

FRECUENCIAS NATURALES DE VIGAS DE PARED DELGADA DOBLEMENTE ASIMÉTRICAS

Daniel Ambrosini* y Rodolfo Danesi†

* Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo
Centro Universitario - Parque Gral. San Martín - (5500) Mendoza. Fax 54 0261 4380120
e-mail: dambrosini@uncu.edu.ar, web page: <http://fing.uncu.edu.ar/>

† Instituto de Estructuras
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán
Av. Roca 1800, 4000 Tucumán, Argentina. Tel.: 54-0381-4364087 Fax: 0381 4364087
e-mail: labet@herrera.unt.edu.ar, web page: <http://herrera.unt.edu.ar/iest>

Key words: Vigas de pared delgada, Teoría de Vlasov, Frecuencias naturales

Resumen. *Las vigas de pared delgada y sección abierta son extensivamente usadas como componentes estructurales en distintos tipos de estructuras en los campos de Ingeniería Mecánica, Aeronáutica y Civil. En el caso de vigas que tienen dos ejes de simetría en su sección transversal, la solución de vibraciones libres es suficientemente conocida y estudiada. Inclusive cuando la sección transversal tiene un eje de simetría, se ha estudiado ampliamente, en general usando la teoría de Bernoulli-Navier. Sin embargo, es bastante limitado el número de estudios para vigas doblemente asimétricas en las cuales existe un triple acoplamiento de vibraciones de flexión en dos direcciones y torsión.*

En este trabajo se presenta una comparación numérico-experimental de las frecuencias naturales de vigas de pared delgada y sección abierta doblemente asimétricas. En cuanto al modelo físico teórico-numérico, la formulación inicial, basada en las hipótesis de Vlasov, fue modificada permitiendo la inclusión de deformaciones angulares inducidas por el esfuerzo de corte, sección variable en la dirección longitudinal e inercias rotacionales en las ecuaciones de movimiento. Se utiliza un método de integración numérica conjuntamente con el algoritmo de la transformada rápida de Fourier (FFT) para trabajar en el dominio de la frecuencia. Por otra parte, los resultados experimentales son de utilidad para la verificación de la teoría general de vigas presentada, como así también pueden servir de parámetro de comparación para diferentes teorías desarrolladas por otros investigadores.

1 INTRODUCCION

La determinación de frecuencias naturales y modos de vibración de vigas continuas no amortiguadas, se discute en detalle en Pestel and Leckie¹, donde también se describe el cálculo de la respuesta dinámica a excitación armónica. Por otra parte, Ebner and Billington² usan integración numérica para estudiar las vibraciones estacionarias de vigas de Timoshenko amortiguadas. En la literatura pueden encontrarse también numerosas aplicaciones de vibración de vigas rectas y curvas, como así también arcos y estructuras de cáscara. Por otra parte, la teoría formulada por Vlasov³ ha sido ampliamente usada en el análisis dinámico de vigas de pared delgada y sección abierta, como es ejemplificado en los estudios de Christiano and Culver⁴ y Yoo and Fehrenbach⁵ en los cuales existe gran correlación entre trabajos experimentales y las predicciones teóricas de frecuencias naturales y desplazamientos inducidos en vigas rectas y curvas sometidas a cargas móviles. En vigas esbeltas, la modelación de la estructura con un gran número de elementos finitos, elementos de cáscara u otros métodos más refinados, no conduce a ninguna mejora en la correlación con resultados experimentales, porque las diferencias entre los modelos teóricos normalmente son más pequeñas que los errores experimentales.

Sin embargo, aunque la teoría de Vlasov para vigas de sección abierta ya está firmemente establecida, presenta lagunas limitaciones tales como: a) Como en el caso de la teoría de Bernoulli, se supone que las deformaciones por corte no contribuyen a la flexibilidad de la viga. Por lo tanto, pueden encontrarse errores importantes en el caso de vigas poco esbeltas o en los modos altos de vigas esbeltas (Timoshenko and Young⁶). b) También se desprecia la influencia de las inercias rotacionales en las resultantes de tensiones. c) Las ecuaciones de cuarto orden de Vlasov son válidas solamente para vigas de sección uniforme. En trabajos anteriores^{7,8}, los autores propusieron una teoría modificada, la cual está basada en la formulación de Vlasov pero que tiene en cuenta los tres efectos mencionados anteriormente. Esta formulación, que usa el método de variables de estado en el dominio de la frecuencia, conduce a un tratamiento numérico eficiente, el cual puede ser muy útil en numerosas aplicaciones.

En la literatura pueden encontrarse otras teorías que también tienen en cuenta el acoplamiento entre flexión y torsión, tales como las presentadas por Gere and Lin⁹ que obtienen una ecuación simplificada para vigas uniformes de sección abierta y Muller¹⁰ que formula una teoría general que incluye todos los efectos de acoplamiento entre las ecuaciones de movimiento, pero es dificultosa su aplicación práctica. Otras contribuciones en este campo están restringidas a aplicaciones particulares. Por ejemplo, Aggarwal and Cranch¹¹ y Yaman¹² trabajan con secciones tipo canal y Ali Hasan and Barr¹³ con secciones ángulo.

Más recientemente, Tanaka and Bercin¹⁴ extendieron el modelo de Bishop et al.¹⁵ para estudiar acoplamiento triple de vigas uniformes usando Mathematica. Las ecuaciones diferenciales presentadas por los autores mencionados¹⁴ tienen una confusión del sistema de coordenadas que fue clarificada por Arpacı and Bozdogan¹⁶. Sin embargo, las ecuaciones presentadas en este último trabajo¹⁶ que corrigen las presentadas por Tanaka and Bercin¹⁴ son verificadas comparando los resultados con un caso que desprecia el mismo término que

Tanaka and Bercin¹⁴ imposibilitando la verificación de la precisión obtenida con ambas teorías. En un trabajo previo¹⁷ se presentó un estudio numérico comparando los resultados con los obtenidos con Arpaci and Bozdog¹⁶. La observación final presentada¹⁷ fue que se requieren estudios adicionales, especialmente en el campo experimental para la validación de las diferentes teorías de vigas de secciones asimétricas. En este trabajo se presenta una comparación numérico-experimental de las frecuencias naturales de vigas de pared delgada y sección abierta doblemente asimétricas, la cual contribuye a la clarificación de la cuestión.

2 TEORÍA

2.1 Ecuaciones de movimiento

Siguiendo la convención adoptada por Vlasov, se adopta un sistema rectangular de coordenadas globales izquierdo (x, y, z). Ver Figura 1. Los desplazamientos asociados son designados $\xi, \eta,$ y ζ . La inclusión de los efectos de deformaciones por corte, inercias rotacionales y propiedades seccionales variables en el marco de la teoría de Vlasov fue presentada por los autores en trabajos previos^{7,8}, en los cuales puede encontrarse una deducción completa de las ecuaciones de movimiento para vibraciones libres y forzadas, como así también, comparaciones con otras formulaciones y una discusión de la definición de los coeficientes de corte. Este trabajo está orientado a aplicaciones prácticas de las ecuaciones diferenciales para vibraciones libres.

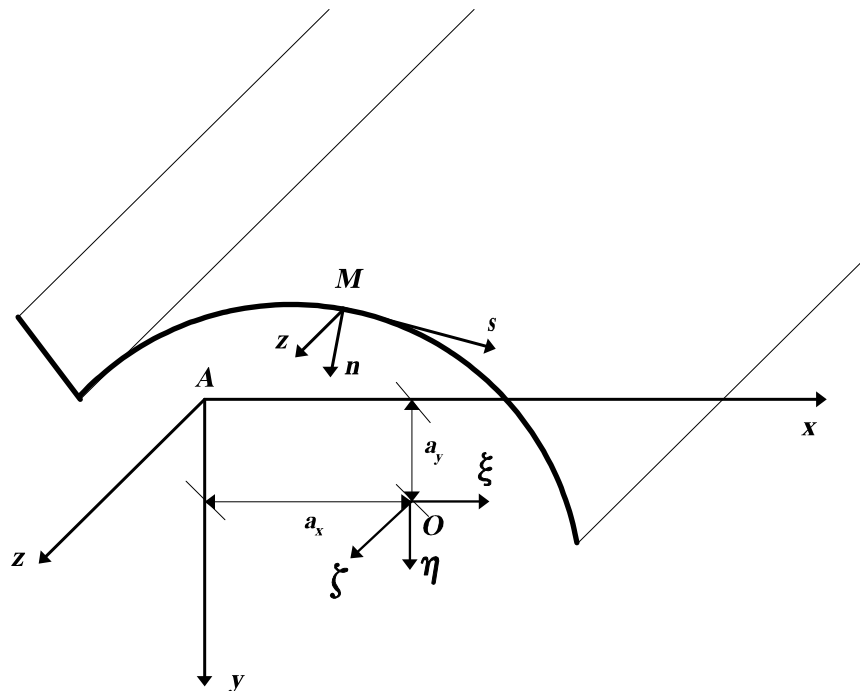


Figura 1: Definición de términos

En Figura 1, A representa el centroide de la sección transversal y O el centro de corte. Para

el caso de vibraciones libres, el modelo físico está formado por las siguientes ecuaciones diferenciales parciales de cuarto orden en los desplazamientos generalizados ξ , η , y θ :

$$E \left[J_y(z) \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z^3} \right) + 2 \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 \gamma_{mx}}{\partial z^2} \right) \frac{dJ_y(z)}{dz} \right] - \rho J_y(z) \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z \partial t^2} \right) - \rho \frac{dJ_y(z)}{dz} \left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial z \partial t^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{mx}}{\partial t^2} \right) + \rho F_T(z) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1a)$$

$$E \left[J_x(z) \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z^3} \right) + 2 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial z^3} - \frac{\partial^2 \gamma_{my}}{\partial z^2} \right) \frac{dJ_x(z)}{dz} \right] - \rho J_x(z) \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z \partial t^2} \right) - \rho \frac{dJ_x(z)}{dz} \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial z \partial t^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{my}}{\partial t^2} \right) + \rho F_T(z) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (1b)$$

$$E \left[J_\phi(z) \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3} \frac{dJ_\phi(z)}{dz} \right] - \rho J_\phi(z) \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} - \rho \frac{dJ_\phi(z)}{dz} \frac{\partial^3 \theta}{\partial z \partial t^2} + \rho F_T(z) \left(a_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - G J_d(z) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - G \frac{dJ_d(z)}{dz} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (1c)$$

En esas ecuaciones, F_T es el área de la sección transversal, J_x y J_y son los momentos de inercia de la sección transversal en relación a los ejes principales, J_ϕ el momento de inercia sectorial, J_d el módulo de torsión, a_x y a_y las coordenadas del centro de corte. ρ denota la densidad de masa del material de la viga. E y G son los módulos de elasticidad longitudinal y transversal respectivamente. Finalmente, γ_{mx} y γ_{my} representan los valores medios de las deformaciones por corte sobre una sección transversal $z = \text{constante}$ y

$$r^2 = a_x^2 + a_y^2 + \frac{J_x + J_y}{F_T} \quad (2)$$

El sistema (1) representa un modelo general para vigas no uniformes que tiene en cuenta el acoplamiento triple entre las vibraciones flexionales y torsionales. Debe tenerse en cuenta que la ecuación de vibración longitudinal relacionada al desplazamiento generalizado ζ (Figura 1) está desacoplada del resto del sistema (1) y no es analizada en el presente trabajo. En el caso que las vibraciones longitudinales sean de interés pueden ser tratadas independientemente.

2.2 Método de variables de estado

Si se realiza la transformada de Fourier del sistema (1) se obtiene un sistema equivalente de 12 ecuaciones diferenciales parciales con doce incógnitas en el dominio de la frecuencia. El esquema descrito anteriormente es conocido en la literatura como “método de variables de estado”. Se seleccionan como componentes del vector de estado \mathbf{v} seis componentes geométricas y seis estáticas: Los desplazamientos ξ y η , las rotaciones de flexión ϕ_x y ϕ_y , los esfuerzos de corte Q_x y Q_y , los momentos flectores M_x y M_y , la rotación torsional θ y su derivada espacial θ' , el momento torsional total M_T y el bimomento B .

$$\mathbf{v}(z, \omega) = \{ \eta, \phi_y, Q_y, M_x, \xi, \phi_x, Q_x, M_y, \theta, \theta', M_T, B \}^T \quad (3)$$

$$M_T = H_\phi + H_k \quad (4)$$

con $H_k = GJ_d \theta' =$ momento torsor de Saint Venant. El sistema es

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (5)$$

donde \mathbf{A} es la matriz del sistema dada en (7). Las componentes del vector de estado 12-dimensional \mathbf{v} son designadas “variables de estado”. En el dominio de la frecuencia las variables de estado dependen de la frecuencia ω y la variable longitudinal z . Por simplicidad, se usa la misma notación para las variables de estado en el dominio del tiempo y de la frecuencia, puesto que el dominio de trabajo puede identificarse con la indicación de los argumentos de la función. Por ejemplo, $\eta(z, t)$ y $\eta(z, \omega)$ se refieren a los desplazamientos según el eje y en el dominio del tiempo y su transformada de Fourier, respectivamente. Es importante notar que la presente formulación constituye una teoría general de vigas aplicable tanto a vigas de pared delgada como a vigas sólidas.

En (7) k'_x y k'_y son los coeficientes de corte de Cowper y:

$$B\theta' = \rho J_\phi \omega^2 - GJ_d \quad (6)$$

2.3 Procedimiento numérico y condiciones de contorno

El sistema (5) puede integrarse fácilmente usando procedimientos numéricos estándar, tales como el método de cuarto orden Runge-Kutta, el algoritmo predictor-corrector u otros métodos. Para resolver el problema, tanto para frecuencias naturales como para la respuesta dinámica, debe transformarse el mismo de un problema de valores de borde en dos puntos a un problema de valores iniciales, como es demostrado por Ebner and Billington². El procedimiento es normalmente aplicado en el método de matrices de transferencia (Pestel and Leckie¹). Las frecuencias naturales son determinadas por el método de Thomson.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
 0 & 1 & \frac{1}{k'_y FG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EJ_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\rho F \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho F \omega^2 a_x & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \rho J_x \omega^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k'_x FG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EJ_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 a_y & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho J_y \omega^2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EJ_\varphi} \\
 \rho F \omega^2 a_x & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 a_y & 0 & 0 & 0 & -\rho F \omega^2 r^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B\theta' & 1 & 0
 \end{bmatrix} \quad (7)$$

En este trabajo se consideran las clásicas condiciones de contorno: empotrada, libre o simplemente apoyada.

Borde empotrado

$$\xi = \eta = 0, \phi_x = \phi_y = \theta = 0, \theta' = 0 \quad (8)$$

Borde libre

$$Q_y = Q_x = 0, M_x = M_y = M_T = 0, B = 0 \quad (9)$$

Borde articulado

$$\xi = \eta = 0, M_x = M_y = 0, \theta = 0, B = 0 \quad (10)$$

3 ENSAYOS DINÁMICOS

3.1 Vigas ensayadas

Se ensayaron vigas de aluminio cuyas secciones transversales se presentan en Figura 2.

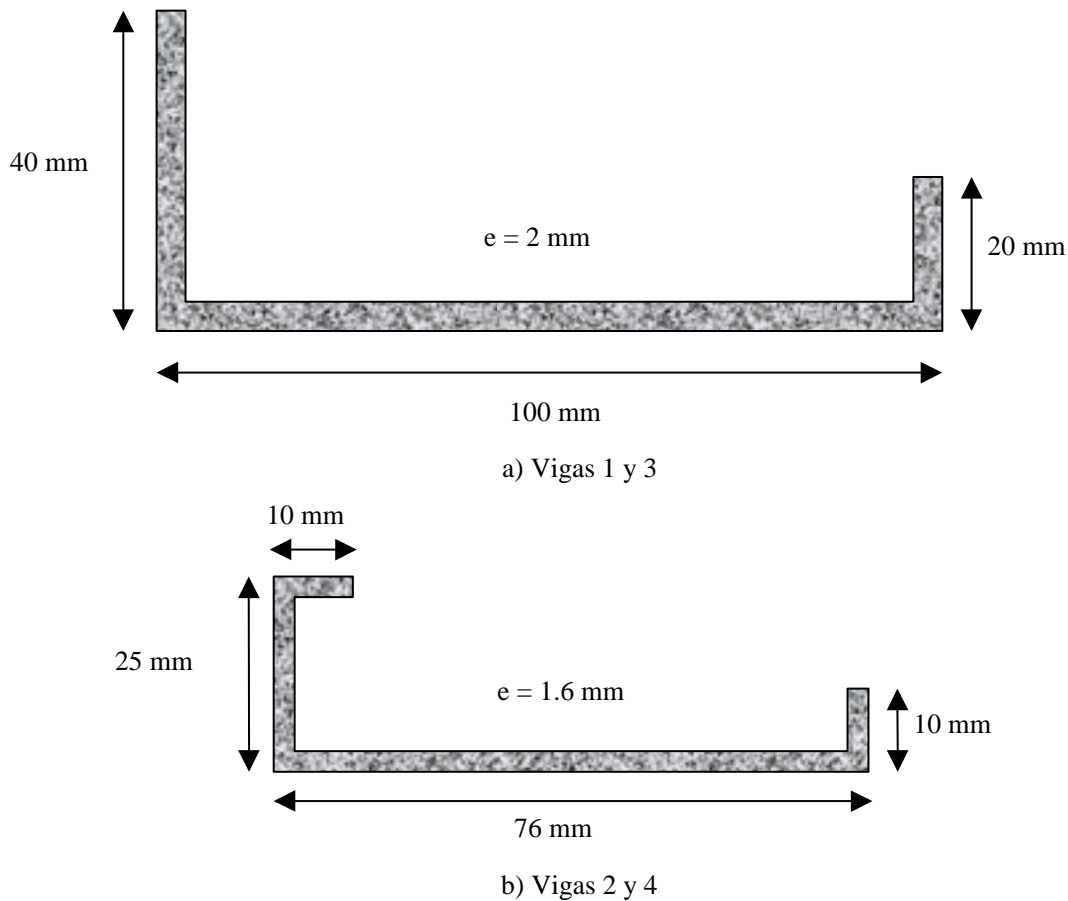


Figura 2: Secciones transversales de las vigas ensayadas

Las vigas 1 y 2 tenían una longitud de 2m entre apoyos y las vigas 3 y 4 tenían una luz de 1.5 m. Las cuatro vigas fueron ensayadas con condiciones de apoyo empotrada-libre y empotrada-empotrada.

3.2 Procedimiento de ensayo y equipamiento utilizado

El procedimiento de ensayo consistió en excitar la estructura, medir la respuesta en distintos puntos de la misma, y realizar finalmente la adquisición de datos y el análisis de las señales obtenidas¹⁸ (Figura 3). Para excitar las estructuras se usó una señal no medida tipo pulso, provocada por el golpe de un martillo (según se observa en Figura 4). Se midió la respuesta dinámica de la estructura en distintos puntos mediante acelerómetros.



Figura 3: Esquema general de ensayo



Figura 4: Excitación impulsiva

Los acelerómetros usados fueron transductores KYOWA AS-5GB. Para acondicionar la señal de salida del acelerómetro, se usó un amplificador dinámico KYOWA DPM600. El mismo cuenta con un filtro pasa-baja, con objeto de eliminar componentes de frecuencias no deseadas (para evitar *aliasing*). La señal analógica proveniente del amplificador, fue digitalizada en una placa de adquisición de datos de 8 canales diferenciales de resolución de 16 bit y un tiempo de conversión máximo de 10 μ s (100 KHz). El muestreo de la señal analógica se realizó, para ambas vigas, con los siguientes parámetros: $N = 2500$ (número total

de puntos adquiridos por canal durante el muestreo), $n = 500$ (tasa de muestreo o número de puntos obtenidos por segundo), $T = 5$ s (duración total de la muestra), $\Delta t = 0.002$ s, (intervalo de muestreo), $\Delta f = 0.2$ Hz (frecuencia de muestreo), $f_{m\acute{a}x} = 250$ Hz (frecuencia máxima).

Se programó un algoritmo para procesar los N datos obtenidos en la placa de adquisición de datos. Para ello se usó el programa HPVEE¹⁹. En Figura 5 se presenta, a modo de ejemplo, una de las respuestas obtenidas. Aplicado el algoritmo de la transformada rápida de Fourier a esas muestras, se calculó el espectro según el método de Welch (Peeters²⁰) base del procedimiento de identificación de sistemas adoptado.

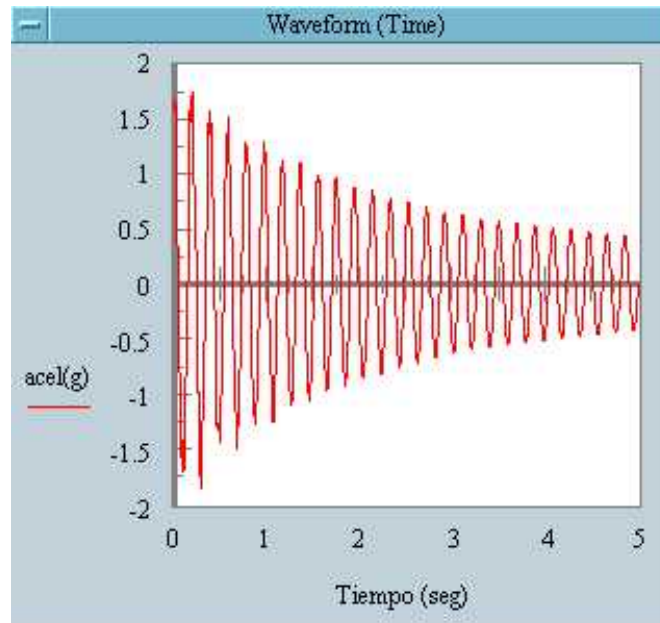


Figura 5: Respuesta de un ensayo típico

3.3 Identificación de sistemas

La identificación de los sistemas considerados consistió en estimar las frecuencias naturales. El procedimiento adoptado corresponde a un método en el dominio de la frecuencia, basado en la función densidad espectral de la respuesta denominado *detección de pico (peak picking)*. Este método es simple, de rápida aplicación, y ampliamente usado en ingeniería civil²⁰. En el método mencionado las frecuencias naturales se identifican según los picos del gráfico de la función densidad espectral antes mencionada.

Los parámetros modales estimados experimentalmente se presentan en Tabla 1. En este trabajo, para el análisis de errores aleatorios se calcularon los estimadores del valor medio μ , del desvío estándar σ , y del coeficiente de variación CV o error aleatorio normalizado (medida relativa de variabilidad). Los errores sistemáticos debidos a los efectos de *aliasing* y *leakage*, se consideraron en el procedimiento de toma de datos y análisis de señales.

Tabla 1: Resultados experimentales. Frecuencias obtenidas (Hz)

	Empotrada-Libre					Empotrada-Empotrada				
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
VIGA 1	5.2	12.6	25.8	28.4	69.4	24.5	49.1	63.5	122.5	196.4
VIGA 2	3.8	11.2	20.2	43.2	69.2	16.1	32.1	39.1	70.4	111.3
VIGA 3	8.8	17.8	45.8	108.2	-	39.0	78.0	104.4	116.8	142.8
VIGA 4	6.2	18.0	29.2	59.2	116.8	24.0	59.0	100.7	124.6	-

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1 Modelo desarrollado

Se desarrolló un programa computacional con el modelo presentado en la sección 2 (Programa DYBEAM^{7,8}). La definición de ejes y coordenadas del centro de corte, para el caso de las vigas en estudio, es presentada en Figura 6.

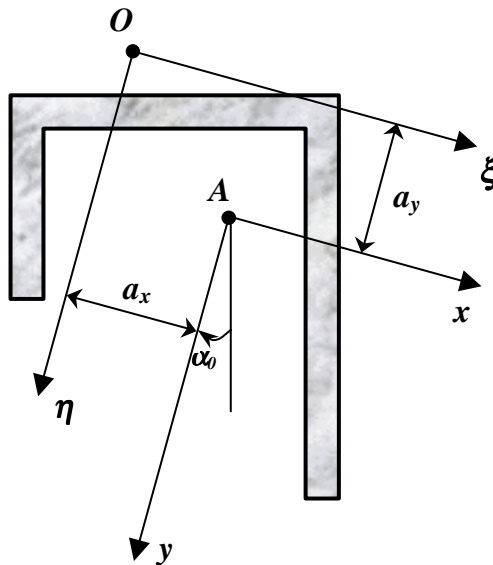


Figura 6: Notación y ejes principales.

Entonces, las propiedades mecánicas y geométricas usadas para aplicar la teoría presentada en este trabajo son:

a) Vigas 1 y 3.

$$l = 2.00 \text{ m (Viga 1)}$$

$$F_T = 3.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$J_x = 3.024 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$J_\varphi = 2.838 \cdot 10^{-11} \text{ m}^6$$

$$a_x = 2.67 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$E = 4.50 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.25$$

$$l = 1.50 \text{ m (Viga 3)}$$

$$J_y = 4.595 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$J_d = 4.270 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$a_y = -1.30 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\rho = 2650 \text{ kg/m}^3$$

b) Vigas 2 y 4.

$$l = 2.00 \text{ m (Viga 2)}$$

$$F_T = 1.891 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$J_x = 9.19 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

$$J_\varphi = 2.522 \cdot 10^{-12} \text{ m}^6$$

$$a_x = -2.77 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$E = 4.20 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\nu = 0.25$$

$$l = 1.50 \text{ m (Viga 4)}$$

$$J_y = 1.42 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

$$J_d = 1.610 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$a_y = -0.74 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\rho = 2650 \text{ kg/m}^3$$

4.2 Modelo de Elementos Finitos

Con la idea de realizar una comparación con un modelo de elementos finitos, se utilizó el programa SAP2000²² para modelar las vigas presentadas anteriormente. Se utilizaron 20 elementos tipo Shell en la dirección longitudinal, considerando los efectos flexionales y membranales. Las propiedades materiales fueron las mismas que las usadas en 4.1. A modo de ilustración, se presenta en Figura 7 uno de los modos de vibración obtenidos en uno de los ejemplos analizados.

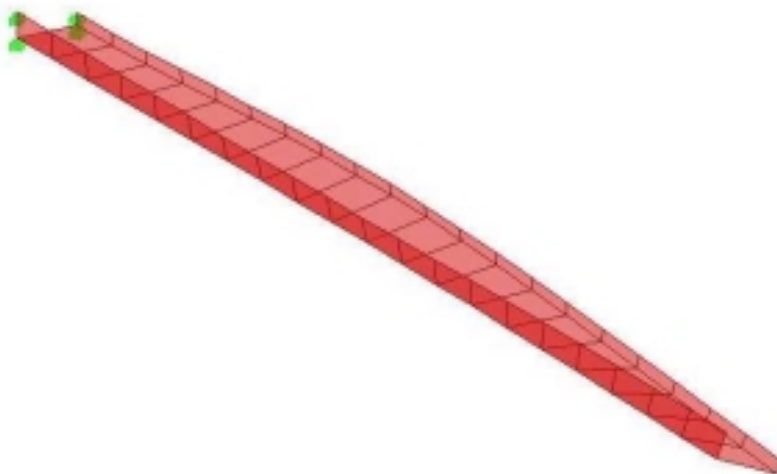


Figura 7: Modo 4. Viga 1. Empotrada-Libre. Programa SAP2000.

4.3 Comparación de resultados

Se realiza en este punto la comparación entre los resultados numéricos y experimentales. Debido a la asimetría que presentan las vigas, todos los modos de vibración son modos acoplados de flexión y torsión. Sin embargo en este punto se va a identificar los modos de acuerdo al movimiento predominante

a) *Viga 1*: Se presentan los resultados en Tablas 2 y 3.

Tabla 2: Comparación numérico-experimental. Viga 1 empotrada-libre

Frecuencia	Modo	Ensayo Hz	DYBEAM		SAP2000	
			Frec. Hz	Dif. %	Frec. Hz	Dif. %
1	1 Flexión vertical (Y)	5.2	5.3	1.9	5.15	-1.0
2	1 Torsión	12.6	12.0	4.8	9.9	21.4
3	1 Flexión lateral (X)	25.8	23.4	9.3	22.4	13.2
4	2 Flexión vertical (Y)	28.4	28.5	-0.4	26.5	6.7
5	2 Torsión	-	50.9	-	41.9	-
6	3 Flexión vertical (Y)	69.4	67.3	3.0	59.1	14.8

Tabla 3: Comparación numérico-experimental. Viga 1 empotrada-empotrada

Frecuencia	Modo	Ensayo Hz	DYBEAM		SAP2000	
			Frec. Hz	Dif. %	Frec. Hz	Dif. %
1	1 Flexión vertical (Y)	24.5	24.8	-1.2	22.2	9.4
2	1 Flexo- Torsión lateral (X)	49.1	47.9	2.4	40.5	17.5
3	2 Flexión vertical (Y)	63.5	63.4	0.2	55.2	13.1
4	3 Flexión vertical (Y)	122.5	119.1	2.8	102.8	16.1

Se observa que el programa DYBEAM presenta una diferencia promedio del 1.6% en los modos de vibración con predominio de desplazamientos verticales, mientras que el programa SAP2000 presenta una diferencia promedio del 10.2% para estos modos. Respecto de los modos de flexotorsión lateral el programa DYBEAM presenta una diferencia promedio del

5.5% y el programa SAP2000 una diferencia promedio del 17.4%. Puede observarse también la dificultad del método experimental para captar los modos de flexotorsión lateral.

b) *Viga 2*: Se presentan los resultados en Tablas 4 y 5.

Tabla 4: Comparación numérico-experimental. Viga 2 empotrada-libre

Frecuencia	Modo	Ensayo Hz	DYBEAM		SAP2000	
			Frec. Hz	Dif. %	Frec. Hz	Dif. %
1	1 Flexión vertical (Y)	3.8	3.7	2.6	3.8	0.0
2	1 Torsión	11.2	11.1	0.9	8.7	22.3
3	1 Flexión lateral (X)		16.1		16.6	
4	2 Flexión vertical (Y)	20.2	20.3	-0.5	19.6	3.0
5	3 Flexión vertical (Y)	69.2	70.4	1.7	64.5	4.7

Tabla 5: Comparación numérico-experimental. Viga 2 empotrada-empotrada

Frecuencia	Modo	Ensayo Hz	DYBEAM		SAP2000	
			Frec. Hz	Dif. %	Frec. Hz	Dif. %
1	1 Flexión vertical (Y)	16.1	16.15	-0.3	15.2	5.6
2	1 Flexo- Torsión lateral (X)	32.1	37.9	-18.1	33.4	-4.0
3	2 Flexión vertical (Y)	39.1	39.4	-0.8	35.0	10.5
4	3 Flexión vertical (Y)	70.4	66.5	5.5	61.2	13.1
5	4 Flexión vertical (Y)	111.3	104.5	6.1	95.15	14.5

Se observa que el programa DYBEAM presenta una diferencia promedio del 2.5% en los modos de vibración con predominio de desplazamientos verticales, mientras que el programa SAP2000 presenta una diferencia promedio del 7.3% para estos modos. Respecto de los modos de flexotorsión lateral el programa DYBEAM presenta una diferencia promedio del 9.5% y el programa SAP2000 una diferencia promedio del 13.2%.

c) *Viga 3*: Se presentan los resultados en Tablas 6 y 7.

Tabla 6: Comparación numérico-experimental. Viga 3 empotrada-libre

Frecuencia	Modo	Ensayo Hz	DYBEAM		SAP2000	
			Frec. Hz	Dif. %	Frec. Hz	Dif. %
1	1 Flexión vertical (Y)	8.8	8.8	0.0	8.8	0.0
2	1 Torsión	17.8	17.5	1.7	14.7	17.4
3	1 Flexión lateral (X)	-	39.8	-	39.5	-
4	2 Flexión vertical (Y)	45.8	44.8	2.2	42.0	8.3
5	2 Torsión	-	82.7	-	71.2	-
6	3 Flexión vertical (Y)	108.2	108.6	-0.6	96.6	10.7

Tabla 7: Comparación numérico-experimental. Viga 3 empotrada-empotrada

Frecuencia	Modo	Ensayo Hz	DYBEAM		SAP2000	
			Frec. Hz	Dif. %	Frec. Hz	Dif. %
1	1 Flexión vertical (Y)	39.0	40.0	-2.6	36.2	7.2
2	1 Flexo- Torsión lateral (X)	78.0	80.4	-3.1	71.0	9.0
3	2 Flexión vertical (Y)	104.4	104.5	-0.1	93.4	10.5

Se observa que el programa DYBEAM presenta una diferencia promedio del 1.1% en los modos de vibración con predominio de desplazamientos verticales, mientras que el programa SAP2000 presenta una diferencia promedio del 7.3% para estos modos. Respecto de los modos de flexotorsión lateral el programa DYBEAM presenta una diferencia promedio del 2.4% y el programa SAP2000 una diferencia promedio del 13.2%.

d) *Viga 4*: Se presentan los resultados en Tablas 8 y 9.

Tabla 8: Comparación numérico-experimental. Viga 4 empotrada-libre

Frecuencia	Modo	Ensayo Hz	DYBEAM		SAP2000	
			Frec. Hz	Dif. %	Frec. Hz	Dif. %
1	1 Flexión vertical (Y)	6.2	6.3	-1.6	6.4	-3.2
2	1 Torsión	18.0	16.4	8.9	12.8	28.9
3	1 Flexión lateral (X)	-	28.1	-	28.5	-
4	2 Flexión vertical (Y)	29.2	32.0	-9.6	30.6	-3.3
5	3 Flexión vertical (Y)	59.2	62.9	-6.2	56.3	4.9
6	2 Torsión	-	75.7	-	63.9	-
7	4 Flexión vertical (Y)	116.8	113.6	2.7	103.5	11.4

Tabla 9: Comparación numérico-experimental. Viga 4 empotrada-empotrada

Frecuencia	Modo	Ensayo Hz	DYBEAM		SAP2000	
			Frec. Hz	Dif. %	Frec. Hz	Dif. %
1	1 Flexión vertical (Y)	24.0	24.5	-2.1	23.3	2.9
2	2 Flexión vertical (Y)	59.0	58.8	0.3	55.6	5.8
3	1 Flexo- Torsión lateral (X)	-	65.4	-	58.0	-
4	3 Flexión vertical (Y)	100.7	105.9	-5.2	101.1	-0.4

Se observa que el programa DYBEAM presenta una diferencia promedio del 4.0% en los modos de vibración con predominio de desplazamientos verticales, mientras que el programa SAP2000 presenta una diferencia promedio del 4.6% para estos modos. Respecto de los modos de flexotorsión lateral el programa DYBEAM presenta una diferencia del 8.9% y el programa SAP2000 una diferencia del 28.9%.

5 CONCLUSIONES

Se presentan en este trabajo las ecuaciones de movimiento de vigas de pared delgada y sección abierta variable, en el marco del método de variables de estado en el dominio de la frecuencia. Las ecuaciones tienen en cuenta la influencia de la flexibilidad por corte e inercias rotacionales, efectos éstos que son despreciados en la teoría original de Vlasov. Las ecuaciones permiten el análisis de problemas prácticos usando integración numérica conjuntamente con técnicas aplicadas rutinariamente en análisis de matrices de transferencia. Además, pueden ser utilizadas para la evaluación numérica de matrices de transferencia o matrices de rigidez dinámica de elementos de viga de sección abierta. Además, la teoría propuesta puede usarse para vigas sólidas en las cuales exista acoplamiento de las vibraciones flexionales y torsionales. Por último, se presentan las matrices de campo de un modelo simplificado que no tiene en cuenta los efectos de alabeo de la sección transversal.

Se presenta una comparación numérico-experimental de las frecuencias naturales de vigas de pared delgada y sección abierta doblemente asimétricas. Los resultados experimentales son de utilidad para la verificación de la teoría general de vigas presentada, como así también pueden servir de parámetro de comparación para diferentes teorías desarrolladas por otros investigadores.

Puede observarse en los resultados obtenidos que el modelo presentado tiene una precisión comparable al obtenido con el método de elementos finitos usando elementos de placa, que resulta de mayor costo computacional. Por otra parte, el modelo presentado mantiene la alta precisión en los modos altos, lo que no ocurre con el método de elementos finitos. Por último, en lo que hace a los modos flexotorsionales, el modelo propuesto predice con mayor precisión las frecuencias obtenidas en los ensayos.

Agradecimientos

Los autores agradecen al personal técnico del Instituto de Estructuras, Sres. Eduardo Batalla y Daniel Torielli por su apoyo en la realización de los ensayos. Se agradece también el apoyo financiero del CONICET y la Universidad Nacional de Tucumán.

6 REFERENCIAS

- [1] Pestel, E.C., and Leckie, F.A. *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill, New York. (1963).
- [2] Ebner, A., and Billington, D. "Steady State Vibrations of Damped Timoshenko Beams." *Journal of the Structural Division, ASCE*, New York, 737-60, (1968).
- [3] Vlasov, V. *Thin-walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Translations, 2ed. Jerusalem. (1963)
- [4] Christiano, P., and Culver, C. "Horizontally Curved Bridges Subject to Moving Load." *Journal of Structural Division, ASCE*, New York, 1615-43 (1969).
- [5] Yoo, C., and Fehrenbach, J. "Natural Frequencies of Curved Girders." *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, New York, 339-54, (1982).
- [6] Timoshenko, S., and Young, D. *Vibration Problems in Engineering*, 3rd. Ed., Van

- Nostrand, Princeton, NJ. (1968)
- [7] Ambrosini, R.D., Riera, J.D., and Danesi, R.F. “Dynamic Analysis of Thin-Walled and Variable Open Section Beams with Shear Flexibility”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(17), 2867-2885, (1995).
- [8] Ambrosini, R.D., Riera, J.D., and Danesi, R.F. “A modified Vlasov theory for dynamic analysis of thin-Walled and variable open section beams”, *Engineering Structures*, 22, 890-900, (2000).
- [9] Gere, J., and Lin, Y. “Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Cross Section.” *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 25, 373-378, (1958).
- [10] Muller, P. “Torsional-Flexural Waves in Thin-Walled Open Beams.” *Journal of Sound and Vibration*, 87(1), 115-141, (1983).
- [11] Aggarwal, H., and Cranch, E. “A Theory of Torsional and Coupled Bending Torsional Waves in Thin-Walled Open Section Beams.” *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 34, 337-343, (1967).
- [12] Yaman, Y. “Vibrations of Open-section Channels: A Coupled Flexural and Torsional Wave Analysis.” *Journal of Sound and Vibration*, 204(1), 131-158, (1997).
- [13] Ali Hasan, S., and Barr, A. “Linear Vibration of Thin-Walled Beams of Equal Angle-Section.” *Journal of Sound and Vibration*, 32, 3-23, (1974).
- [14] Tanaka, M., and Bercin A.N. “Free vibration solution for uniform beams of nonsymmetrical cross section using Mathematica” *Computers and Structures*, 71, 1-8, (1999).
- [15] Bishop, R.E.D., Cannon S.M. and Miao, S. “On Coupled bending and Torsional vibration of uniform beams.” *Journal of Sound and Vibration*, 131(3), 457-64, (1989).
- [16] Arpacı, A., and Bozdağ E. “On free vibration analysis of thin-walled beams with nonsymmetrical open cross-sections” *Computers and Structures*, 80, 691-695, (2002).
- [17] Ambrosini D., and Danesi R., “Free vibration of nonsymmetrical thin walled beams”. *Mecánica Computacional Vol. XXII, XIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, ENIEF 2003*, pp. 666-677. (2003).
- [18] Ewins D., “Modal Testing - Theory, practice and application”. Second Edition - Research Studies Press Ltd. 2000.
- [19] Hewlett – Packard, “HP VEE Advanced Programming Techniques”. 1998.
- [20] Peeters, B., “System identification and damage detection in civil engineering”. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium. 2000.
- [21] SAP2000 Integrated Finite Element Analysis and Design of Structures, v. 7.42. Computers and Structures Inc. (2001).