámetro Λ , lo cual permite a su vez definir dos funciones F y G en el dominio X - Y , de acuerdo a,

$$F = \frac{\partial \Psi}{\partial \Lambda} \quad (27)$$

$$G = \frac{\partial \theta}{\partial \Lambda} \quad (28)$$

Derivando luego con respecto a Λ el modelo continuo representado por las ecuaciones (16) a (24) se obtiene,

$$F_{YY} + \Lambda^2 F_{XX} = -R_a \Lambda G_X - R_a \theta_X - 2\Lambda \Psi_{XX} \quad (29)$$

$$\Lambda(\Psi_Y G_X - \Psi_X G_Y + F_Y \theta_X - F_X \theta_Y) + (\Psi_Y \theta_X - \Psi_X \theta_Y) = G_{YY} + \Lambda^2 G_{XX} + 2\Lambda \theta_{XX} \quad (30)$$

con las siguientes condiciones de contorno,

$$0 < X < 1-f_1-f_2, \quad Y = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial Y} = 0, \quad F = 0 \quad (31)$$

$$1-f_1-f_2 < X < 1-f_1, \quad Y = 1, \quad G = 0, \quad F = 0 \quad (32)$$

$$1-f_1 < X < 1, \quad Y = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial Y} = 0, \quad F = 0 \quad (33)$$

$$X = 0, \quad \forall Y, \quad \frac{\partial G}{\partial Y} = 0, \quad F = 0 \quad (34)$$

$$X = 1, \quad \forall Y, \quad \frac{\partial G}{\partial Y} = 0, \quad F = 0 \quad (35)$$

$$\forall X, \quad Y = 0, \quad G = 0, \quad F = 0 \quad (36)$$

El modelo continuo derivado (ecuaciones (27) a (36)) tiene condiciones de contorno homogéneas. La etapa siguiente es resolver numéricamente el problema mediante diferencias finitas, arrancando con una solución para $\Lambda = 0$ (solución base) y luego, recalculando sucesivamente Ψ y θ mediante las ecuaciones (27) y (28) para incrementos sucesivos y pequeños del número adimensional Λ hasta llegar al valor deseado del mismo.

Solución Base

Las soluciones bases $\Psi^{(0)}$ y $\theta^{(0)}$ se obtienen haciendo $\Lambda = 0$ en las ecuaciones (15) a (24). Por consiguiente es simple probar que para,

$$0 < X < f_1 \quad \text{y} \quad 1-f_1 < X < 1, \quad ,$$

$$0 < Y < 1$$

se cumple,

$$\psi^{(0)} = 0 \quad , \quad \theta^{(0)} = 1 \quad (37)$$

para,

$$\begin{aligned} f_1 < X < f_1 + f_2 \quad , \\ 0 < Y < 1 \\ \psi^{(0)} = \hat{Q}(f_1 - X)Y/f_2 \quad , \quad \theta^{(0)} = 1 \end{aligned} \quad (38)$$

también,

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 < X < 1 - f_1 - f_2 \quad , \\ 0 < Y < 1 \\ \psi^{(0)} = -\hat{Q} \quad , \quad \theta^{(0)} = 1 \end{aligned} \quad (39)$$

así como,

$$\begin{aligned} 1 - f_1 - f_2 < X < 1 - f_1 \quad , \\ 0 < Y < 1 \\ \psi^{(0)} = -\hat{Q} Y + \hat{Q}(X + f_1 + f_2)Y/f_2 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\theta^{(0)} = 1 - Y \quad (41)$$

Además con la condición $\Lambda = 0$, desde las ecuaciones (29) a (38) se demuestra que $F^{(0)} = 0$ y $G^{(0)} = 0$ para $0 \leq X \leq 1$ y $0 \leq Y \leq 1$.

Soluciones Sucesivas

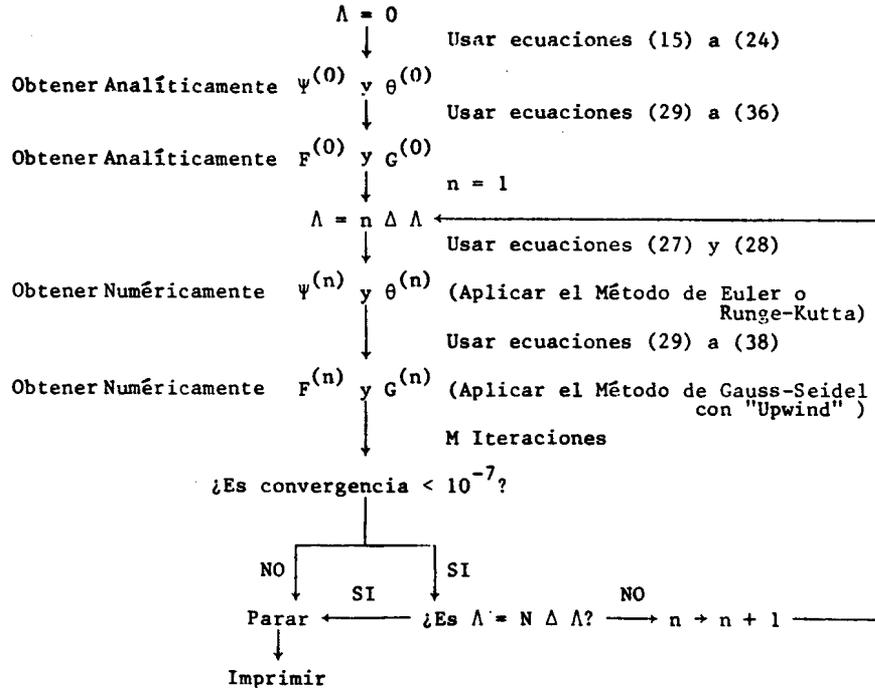
Partiendo de las soluciones bases $\psi^{(0)}$, $\theta^{(0)}$, $F^{(0)}$ y $G^{(0)}$, se incrementa el valor de Λ sucesivamente de acuerdo a,

$$\Lambda^{(n)} = n \Delta \Lambda \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (42)$$

siendo $\Lambda = N \Delta \Lambda$ el valor deseado al cual se necesita la solución del problema original. Así, para $n = 1$ se obtiene $\psi^{(1)}$ y $\theta^{(1)}$ con las ecuaciones (27) y (28) y luego $F^{(1)}$ y $G^{(1)}$ con las ecuaciones (29) a (36). Este proceso se repite hasta $n = N$ (ver esquema de cálculo).

En general si $\Delta \Lambda$ es suficientemente pequeño ($\Delta \Lambda \sim 10^{-3}$) con una o dos iteraciones por cada salto $\Delta \Lambda$ es suficiente, es decir, $M = 1$ ó 2 . Se debería observar que al elegir $\Delta \Lambda$ pequeño el método iterativo de Gauss-Seidel converge rápidamente debido a la buena inicialización disponible en cada salto, la cual es proporcionada por la diferenciación paramétrica. Además, para lograr convergencia se requiere que la matriz de coeficientes resultante en el problema iterativo sea diagonal dominante; por consiguiente se aconseja la discretización "Upwind" (Ver, Gupta, 1978).

A continuación se presenta el esquema de cálculo:



RESULTADOS

La Tabla I muestra las eficiencias del yacimiento con las correspondientes temperaturas del fluido extraído para diferentes valores del número de Rayleigh y del caudal adimensional. La Figura 1 (a,b) muestra campos representativos de la función línea de corriente y de la temperatura para ciertas condiciones de explotación del yacimiento geotérmico.

Se concluye que la eficiencia del yacimiento geotérmico no varía sustancialmente con el número de Rayleigh cuando el caudal de utilización del fluido térmico es pequeño, puesto que no se detecta variación alguna en los tres primeros dígitos de θ_s cuando $\hat{Q} = 0.2$ a diferentes valores de R_a . En efecto, el fluido s frío no sufre convección forzada a la entrada y es rápidamente calentado por convección natural, aún cuando el número de Rayleigh es relativamente bajo.

Al aumentar \hat{Q} la eficiencia del yacimiento decae significativamente debido a que el caudal convecta fluido frío, que no alcanzó a calentarse, hacia la puerta de salida.

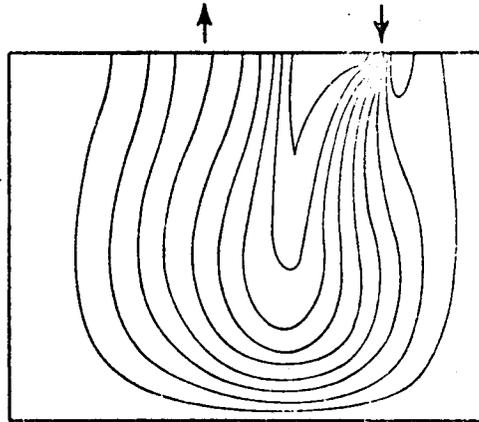
TABLA I

Eficiencias de un Yacimiento Geotérmico. $T_o = 200^{\circ}\text{C}$, $T_e = 25^{\circ}\text{C}$, $\Lambda = 0.25$, $f_1 = 1/6$, $f_2 = 0.1$.

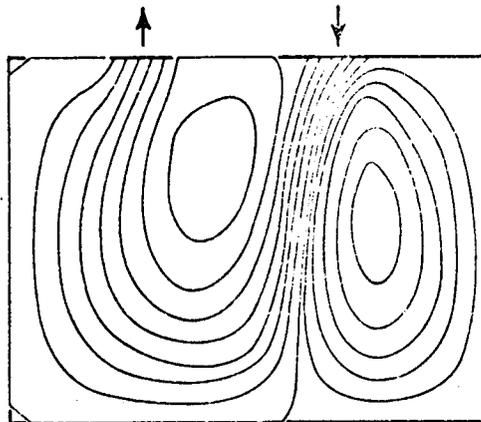
\hat{Q}	R_a	0	100	200	300	400	500	600	1000	2000	3000
0.2	T_s	184.25	194.75	194.75	194.75	194.75	194.75	194.75	194.75	194.75	194.75
	θ_s	0.91	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97
0.6	T_s	179	194.75	194.75	194.75	194.75	194.75	194.75	194.75	194.75	194.75
	θ_s	0.88	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97	0.97
1	T_s	174.80	193.52	193.70	193.70	193.87	193.87	193.87			
	θ_s	0.856	0.963	0.964	0.964	0.965	0.965	0.965			
6	T_s	112.5	161.67	179.35	181.80	182.67	183.03	183.20			
	θ_s	0.5	0.781	0.882	0.896	0.901	0.903	0.904			
10	T_s	85.55	114.42	146.10	168.50	170.25					
	θ_s	0.346	0.511	0.692	0.82	0.83					

Figura 1-a

$$R_a = 100 \quad , \quad \Lambda = 0.25 \quad , \quad \hat{Q} = 6$$



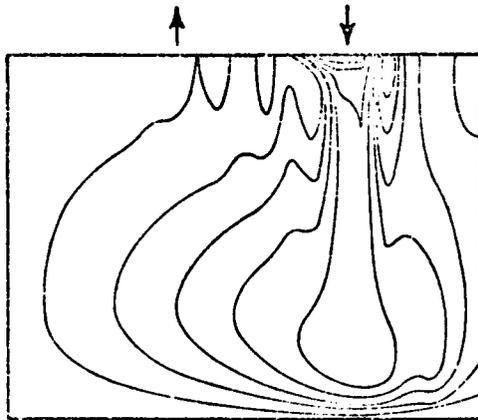
Isotermas Adimensionales



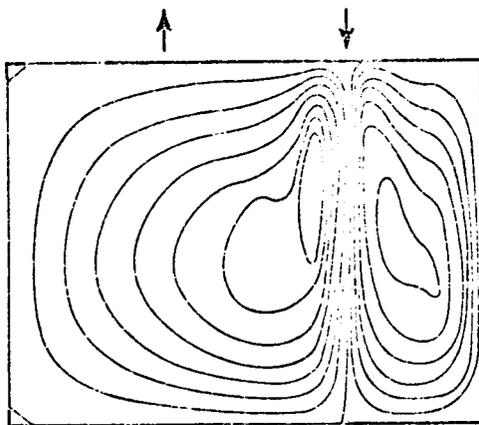
Líneas de Corriente Adimensionales

Figura 1-b

$R_a = 1000$, $\Lambda = 0.25$, $\hat{Q} = 0.1$



Isotermas Adimensionales



Líneas de Corriente Adimensionales

REFERENCIAS

- Blake, K.R. y Bejan, A.; Natural Convection Near 4° C in a Water Saturated Porous Layer Heated From Below. Int. J. Heat Mass Transfer, 27, 2355 (1984).
- Gupta, M.N.; Boundary Conditions for the Navier-Stokes Equations. Numerical Simulation of Fluid Motion, 467 (1978).
- Horne, R.N. y Sullivan, M. J.; Oscillatory Convection in a Porous Medium Heated From Below. J. Fluid Mech., 66, 339 (1974).
- Kruger, P.; Geothermal Energy. Annual Review of Energy, 1, 159 (1976).
- Noye, J.; An Introduction to Finite Differences Techniques. Numerical Simulation of Fluid Motion. 1 (1978).
- Ping Chen; Heat Transfer in Geothermal System. Adv. Heat Transfer, 14, (1978).