

## **ELEMENTO DE VIGA/LÁMINA 2-D SIN ROTACIONES PARA PROBLEMAS CON GRANDES DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES**

**Fernando G. Flores\***

\*Departamento de Estructuras  
Universidad Nacional de Córdoba  
Casilla de Correo 916  
5000 Córdoba - Argentina  
e-mail: fflores@efn.uncor.edu  
web page: <http://www.efn.uncor.edu>

**Palabras clave:** Elementos Finitos, Láminas, Sin Rotaciones, Grandes Deformaciones.

**Resumen.** *En este trabajo se presenta un elemento bidimensional para el análisis de láminas de revolución, láminas en régimen de deformación plana en la dirección transversal o vigas. El elemento se basa en la teoría clásica de láminas (sin deformaciones transversales de corte). La principal característica del elemento es que no posee grados de libertad rotacionales. Para el cálculo de las curvaturas se recurre a la configuración de los elementos vecinos. Se considera comportamiento elasto-plástico del material. Para el tratamiento de grandes deformaciones se utilizan medidas de deformación logarítmicas y se integra la ecuación constitutiva a través del espesor. Se da especial atención a los casos de láminas cuya geometría no es suave y de láminas ramificadas. Se presentan varios ejemplos en régimen lineal a los fines de estudiar la convergencia del elemento y en régimen no lineal, incluyendo problemas con grandes deformaciones*

## 1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de técnicas numéricas para problemas de láminas donde no haya rotaciones como incógnitas ha estado principalmente centrado en el método de diferencias finitas (ver por ej.<sup>1-3</sup>). Sin embargo la idea de desarrollar elementos finitos de láminas y vigas sin grados de libertad de rotación no es nueva<sup>4,5</sup> y se han realizado distintos intentos desde los comienzos del método.<sup>6-10</sup> Pero recién en la última década se ha logrado obtener elementos confiables para aplicaciones industriales.<sup>11-14</sup> Todas las aproximaciones tienen en común la utilización de una vecindad (parcela) de elementos a los fines de definir la interpolación de la geometría y los desplazamientos. El elemento distintivo principal entre las distintas propuestas es la forma en que se aproximan las curvaturas y el basamento teórico utilizado. Uno de los principales aspectos que queda por resolver en forma satisfactoria es el tratamiento de superficies que no son suaves o que ramifican. La solución de estos aspectos es imprescindible si se pretende utilizar este tipo de elementos a problemas aeronáuticos. En particular el caso de láminas ramificadas (esto es cuando en una arista concurren 3 o más superficies) es el que presenta el mayor desafío.

En este trabajo se abordan problemas bidimensionales, (cuyos principales antecedentes son<sup>15,16</sup>) con especial énfasis en el tema de láminas no suaves y ramificadas. Este trabajo puede verse como un paso previo al desarrollo de elementos de láminas 3-dimensionales sin grados de libertad rotacionales que sean capaces de tratar dicho tipo de estructuras.

Un bosquejo de este trabajo es el siguiente. Primero se resumen las ecuaciones que gobiernan el comportamiento cinemático de las estructuras de interés. Luego se desarrolla el elemento finito sin rotaciones. A continuación se aborda el tratamiento de quiebres (pérdida de la continuidad de la tangente) y de ramificaciones. En la última parte se realizan las evaluaciones numéricas, estas incluyen problemas lineales, no-lineales elásticos y problemas con grandes deformaciones elasto-plásticas. Finalmente se agrupan algunas conclusiones.

## 2. ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE VIGAS EN DOS DIMENSIONES

En esta sección se resumen las ecuaciones que gobiernan la cinemática del problema, un análisis más detallado puede encontrarse en la extensa bibliografía existente sobre el tema.<sup>1</sup> Inicialmente interesa ver las ecuaciones cinemáticas de una viga en 2 dimensiones. Estas ecuaciones se extienden luego al análisis de láminas de revolución.

Dentro de una teoría clásica de vigas (sin deformaciones de corte transversal), la geometría de la viga queda definida exclusivamente por la posición del eje baricéntrico  $\varphi$  en función de la longitud de arco  $s$

$$\varphi(s) = \begin{bmatrix} \varphi_1(s) \\ \varphi_2(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

donde  $\varphi_i$  son las componentes respecto a un sistema coordenado cartesiano con base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . En cada punto material asociado a la coordenada  $s$  es posible establecer un sistema convectivo

definido por la tangente  $\mathbf{t}$  a la línea de centroides  $\varphi$  y la normal  $\mathbf{n}$

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\frac{d\varphi(s)}{ds}}{\left\| \frac{d\varphi(s)}{ds} \right\|} \quad \mathbf{n}(s) = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{t}(s) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{e}_3$  es la normal al plano de trabajo.

A partir de la posición del eje baricéntrico  $\varphi$  y la normal  $\mathbf{n}$ , la posición de un punto cualquiera de la sección puede escribirse en función de la distancia del punto  $\zeta$  al eje, como:

$$\mathbf{x}(s, \zeta) = \begin{bmatrix} x_1(s, \zeta) \\ x_2(s, \zeta) \end{bmatrix} = \varphi(s) + \zeta \mathbf{n}(s) \quad (3)$$

Dejando de lado en la notación la dependencia con la longitud de arco  $s$  y utilizando la notación  $\frac{\partial}{\partial s} = (\cdot)_{,s}$  el gradiente de la deformación es

$$\mathbf{F}(s, \zeta) = \left[ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} \right] = [\varphi_{,s} + \zeta \mathbf{n}_{,s}, \mathbf{n}] \quad (4)$$

con lo cual el tensor de deformación derecho de Cauchy-Green restringido a las componentes en el plano resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \mathbf{F} \\ &= \begin{bmatrix} \varphi_{,s} \cdot \varphi_{,s} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \zeta \begin{bmatrix} 2\varphi_{,s} \cdot \mathbf{n}_{,s} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \zeta^2 \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{,s} \cdot \mathbf{n}_{,s} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

despreciando términos asociados con  $\zeta^2$ , la única componente relevante es

$$C_{ss} = \varphi_{,s} \cdot \varphi_{,s} + 2\zeta \varphi_{,s} \cdot \mathbf{n}_{,s} \quad (6)$$

Las medidas geométricas del eje baricéntrico que permiten evaluar las deformaciones son:

- El estiramiento axial (al cuadrado)

$$\lambda_s^2 = \varphi_{,s} \cdot \varphi_{,s} \quad (7)$$

- La curvatura en el plano

$$\kappa_s = \varphi_{,s} \cdot \mathbf{n}_{,s} = -\varphi_{,ss} \cdot \mathbf{n} \quad (8)$$

Las expresiones anteriores suponen una sección transversal inextensible, razonable para problemas con pequeñas deformaciones. Para el caso de deformaciones moderadas o grandes, es necesario modificar las expresiones anteriores para considerar la modificación de la sección. Aquí se supondrá que la sección no cambia de forma pero si de tamaño de tal forma que al

modificarse la longitud de la línea baricéntrica no cambie el volumen. De esta forma si se supone un estiramiento igual en las direcciones  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{e}_3$  de valor  $\lambda_n$ , resulta

$$\lambda_n = \lambda_s^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi} + \lambda_n \zeta \mathbf{n} \quad (10)$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{x}'_s, \mathbf{x}'_\zeta] = [\boldsymbol{\varphi}'_s + \lambda_n \zeta \mathbf{n}'_s, \lambda_n \mathbf{n}] \quad (11)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_s \cdot \boldsymbol{\varphi}'_s & 0 \\ 0 & \lambda_n^2 \end{bmatrix} + 2\lambda_n \zeta \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_s \cdot \mathbf{n}'_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_n^2 \zeta^2 \begin{bmatrix} \mathbf{n}'_s \cdot \mathbf{n}'_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

donde en el gradiente de la deformación  $\mathbf{F}$  se ha despreciado la derivada del estiramiento transversal  $\lambda_n$ .

### 2.1. extensión a láminas de revolución

La extensión a láminas de revolución, suponiendo el eje revolución coincidente con el eje  $\mathbf{e}_2$ , requiere la definición de la deformación en la dirección circunferencial  $C_{\theta\theta}$  ( $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_3$ ). Esta depende exclusivamente de la coordenada medida sobre el eje  $\mathbf{e}_1$  en las configuraciones actual ( $x_1$ ) y referencial ( $X_1$ ). Las nuevas componentes del gradiente y del tensor de deformación son:

$$F_{33} = F_{\theta\theta} = \frac{x_1}{X_1} = \frac{(\boldsymbol{\varphi} + \lambda_n \zeta \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_1}{(\boldsymbol{\varphi}^o + \zeta \mathbf{n}^o) \cdot \mathbf{e}_1} \quad (13)$$

$$C_{\theta\theta} = (F_{\theta\theta})^2 = \left[ \frac{(\boldsymbol{\varphi} + \lambda_n \zeta \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_1}{(\boldsymbol{\varphi}^o + \zeta \mathbf{n}^o) \cdot \mathbf{e}_1} \right]^2 \quad (14)$$

despreciando en el denominador la influencia de la coordenada  $\zeta$ , y en el numerador la influencia de los términos en  $\zeta^2$

$$\begin{aligned} C_{\theta\theta} &= \frac{(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_1)^2 + 2\lambda_n \zeta (\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)}{(\boldsymbol{\varphi}^o \cdot \mathbf{e}_1)^2} \\ &= \frac{(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_1)^2}{(\boldsymbol{\varphi}^o \cdot \mathbf{e}_1)^2} + \frac{2\lambda_n \zeta (\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_1) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)}{(\boldsymbol{\varphi}^o \cdot \mathbf{e}_1)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

$$= \left( \frac{\varphi_1}{\varphi_1^o} \right)^2 + \frac{2\lambda_n \zeta \varphi_1 (-\sin \phi)}{(\varphi_1^o)^2} \quad (16)$$

donde ahora el estiramiento en la dirección normal para un comportamiento sin cambio de volumen es

$$\lambda_n = \lambda_s^{-1} \lambda_\theta^{-1} \quad (17)$$

con  $\phi$  el ángulo formado por el vector tangente  $\mathbf{t}$  y el eje  $\mathbf{e}_1$

Las nuevas medidas geométricas que permiten evaluar las deformaciones son:

- La deformación de la superficie media de la lámina en la dirección circunferencial

$$\lambda_\theta^2 = \left( \frac{\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_1}{\boldsymbol{\varphi}^o \cdot \mathbf{e}_1} \right)^2 = \left( \frac{\varphi_1}{\varphi_1^o} \right)^2 \quad (18)$$

- La segunda curvatura principal

$$\kappa_\theta = \frac{(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1)}{(\boldsymbol{\varphi}^o \cdot \mathbf{e}_1)^2} = \lambda_\theta \frac{(-\sin \phi)}{\varphi_1^o} \quad (19)$$

De esta forma el tensor de deformación derecho de Cauchy-Green puede escribirse

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_s \cdot \boldsymbol{\varphi}'_s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{\varphi_1}{\varphi_1^o} \right)^2 \end{bmatrix} + 2\lambda_n \zeta \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_s \cdot \mathbf{n}'_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\theta \frac{(-\sin \phi)}{\varphi_1^o} \end{bmatrix} \quad (20)$$

## 2.2. medidas de deformación y tensión

Se utilizará como configuración de referencia a la configuración indeformada libre de tensiones (configuración natural). Allí se definen los puntos materiales ( $s$  y  $\zeta$  son las coordenadas de los puntos materiales en dicha configuración). Con un supraíndice “o” se indican valores medidos en la configuración indeformada.

Notar que en el caso de vigas o superficies inicialmente curvas para puntos fuera de la superficie media,  $\mathbf{C}$  no resulta en la configuración original un tensor unitario. Si despreciamos la influencia de estas curvaturas iniciales en  $\mathbf{C}^o$ , y definimos los cambios de curvatura como

$$\begin{bmatrix} \chi_s \\ \chi_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa_s^o \\ \kappa_\theta^o \end{bmatrix} \quad (21)$$

es posible aproximar (a los fines de una eficiente implementación computacional)

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_s \cdot \boldsymbol{\varphi}'_s & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_n^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{\varphi_1}{\varphi_1^o} \right)^2 \end{bmatrix} + 2\lambda_n \zeta \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}'_s \cdot \mathbf{n}'_s - \boldsymbol{\varphi}'_s \cdot \mathbf{n}'_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin \phi^o - \lambda_\theta \sin \phi}{\varphi_1^o} \end{bmatrix} \quad (22)$$

La medida de deformación más conveniente para el tratamiento de problemas con deformaciones moderadas o grandes, dado que el tensor  $\mathbf{C}$  es diagonal y las direcciones principales de deformación son invariantes, es el tensor de deformación de Hencky. Las deformaciones de Hencky para un punto cualquiera sobre la normal  $\mathbf{n}$  de coordenada  $\zeta$  son:

$$E_s = \frac{1}{2} \ln C_{ss} = \frac{1}{2} \ln (\lambda_s^2 + 2\lambda_n \chi_s \zeta) \quad (23a)$$

$$E_\theta = \frac{1}{2} \ln C_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \ln (\lambda_\theta^2 + 2\lambda_n \chi_\theta \zeta) \quad (23b)$$

Estas medidas de deformación pueden asociarse al tensor de tensiones de Kirchhoff  $\mathbf{T}$  definiendo una relación constitutiva válida en régimen de grandes deformaciones. A los fines del planteo de las condiciones de equilibrio resulta conveniente evaluar el segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff  $\mathbf{S}$  a partir de  $\mathbf{T}$

$$S_{ss} = \frac{T_{ss}}{C_{ss}} \quad (24a)$$

$$S_{\theta\theta} = \frac{T_{\theta\theta}}{C_{\theta\theta}} \quad (24b)$$

y finalmente los esfuerzos integrados en el espesor

$$\begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{bmatrix} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} S_{ss} \\ S_{\theta\theta} \\ S_{ss} \lambda_n \zeta \\ S_{\theta\theta} \lambda_n \zeta \end{bmatrix} d\zeta \quad (25)$$

donde  $h$  es el espesor original de la viga/lámina,  $b$  es el ancho original (1 o  $2\pi\varphi_1^o$  para láminas) y  $\lambda_n \zeta$  es la distancia actual (deformada) del punto a la línea/superficie media. La forma débil de las condiciones de equilibrio resulta de la expresión de trabajos virtuales. El trabajo virtual interno puede reducirse a

$$\text{TVI} = \int_{V^o} \frac{1}{2} \delta \mathbf{C} : \mathbf{S} dV^o = \int_{L^o} [\lambda_s \delta \lambda_s, \delta \kappa_s] \begin{bmatrix} N_s \\ M_s \end{bmatrix} ds \quad (26)$$

y

$$\text{TVI} = \int_{V^o} \frac{1}{2} \delta \mathbf{C} : \mathbf{S} dV^o = 2\pi \int_{L^o} [\lambda_s \delta \lambda_s, \lambda_\theta \delta \lambda_\theta, \delta \kappa_s, \delta \kappa_\theta] \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{bmatrix} \varphi_1 ds \quad (27)$$

para vigas y láminas de revolución respectivamente.

### 3. ELEMENTOS DE VIGA/LÁMINA SIN ROTACIONES

El elemento finito que se propone tiene 2 nudos con sólo grados de libertad de traslación (sin rotaciones). La configuración del mismo que definido por las posiciones de sus dos nudos extremos  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ .

#### 3.1. deformación axial

Con la configuración del elemento es posible evaluar la deformación axial en forma sencilla. Indicando con un supraíndice “o” valores referidos a la configuración inicial se tiene el versor tangente

$$\mathbf{t}^o = \frac{\varphi_2^o - \varphi_1^o}{L^o} \quad (28)$$

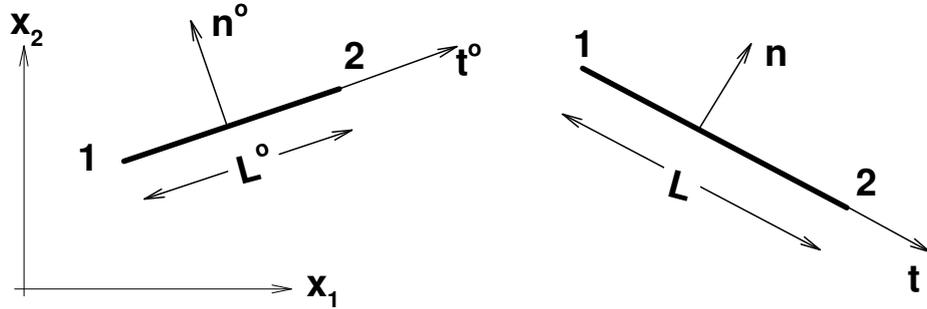


Figura 1: Elemento de dos nudos

con  $L^o$  la longitud inicial

$$L^o = [(\varphi_2^o - \varphi_1^o) \cdot (\varphi_2^o - \varphi_1^o)]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

Realizando las mismas operaciones en la configuración deformada

$$\mathbf{t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L} \quad (30)$$

$$L = [(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)]^{\frac{1}{2}} \quad (31)$$

el estiramiento axial es:

$$\lambda_s = \frac{L}{L^o} \quad (32)$$

con lo cual puede calcularse la deformación de Green-Lagrange como

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2} [\lambda_s^2 - 1] \quad (33)$$

y su variación

$$\delta\varepsilon_s = \lambda_s \delta\lambda_s = \frac{L}{L^o} \frac{\delta L}{L^o} \quad (34a)$$

$$= \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1)}{(L^o)^2} \quad (34b)$$

$$= \frac{\Delta\varphi \cdot (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1)}{(L^o)^2} \quad (34c)$$

Puede definirse una matriz deformación axial-desplazamiento  $\mathbf{B}_a$  en la forma

$$\delta\varepsilon_s = \lambda_s \delta\lambda_s = \frac{1}{(L^o)^2} [-\Delta\varphi^T, \Delta\varphi^T] \begin{bmatrix} \delta\mathbf{u}_1 \\ \delta\mathbf{u}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_a \delta\mathbf{u}^e \quad (35)$$

donde en  $\mathbf{u}^e$  se ha agrupado a los desplazamientos de los nudos extremos del elemento.

### 3.2. cálculo de la curvatura en el plano

Para la evaluación de la curvatura se recurre a la posición de los nudos anterior “*i*” (izquierda) y posterior “*d*” (derecha) de la discretización. En cada nudo del elemento se define una aproximación cuadrática usando los dos nudos del elemento y el nudo vecino correspondiente, con lo cual puede calcularse la curvatura (8) en cada nudo. Estos dos valores permiten establecer una aproximación lineal de las deformaciones

$$\bar{\kappa}_s(s) = \left(1 - \frac{s}{L^o}\right) \kappa_s^{(1)} + \frac{s}{L^o} \kappa_s^{(2)} \quad (36)$$

$$= -N^1 \varphi_{,ss}^{(1)} \cdot \mathbf{n} - N^2 \varphi_{,ss}^{(2)} \cdot \mathbf{n} \quad (37)$$

donde con un supraíndice entre paréntesis se indica punto de evaluación y  $N^I$  son las funciones de forma lineales definidas en el intervalo  $[0, 1]$ .

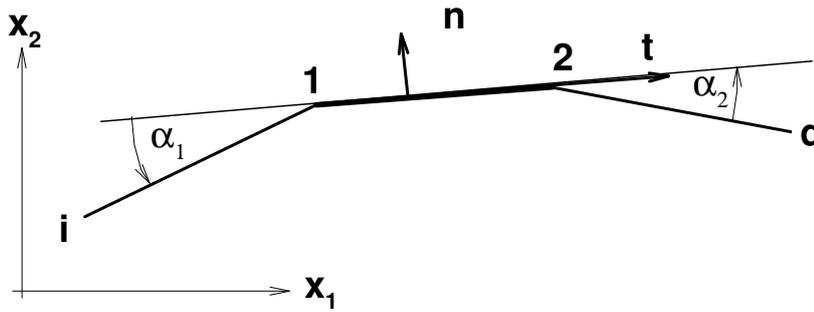


Figura 2: Parcela de elementos para el cálculo de la curvatura

Para calcular las derivadas segundas en cada extremo del elemento  $\varphi_{,ss}^{(1)}$  y  $\varphi_{,ss}^{(2)}$  existen distintas variantes. Aquí se propone inicialmente la siguiente, derivada de una aproximación en diferencias finitas estándar:

$$\varphi_{,ss}^{(1)} = \frac{2}{L_i^o + L^o} \left[ \left( \frac{\varphi_i - \varphi_1}{L_i^o} \right) + \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L^o} \right) \right] \quad (38a)$$

$$\varphi_{,ss}^{(2)} = \frac{2}{L^o + L_d^o} \left[ \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{L^o} \right) + \left( \frac{\varphi_d - \varphi_2}{L_d^o} \right) \right] \quad (38b)$$

Reemplazando (38) en (8), usando como normal en el nudo al promedio de las normales en

cada elemento adyacente, se tiene la expresión de las curvaturas en los extremos del elemento:

$$\begin{aligned}\kappa_s^{(1)} &= -\boldsymbol{\varphi}'_{ss} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \frac{2}{L_i^o + L^o} \left[ \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_i}{L_i^o} \right) + \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{L^o} \right) \right] \cdot \left( \frac{\mathbf{n}_i + \mathbf{n}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{L_i^o + L^o} \left[ \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_i}{L_i^o} \right) \cdot \mathbf{n} + \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{L^o} \right) \cdot \mathbf{n}_i \right] = \frac{\lambda_{si} + \lambda_s}{L_i^o + L^o} \sin \alpha_1\end{aligned}\quad (39a)$$

$$\begin{aligned}\kappa_s^{(2)} &= -\boldsymbol{\varphi}'_{ss} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \frac{2}{L^o + L_d^o} \left[ \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L^o} \right) + \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_d}{L_d^o} \right) \right] \cdot \left( \frac{\mathbf{n} + \mathbf{n}_d}{2} \right) \\ &= \frac{1}{L^o + L_d^o} \left[ \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{L^o} \right) \cdot \mathbf{n}_d + \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_d}{L_d^o} \right) \cdot \mathbf{n} \right] = \frac{\lambda_s + \lambda_{sd}}{L^o + L_d^o} \sin \alpha_2\end{aligned}\quad (39b)$$

donde  $\alpha_1$  es el ángulo entre el versor tangente al elemento ( $\mathbf{t}$ ) y el versor tangente al elemento izquierdo ( $\mathbf{t}_i$ ) (medido de  $\mathbf{t}$  a  $\mathbf{t}_i$  en sentido antihorario) y  $\alpha_2$  es el ángulo entre el versor tangente al elemento ( $\mathbf{t}$ ) y el versor tangente al elemento derecho ( $\mathbf{t}_d$ ) (medido de  $\mathbf{t}_d$  a  $\mathbf{t}$  en sentido antihorario). El ángulo  $\alpha_1$  (similarmente  $\alpha_2$ ) es también la diferencia entre las rotaciones del elemento a la izquierda y del elemento de referencia  $\alpha_1 = \beta_i - \beta$  ( $\alpha_2 = \beta - \beta_d$ )

A expresiones similares se llega usando

$$\kappa_s = \boldsymbol{\varphi}'_s \cdot \mathbf{n}_s = \lambda_s \mathbf{t} \cdot (-\mathbf{t} \alpha_s) = -\lambda_s \alpha_s \quad (40)$$

que particularizado para los nudos izquierdo y derecho puede aproximarse por

$$\kappa_s^{(1)} = \frac{\lambda_{si} + \lambda_s}{L_i^o + L^o} \alpha_1 \quad (41a)$$

$$\kappa_s^{(2)} = \frac{\lambda_s + \lambda_{sd}}{L^o + L_d^o} \alpha_2 \quad (41b)$$

Las expresiones anteriores implican que en cada nudo existe una única curvatura independientemente del elemento desde la cual se la calcule. Esto representa un inconveniente cuando existen cambios en las propiedades de las vigas (materiales o seccionales). Por ello en cada nudo unión de dos elementos ( $i$  y  $j$ ) redefinamos la curvatura en el extremo de cada elemento en forma independiente

$$\kappa_i^{(2)} = \frac{\lambda_{si}}{L_i^o} \gamma_i \quad (42a)$$

$$\kappa_j^{(1)} = \frac{\lambda_{sj}}{L_j^o} \gamma_j \quad (42b)$$

donde  $\gamma$  es una medida de la rotación relativa entre cada barra y el nudo. Para determinar los valores de  $\gamma$  supongamos que los elementos concurrentes tienen diferentes propiedades seccionales y son en general de diferente longitud. Consideraciones elementales de equilibrio conducen a que

$$M_i^{(2)} = (EI)_i \kappa_i^{(2)} = (EI)_j \kappa_j^{(1)} = M_j^{(1)} \quad (43)$$

Si reemplazamos en la condición de equilibrio (43), para pequeños extiramientos se tiene

$$\left(\frac{EI}{L^o}\right)_i \gamma_i = \left(\frac{EI}{L^o}\right)_j \gamma_j \quad (44)$$

$$R_i \gamma_i = R_j \gamma_j \quad (45)$$

Definamos ahora a cada  $\gamma$  como el duplo de la diferencia entre el ángulo rotado por la barra respectiva  $\beta$  y el ángulo rotado por el nudo  $\bar{\beta}$  (indefinido por ahora)

$$\gamma_i = 2(\beta_i - \bar{\beta}) \quad (46)$$

$$\gamma_j = 2(\bar{\beta} - \beta_j) \quad (47)$$

sumando y restando miembro a miembro

$$\gamma_i + \gamma_j = 2(\beta_i - \beta_j) = 2\alpha_1 \quad (48)$$

$$\gamma_j - \gamma_i = 4\bar{\beta} - 2(\beta_i + \beta_j) \quad (49)$$

De (48) y la relación de equilibrio (45) podemos escribir

$$\gamma_i = \frac{2R_j}{R_i + R_j} (\beta_i - \beta_j) = c_i \alpha_1 \quad (50a)$$

$$\gamma_j = \frac{2R_i}{R_i + R_j} (\beta_i - \beta_j) = c_j \alpha_1 \quad (50b)$$

llevando a (49) permite determinar e interpretar la rotación del nudo

$$\bar{\beta} = \frac{1}{R_i + R_j} (R_i \beta_i + R_j \beta_j)$$

como el promedio del giro de cada barra concurrente ponderado por la rigidez correspondiente ( $R_i$ ).

Con estas expresiones es posible valorar (36) en cualquier punto del elemento.

La variación de la curvatura en un punto cualquiera se computa como

$$\delta \bar{\kappa}_s = [N^1 \delta \kappa_s^{(1)} + N^2 \delta \kappa_s^{(2)}] \quad (51)$$

la variación de la curvatura en el nudo 1 (expresión 42.a) resulta

$$\delta \kappa_s^{(1)} = \frac{1}{L^o} \left[ \gamma_1 \frac{\delta \varphi_2 - \delta \varphi_1}{L^o} \cdot \mathbf{t} + \lambda_s c_i \left( \frac{\delta \varphi_1 - \delta \varphi_i}{L_i} \cdot \mathbf{n}_i + \frac{\delta \varphi_1 - \delta \varphi_2}{L} \cdot \mathbf{n} \right) \right] \quad (52)$$

$$= \mathbf{B}_b^{(1)} \delta \Phi \quad (53)$$

donde  $\delta\alpha_1$  se obtiene observando que

$$\cos \alpha_1 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i \quad (54a)$$

$$\sin \alpha_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_i = -\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}_i \quad (54b)$$

tomando variación de la primera

$$\begin{aligned} -\sin \alpha_1 \delta\alpha_1 &= \delta\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}_i + \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{t}_i \\ &= \left[ \left( \frac{\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1}{L} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_i + \left( \frac{\delta\varphi_1 - \delta\varphi_i}{L_i} \cdot \mathbf{n}_i \right) \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{t} \right] \\ &= -\sin \alpha_1 \left( \frac{\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2}{L} \cdot \mathbf{n} + \frac{\delta\varphi_1 - \delta\varphi_i}{L_i} \cdot \mathbf{n}_i \right) \end{aligned} \quad (55)$$

y  $\delta\mathbf{t}$  resulta de observar que  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$  son una base ortonormal

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} &= 1 & \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ 2\mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{t} &= 0 & \delta\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{n} &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

por lo cual  $\delta\mathbf{t}$  sólo tiene componente sobre la dirección  $\mathbf{n}$ :

$$\delta\mathbf{t} = \left( \mathbf{n} \cdot \frac{\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1}{L} \right) \mathbf{n} \quad (57)$$

y finalmente

$$\delta\alpha_1 = \frac{\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2}{L} \cdot \mathbf{n} + \frac{\delta\varphi_1 - \delta\varphi_i}{L_i} \cdot \mathbf{n}_i \quad (58)$$

Similarmente para el nudo 2 donde el ángulo  $\alpha_2$  se define desde  $\mathbf{t}_d$  a  $\mathbf{t}$  de tal forma que:

$$\cos \alpha_2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}_i \quad (59a)$$

$$\sin \alpha_2 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_i \quad (59b)$$

con lo cual la variación de (42.b) es

$$\delta\kappa_s^{(2)} = \frac{1}{L^o} \left[ \gamma_2 \frac{\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1}{L^o} \cdot \mathbf{t} + \lambda_s c_d \left( \frac{\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1}{L} \cdot \mathbf{n} + \frac{\delta\varphi_2 - \delta\varphi_d}{L_d} \cdot \mathbf{n}_d \right) \right] \quad (60)$$

$$= \mathbf{B}_b^{(2)} \delta\Phi \quad (61)$$

$$\delta\bar{\kappa}_s = N^1 \delta\kappa_s^{(1)} + N^2 \delta\kappa_s^{(2)} = \left[ N^1 \mathbf{B}_b^{(1)} + N^2 \mathbf{B}_b^{(2)} \right] \delta\Phi \quad (62)$$

$$= \mathbf{B}_b(s) \delta\mathbf{u}^p \quad (63)$$

En  $\mathbf{u}^p$  se ha agrupado a los desplazamientos de los nudos que forman la parcela de elementos necesaria para la evaluación de la curvatura. Notar que la matriz  $\mathbf{B}_b$  varía linealmente en la coordenada  $s$  por lo cual su utilización para la evaluación de fuerzas residuales o de la matriz de rigidez tangente, requiere de dos puntos de integración para una integración completa.

### 3.3. deformaciones circunferenciales

El cálculo de las deformaciones circunferenciales necesarias para el tratamiento de láminas de revolución no ofrece dificultades. Si denotamos con el primer subíndice en  $\varphi$  y  $u$  al nudo y con el segundo a la componente en el sistema cartesiano:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2} (\lambda_\theta^2 - 1) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(N^1\varphi_{11} + N^2\varphi_{21})^2}{(N^1\varphi_{11}^o + N^2\varphi_{21}^o)^2} - 1 \right\} \quad (64)$$

$$\chi_\theta = \frac{-\lambda_\theta \sin \phi}{N^1\varphi_{11}^o + N^2\varphi_{21}^o} - \kappa_\theta^o \quad (65)$$

La variación de estas deformaciones, necesarias para el planteo de la forma débil de equilibrio, es:

$$\delta\varepsilon_\theta = \lambda_\theta \delta\lambda_\theta = \lambda_\theta \frac{N^1\delta u_{11} + N^2\delta u_{21}}{N^1\varphi_{11}^o + N^2\varphi_{21}^o} = \frac{\lambda_\theta}{N^1\varphi_{11}^o + N^2\varphi_{21}^o} [N^1, 0, N^2, 0] \begin{bmatrix} \delta u_{11} \\ \delta u_{12} \\ \delta u_{21} \\ \delta u_{22} \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \delta\kappa_\theta &= \frac{(N^1\delta u_{11} + N^2\delta u_{21}) (-\sin \phi) - (N^1\varphi_{11} + N^2\varphi_{21}) \cos \phi (\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{t})}{(N^1\varphi_{11}^o + N^2\varphi_{21}^o)^2} \\ &= - \frac{\sin \phi (N^1\delta u_{11} + N^2\delta u_{21}) + (N^1\varphi_{11} + N^2\varphi_{21}) \cos \phi \left( \mathbf{n} \cdot \frac{\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1}{L} \right)}{(N^1\varphi_{11}^o + N^2\varphi_{21}^o)^2} \end{aligned} \quad (67)$$

### 3.4. condiciones de contorno

Las condiciones de contorno de desplazamiento del eje de la viga no presentan problemas pues son los grados de libertad del elemento. Respecto a las condiciones de contorno que involucran la rotación de la normal se tiene que en tales punto el elemento adyacente no existe. Deben considerarse dos casos

- **Empotramiento o condición de simetría:** en este caso se impide la rotación, lo cual significa que la tangente a la lámina es constante durante el proceso  $\mathbf{t}^o$  e igual a la normal al plano de simetría o empotramiento. El cambio de ángulo  $2\gamma$  (en este caso en el que falta el punto simétrico) puede expresarse como dos veces el cambio de ángulo entre  $\mathbf{t}^o$  y el elemento. Si asociamos esta restricción con el primer nudo del elemento esto permite evaluar la curvatura en el primer nudo como

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \text{ángulo entre } \mathbf{t} \text{ y } \mathbf{t}^o \\ \kappa^{(1)} &= \frac{\lambda_s}{L^o} 2\gamma_1 \end{aligned}$$

y notando que  $\mathbf{t}^o$  es invariante, la variación resulta

$$\delta\kappa^{(1)} = \frac{1}{(L^o)^2} [2\gamma_1 \mathbf{t} \cdot (\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1) + 2\mathbf{n} \cdot (\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2)]$$

- **Borde libre o simplemente apoyado:** este caso es una condición de contorno natural. La aproximación más sencilla es suponer que en dicho punto se anula la curvatura.

#### 4. VIGAS CURVAS O CON QUIEBRES

En los desarrollos anteriores se ha trabajado con un elemento de viga asociado a una viga inicialmente recta, en la cual el ángulo original entre las tangentes a los elementos es 0. Esto proviene de la forma en que se han evaluado las curvaturas en los extremos del elemento.

Supongamos que en la configuración inicial exista un cambio de ángulo entre dos elementos concurrentes. En el elemento de análisis lo asociemos por el momento al primer nudo. La calificación de que el punto corresponda a una viga inicialmente curva o un quiebre no puede hacerse directamente a partir de los vectores tangente  $\mathbf{t}$  (o las normales  $\mathbf{n}$ ) correspondientes a cada elemento sino que debe explicitarse, de todas maneras el tratamiento no difiere a los fines prácticos debido a que se desprecian los efectos de la curvatura original.

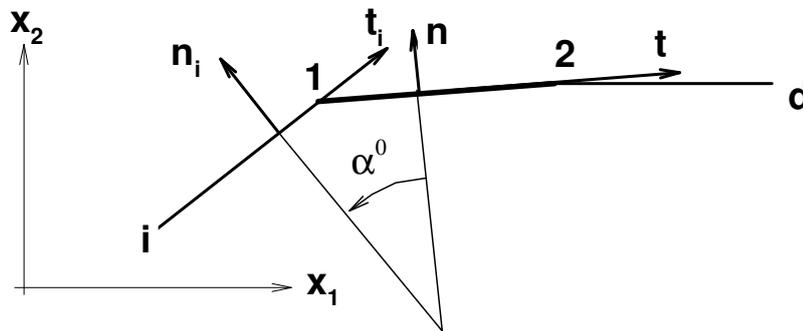


Figura 3: Quiebre entre elementos

En el ejemplo de la figura existe originalmente entre los gradientes en el primer nudo un ángulo  $\alpha^o$  definido por

$$\cos \alpha_1^o = \mathbf{t}^o \cdot \mathbf{t}_i^o = \mathbf{n}^o \cdot \mathbf{n}_i^o \quad (68a)$$

$$\sin \alpha_1^o = -\mathbf{t}^o \cdot \mathbf{n}_i^o = \mathbf{n}^o \cdot \mathbf{t}_i^o \quad (68b)$$

En tanto que en la configuración deformada los vectores tangentes  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t}_i$  ya no formarán un ángulo  $\alpha^o$ , sino  $\alpha$ .

$$\cos \alpha_1 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}_i \quad (69a)$$

$$\sin \alpha_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}_i \quad (69b)$$

que representa un cambio respecto a la configuración original:

$$\Delta\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_1^o \quad (70)$$

Esto permite evaluar los cambios de curvatura en cada uno de los elementos adyacentes al quiebre a partir de las expresiones (41) utilizando el cambio de ángulo  $\Delta\alpha$  en vez del ángulo mismo  $\alpha$  o alternativamente evaluar (50) y con esta utilizar (42)

## 5. INTERSECCIÓN DE MÁS DE DOS VIGAS (RAMIFICACIÓN)

El caso anterior puede verse como un caso particular (el más sencillo) de que en un punto coincidan varias vigas.

En un caso general habrá  $n$  elementos concurrentes al nudo. Para simplificar la notación supongamos que el nudo intersección sea el primer nudo (0) de cada una de las vigas que concurren al nudo y que el segundo nudo de cada viga “ $i$ ” sea el nudo “ $i$ ”. En la configuración original cada barra  $i$  queda definida por un versor tangente

$$\mathbf{t}_i^o = \frac{\varphi_i^o - \varphi_0^o}{\|\varphi_i^o - \varphi_0^o\|} = \frac{\varphi_i^o - \varphi_0^o}{L_i^o} \quad (71)$$

que forma con el eje  $\mathbf{e}_1$  del sistema cartesiano un ángulo  $\alpha_i^o$ .

En la configuración deformada la dirección del elemento  $i$  queda definida por

$$\mathbf{t}_i = \frac{\varphi_i - \varphi_0}{\|\varphi_i - \varphi_0\|} = \frac{\varphi_i - \varphi_0}{L_i} \quad (72)$$

que forma con el primer eje cartesiano un ángulo  $\alpha_i$  y que ha rotado respecto a la configuración original un ángulo

$$\beta_i = \alpha_i - \alpha_i^o \quad (73)$$

Se define ahora la rotación del nudo como el promedio

$$\bar{\beta} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n R_j} \sum_{i=1}^n R_i \beta_i \quad (74)$$

denominando por  $\gamma_i$  al doble de la diferencia entre la rotación del nudo y la rotación del elemento

$$\gamma_i = 2(\bar{\beta} - \beta_i) \quad (75)$$

con lo cual es posible escribir la curvatura en el primer nudo de cada barra como

$$\kappa_i^{(1)} = \frac{\lambda_{si}}{L_i^o} \gamma_i \quad (76)$$

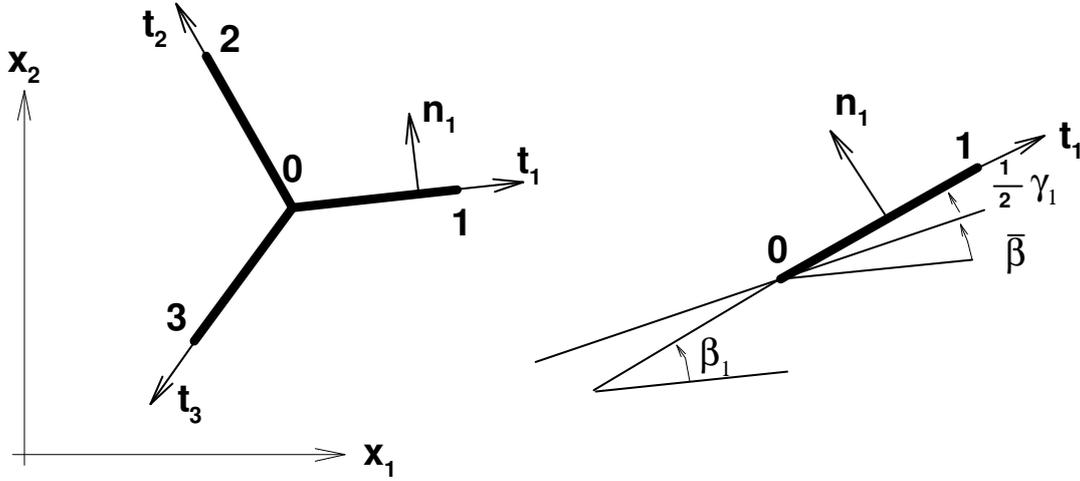


Figura 4: Ramificación de vigas

La variación de la curvatura en el primer nudo de cada barra resulta

$$\begin{aligned}\delta\kappa_i^{(1)} &= \frac{1}{(L_i^o)^2} \gamma_i \mathbf{t}_i \cdot (\delta\varphi_i - \delta\varphi_0) + \frac{\lambda_{si}}{L_i^o} \delta\gamma_i \\ &= \frac{1}{(L_i^o)^2} \gamma_i \mathbf{t}_i \cdot (\delta\varphi_i - \delta\varphi_0) + 2 \frac{\lambda_{si}}{L_i^o} (\delta\bar{\beta} - \delta\beta_i)\end{aligned}\quad (77)$$

donde para cada barra concurrente al nudo

$$\delta\beta_j = \mathbf{n}_j \cdot \delta\mathbf{t}_j = \frac{1}{L_j} \mathbf{n}_j \cdot (\delta\varphi_j - \delta\varphi_0)\quad (78)$$

con lo cual

$$\delta\bar{\beta} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n R_k} \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{L_j} \mathbf{n}_j \cdot (\delta\varphi_j - \delta\varphi_0)\quad (79)$$

finalmente

$$\begin{aligned}\delta\kappa_i^{(1)} &= \frac{1}{(L_i^o)^2} \gamma_i \mathbf{t}_i \cdot (\delta\varphi_i - \delta\varphi_0) \\ &+ 2 \frac{\lambda_{si}}{L_i^o} \left[ -\frac{1}{L_i} \mathbf{n}_i \cdot (\delta\varphi_i - \delta\varphi_0) + \frac{1}{\sum_{k=1}^n R_k} \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{L_j} \mathbf{n}_j \cdot (\delta\varphi_j - \delta\varphi_0) \right]\end{aligned}\quad (80)$$

Esto permite evaluar las variaciones de las curvaturas en los distintos elementos. Es necesario notar que dicha variación depende de los nudos de todos los elementos que convergen al nudo y por lo tanto también la matriz de rigidez de cada elemento concurrente.

## 6. EJEMPLOS

En esta sección se evalúa el comportamiento del elemento descrito, al que se denotará por “B2”(2-node Beam). Inicialmente se presentan ejemplos en régimen lineal elástico, luego en régimen no-lineal elástico y finalmente ejemplos que involucran grandes deformaciones elasto-plásticas.

### 6.1. ejemplos lineales

Inicialmente se consideran 3 ejemplos en régimen lineal a los fines de estudiar la convergencia del elemento y comparar con soluciones exactas y con un elemento deformable al corte transversal de dos nudos, al que denominaremos con “Sh” (Shear deformable element<sup>17</sup>).

#### 6.1.1. viga simplemente apoyada bajo carga uniforme

Como primer ejemplo se considera una viga simplemente apoyada en ambos extremos y sometida a una carga distribuida uniforme en toda su longitud. Debido a la simetría se considera sólo la mitad de la geometría lo que permite considerar ambas condiciones de borde estudiadas antes. En la Figura 5.a se ve la geometría completa, de la cual se ha modelado la mitad izquierda.

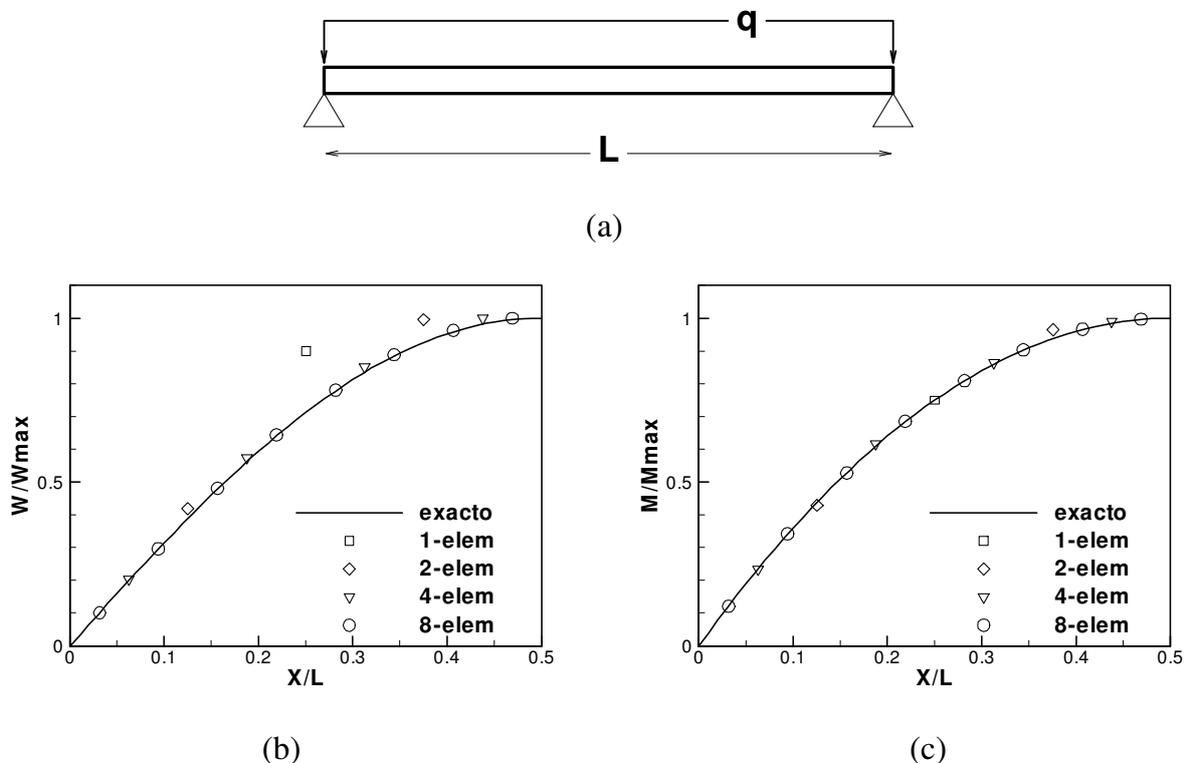


Figura 5: Viga simplemente apoyada bajo carga uniforme. (a) geometría; (b) desplazamiento; (c) momento flector

Se ha realizado un análisis de convergencia en función de la discretización, para ello se han considerado diferentes mallas, duplicando la cantidad de elementos entre una y otra. En la Figura 5.c se ha graficado el desplazamiento normalizado (respecto al máximo exacto) en los centros de cada elemento, en tanto que en la Figura 5.d se ha graficado el momento flector normalizado en los mismos puntos.

Puede verse que al refinar la malla se converge a la solución correcta y que con cuatro elementos se obtienen resultados suficientemente buenos desde el punto de vista ingenieril. Por otro lado la convergencia es más rápida en los esfuerzos que en los desplazamientos debido a que el elemento es no conforme.

### 6.1.2. marco de dos tramos a 90 grados

En este segundo ejemplo se ha considerado un marco donde aparece un marcado cambio de ángulo entre dos elementos adyacentes (ver Figura 6.a). El tramo horizontal tiene un mayor momento de inercia que el tramo vertical. La estructura está sometida a la carga puntual indicada.

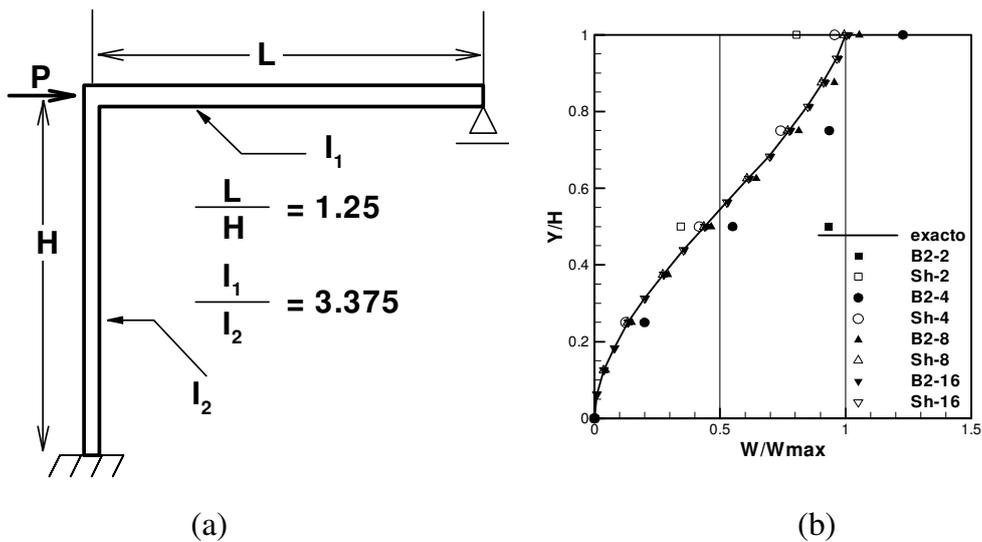


Figura 6: Marco sencillo bajo carga puntual. (a) geometría (b) desplazamientos horizontales en el tramo vertical

En la Figura 6.b se ha graficado el desplazamiento horizontal sobre el tramo vertical para las distintas mallas utilizadas. Como referencia se han graficado además los resultados obtenidos con el elemento deformable al corte. En este caso puede verse que se necesitan al menos 8 elementos para obtener resultados aceptables desde el punto de vista ingenieril, en tanto que para el elemento deformable al corte alcanzaría con 4 elementos por tramo.

### 6.1.3. cáscara de revolución ramificada

En este tercer ejemplo se ha considerado el caso de una lámina ramificada a los fines de observar el comportamiento cuando en un punto concurren más de dos elementos. La Figura 7.a muestra la geometría del problema. Los espesores son diferentes en las tres partes que conforman la lámina. El material es isótropo con  $E = 10^7$  y  $\nu = 0,3$ . Tanto el domo como el cilindro inferior están sometidos a presión interna  $P = 1000$ , la cual es equilibrada por partes iguales en cada extremo del cilindro.

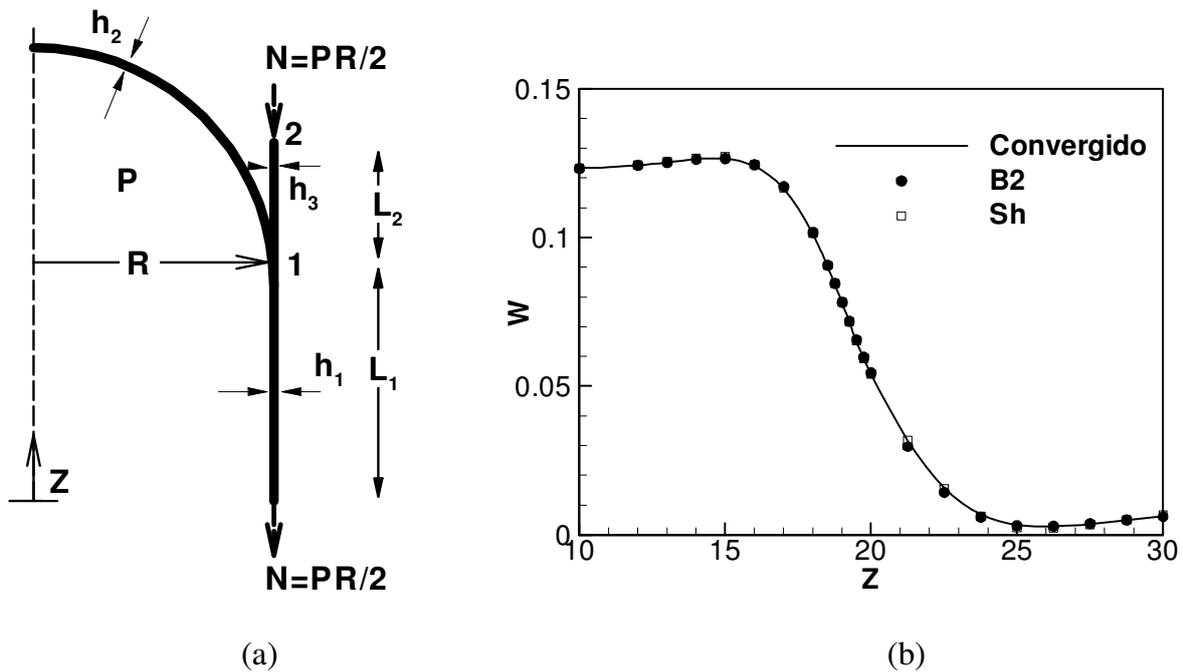


Figura 7: Cáscara ramificada de Krauss (a) geometría  $R = 20$ ,  $L_1 = 20$ ,  $L_2 = 10$ ,  $h_1 = 0,3$ ,  $h_2 = 0,4$ , y  $h_3 = 0,5$  (b) desplazamiento normal a la pared del cilindro

Para la discretización se utilizaron 50 elementos (20 sobre el cilindro inferior, 20 sobre el domo y 10 en el cilindro superior). En la Figura 7.b se ha graficado el desplazamiento normal al cilindro. Se compara con una solución por elementos finitos convergida<sup>18</sup> (es también posible obtener una solución analítica) y se han incluido resultados obtenidos con el elemento deformable por corte. Para la malla utilizado los resultados concuerdan en forma excelente.

### 6.2. ejemplos con no linealidad geométrica

En esta sección se consideran ejemplos con grandes desplazamientos y rotaciones. Las comparaciones se hacen en este caso con el elemento deformable por corte. Se incluyen dos de los ejemplos de la sección anterior, que corresponden a estructuras con ángulos y ramificaciones, pero ahora en régimen no-lineal. Se incluye también un benchmark para este tipo de comportamiento.

### 6.2.1. marco de dos tramos a 90 grados

Como primer ejemplo se ha considerado el mismo marco de la sección anterior. Se ha utilizado la malla con 16 elementos por tramo. En la Figura 8. se muestran los perfiles de desplazamiento del tramo vertical para distintos valores de la carga  $P$ . Para la malla indicada los resultados concuerdan con los obtenidos con el elemento deformable por corte.

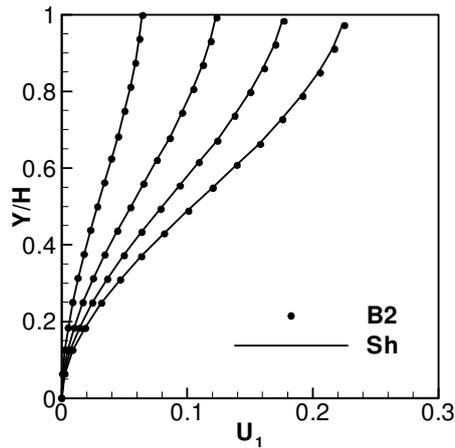


Figura 8: Marco sencillo bajo carga puntual. Perfil de desplazamientos en régimen no lineal

### 6.2.2. cáscara ramificada de krauss

Como segundo ejemplo se ha considerado el caso de la lámina ramificada a los fines de observar la convergencia en este caso cuando en un punto concurren más de dos elementos. La Figura 9 muestra la desplazamientos en la dirección  $X$  de los puntos indicados como 1 y 2 en la Figura 7.a en términos de la presión interna.

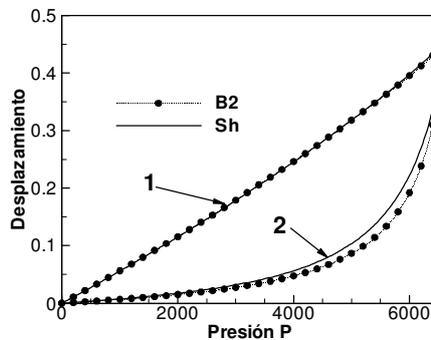


Figura 9: Cáscara ramificada de Krauss. Desplazamientos radiales de los puntos 1 y 2 en función de la carga.

Se ha considerado la misma discretización utilizada antes (50 elementos). El desplazamiento horizontal del punto 1 es prácticamente lineal con la presión y los resultados coinciden. Los resultados en el punto 2 (extremo del cilindro vertical) difieren un poco probablemente debido a la mayor flexibilidad en ese tramo donde el espesor es máximo.

### 6.2.3. voladizo en forma de z

Este ejemplo ha sido tomado de una revisión de problemas benchmark para comportamiento no lineal geométrico.<sup>19</sup> Está orientado a evaluar comportamiento con grandes desplazamientos y grandes rotaciones, acciones membranales y flexionales, rigidización por tracción y cambio en el signo del momento. Se trata de un voladizo en forma de Z sometido a una carga conservativa en su extremo libre. La Figura 10.a y b muestran la configuración original y las configuraciones deformadas para distintos valores de la carga.

Se han utilizado dos mallas de 6 y 12 elementos lineales por tramo. En la Figura 10.c se grafica el desplazamiento del punto de aplicación de la carga versus la carga y en la Figura 10.d se grafica el momento flector en el punto A (ver Figura 10.a) versus la carga. Los resultados se comparan en este caso con valores “objetivo” obtenidos con el programa ABAQUS.<sup>20</sup> El momento flector graficado corresponde al promedio de los momentos flectores calculado en los puntos de Gauss adjacentes al punto A. Los resultados muestran una muy buena concordancia con los valores esperados, incluso para la malla más gruesa.

## 6.3. ejemplos con grandes deformaciones elasto-plásticas

A continuación se presentan dos ejemplos que incluyen grandes deformaciones elasto-plásticas. En este caso las geometrías originales son suaves. Estas simulaciones se realizan dentro del programa STAMPAK<sup>21</sup> con integración explícita de las ecuaciones de movimiento especialmente orientado a la simulación de procesos de embutición de láminas.

### 6.3.1. estiramiento con un punzón semiesférico

Consideramos primero un benchmark bien conocido.<sup>22</sup> La Figura 11.a muestra la geometría original del estiramiento de una placa circular con un punzón semiesférico. El material es un acero dulce con  $E = 6,9 \times 10^{10}$ ,  $\nu = 0,3$  y resistencia a tracción  $\sigma_y = 5,89 \times 10^8(0,0001 + e^p)^{0,216}$ .

Se ha utilizado una interfaz sin fricción con las herramientas y para modelar el contacto se ha recurrido a la técnica de penalización. Se han analizado mallas de 28 y 56 elementos para discretizar la lámina, con resultados prácticamente indistinguibles unos de otros. En la Figura 11.b se grafica la resistencia al avance del punzón versus el avance del mismo. Se ha comparado con resultados obtenidos con elementos de sólidos 2-D, TR es un triángulo no conforme<sup>23</sup> y QUAD es un cuadrilátero de presión constante estandar.<sup>24</sup> Los resultados muestran una muy buena concordancia.

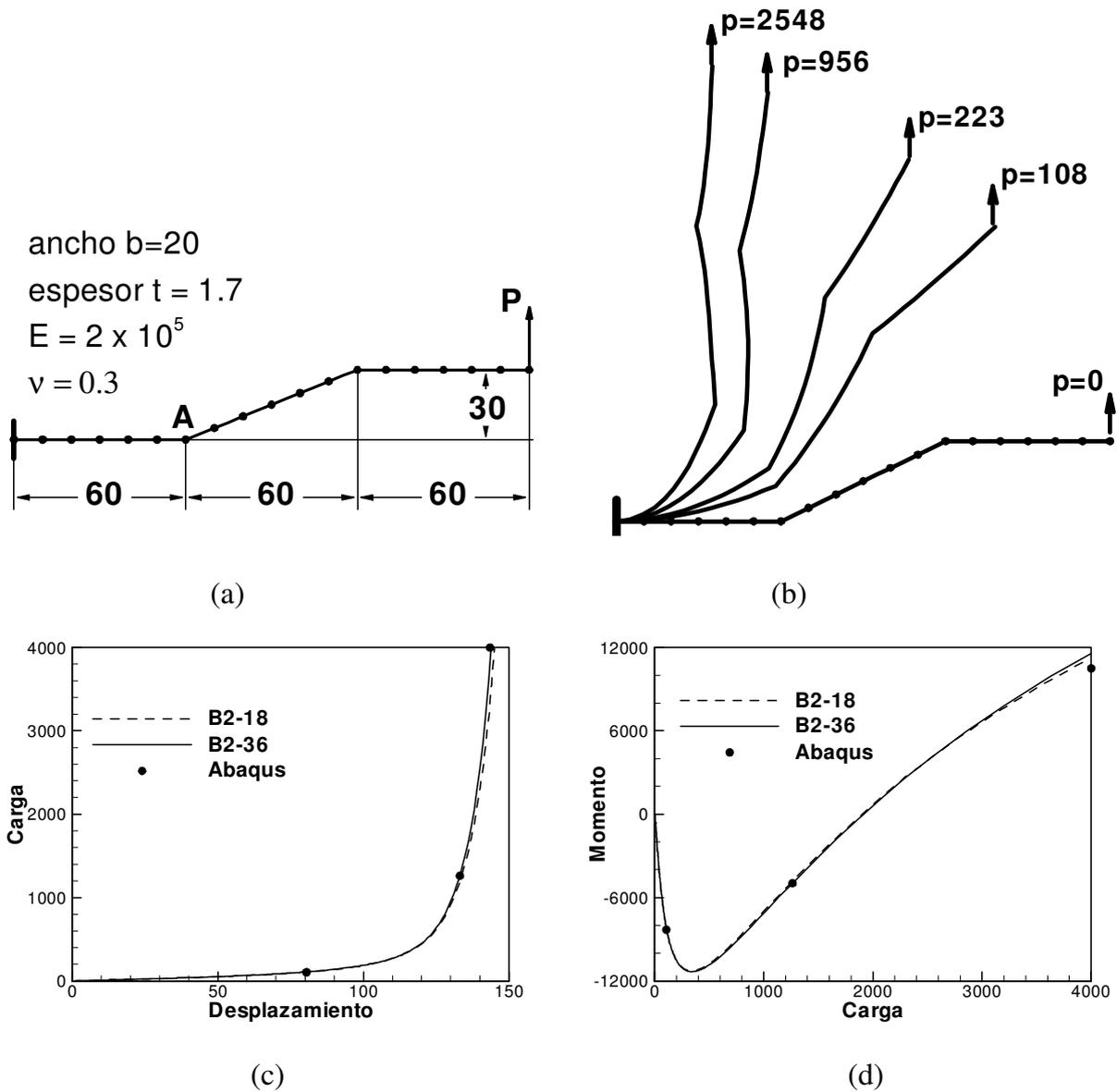


Figura 10: Voladizo en forma de Z. (a) configuración original; (b) configuraciones deformadas para distintos valores de la carga P. (c) carga vs. desplazamiento (b) momento flector en A vs. carga.

En la Figuras 11.c y 11.d se muestran perfiles de espesor relativo y deformación plástica efectiva para distintos avances del punzón. Estos valores comparan en general muy bien con los resultados obtenidos con los elementos de sólido (no graficados).

### 6.3.2. embutición profunda y recuperación elástica de una cinta plana

El último ejemplo es un benchmark propuesto en NUMISHEET'93.<sup>25</sup> El propósito de este ejemplo es evaluar el proceso de formado y los efectos de recuperación elástica luego de

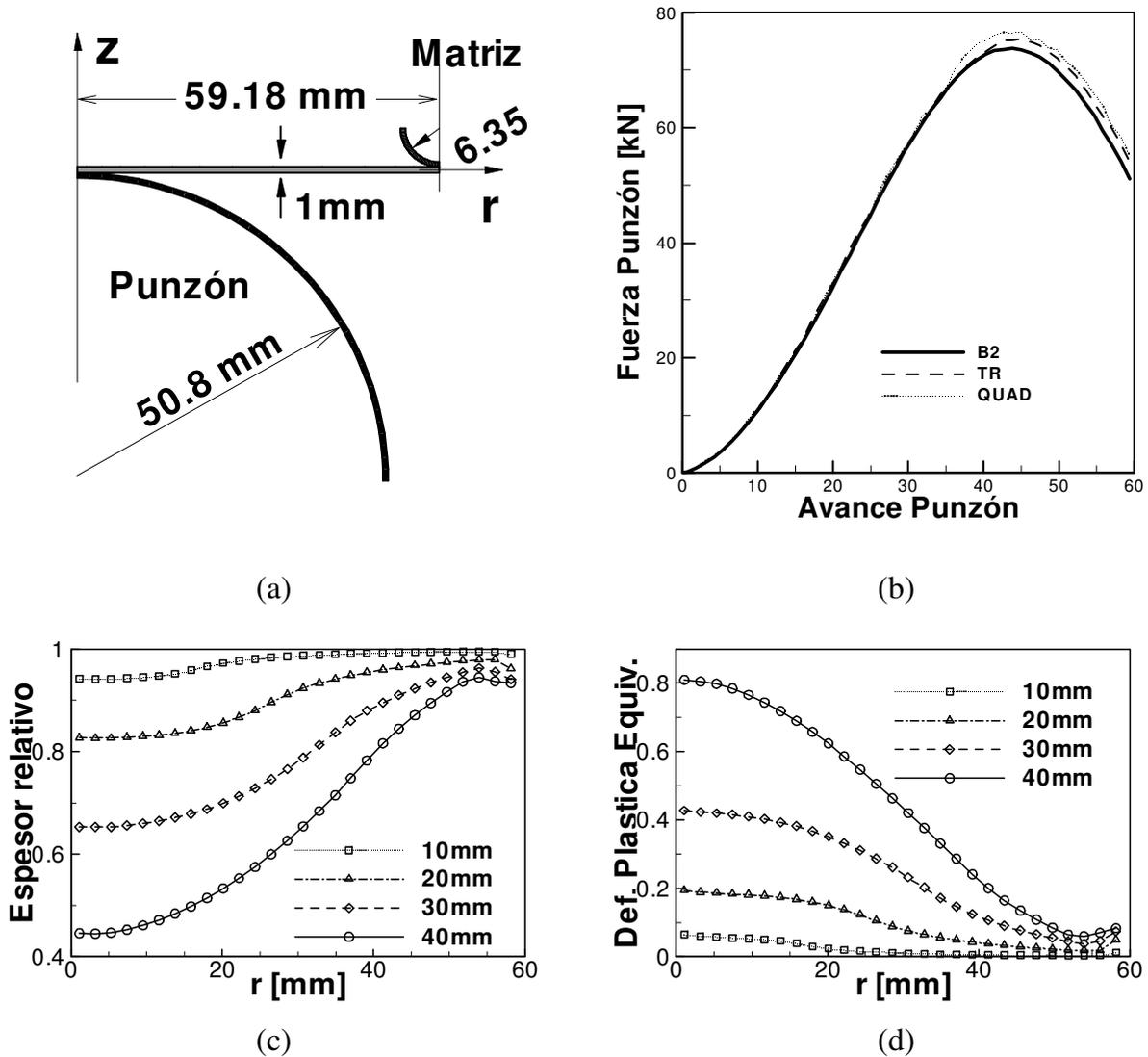


Figura 11: Simulación del estiramiento de una placa circular. (a) Geometría; (b) Fuerza sobre el punzón versus avance del punzón; (c) perfiles de espesor relativo en función del radio para diferentes avances del punzón; (d) perfiles de deformación plástica efectiva en función del radio para diferentes avances del punzón.

quitadas las herramientas. La Figura 12.a muestra la geometría del problema. Los parámetros geométricos medidos, con el objetivo de comparar con resultados experimentales se indican en la Figura 12.b. Estos son los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , y el radio de curvatura  $\rho$  de la pared lateral, obtenido del círculo que pasa por los puntos A, B y C. En la simulación, debido a la fricción con las herramientas se ha supuesto a la lámina trabajando en un estado de deformación plana, aunque durante la recuperación elástica no hay restricción a la contracción transversal. Se han considerado dos materiales, aluminio y acero dulce, cuyos parámetros materiales pueden verse en los anales del congreso. El material se supone elasto-plástico con comportamiento elásti-

co lineal e isótropo y comportamiento plástico gobernado por la función ortótropa de Hill<sup>26</sup> y endurecimiento isótropo exponencial. En las simulaciones se ha utilizado la menor fuerza del pisador (2.45 kN).

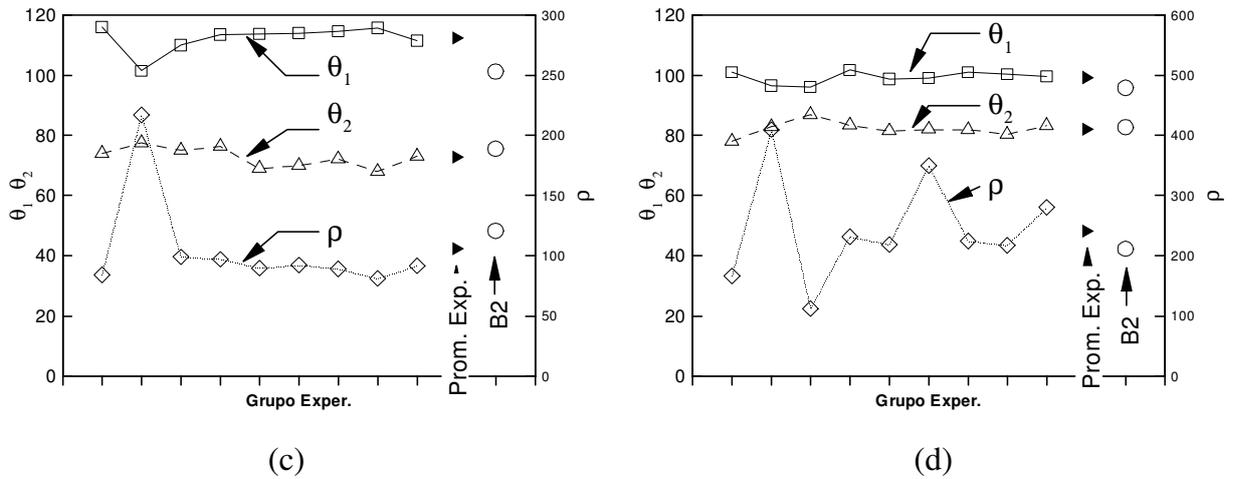
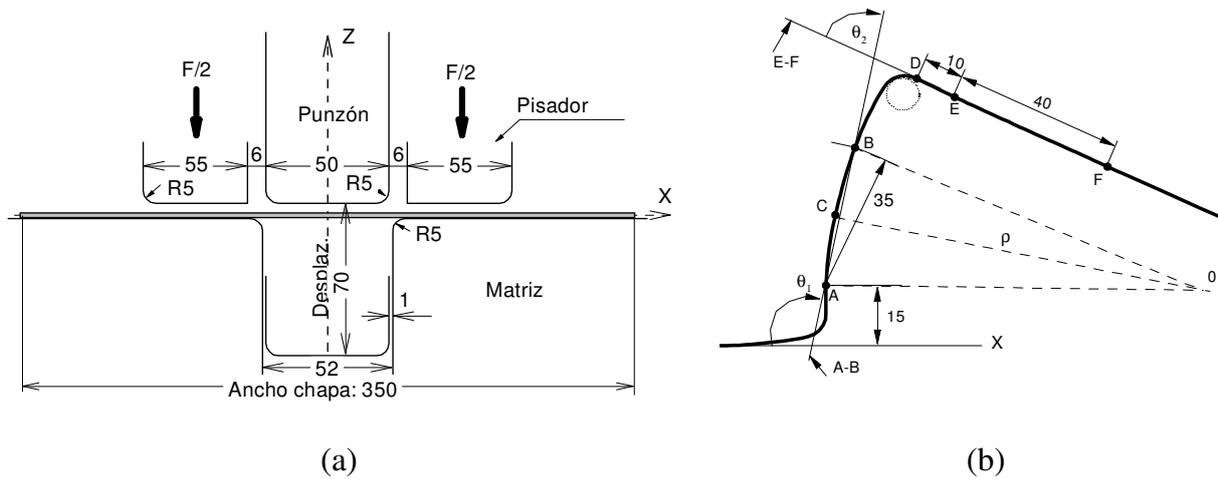


Figura 12: Embutición profunda de una cinta plana. Comparación con resultados experimentales. (a) Geometría (b) Parámetros geométricos para medir la recuperación elástica. (c) Aluminio (d) Acero dulce.

La deformada de la Figura 12.b corresponde al material aluminio. En la Figura 12.c y d se comparan los tres parámetros geométricos con resultados experimentales de diferentes grupos (cada abcisa corresponde a un grupo) se incluye también el promedio de estos valores. La Figura 12.c corresponde al material aluminio y la Figura 12.d al acero dulce. Los resultados de la simulación comparan razonablemente bien con los valores experimentales.

## 7. CONCLUSIONES

Se ha presentado un elemento finito para el análisis no lineal con grandes deformaciones de láminas bidimensionales. La principal característica del elemento es que no tiene grados de libertad de rotación y calcula las curvaturas en función de la geometría de los elementos vecinos. En los ejemplos presentados se ve que el elemento converge a la solución correcta en todos los casos y que es capaz de tratar láminas no suaves y ramificadas. El elemento requiere de dos puntos de integración, lo cual es una desventaja frente al elemento de dos nudos deformable por corte que requiere sólo uno. El elemento ha sido probado con muy buenos resultados en problemas con plasticidad en grandes deformaciones, incluyendo contacto con fricción, distintas condiciones de contorno y carga.

## 8. AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET y ACCSE (Argentina) y de CIMNE (España) y a la empresa Quantech ATZ por la utilización del programa Stampack.

## REFERENCIAS

- [1] A.C. Ugural. *tresses in Plates and Shells*, McGraw Hill, New York, 1981.
- [2] D. Bushnell y B.O. Almroth, "Finite difference energy method for non linear shell analysis", *J. Computers and Structures*, Vol. **1**, 361, 1971.
- [3] D. Bushnell, "Computerized analysis of shells—governing equations", *J. Computers and Structures*, Vol. **18**(3), 471-536, 1984.
- [4] R.A. Nay y S. Utku. "An alternative to the finite element method". *Variational Methods Eng.*, Vol. **1**, 1972.
- [5] M.R. Barnes. Form finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation. *Ph.D. Tesis*, Department of Civil Engineering, The City University, Londres, 1977.
- [6] J.K. Hampshire, B.H.V. Topping y H.C. Chan. "Three node triangular elements with one degree of freedom per node". *Engng. Comput.* Vol. **9**, pp. 49–62, 1992.
- [7] R. Phaal y C.R. Calladine. "A simple class of finite elements for plate and shell problems. II: An element for thin shells with only translational degrees of freedom". *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **5**, pp. 979–996, 1992.
- [8] E. Oñate y M. Cervera. "Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node". *Engineering Computations*, Vol. **10**, pp 553–561, 1993.
- [9] G. Rio, B. Tathi y H. Laurent. A new efficient finite element model of shell with only three degrees of freedom per node. Applications to industrial deep drawing test. in *Recent Developments in Sheet Metal Forming Technology*, Ed. M.J.M. Barata Marques, 18th IDDRG Biennial Congress, Lisboa, 1994.
- [10] M. Brunet y F. Sabourin. Prediction of necking and wrinkles with a simplified shell element in sheet forming. *Int. Conf. of Metal Forming Simulation in Industry*, Vol. II, pp. 27–48, B. Kröplin (Ed.), 1994.
- [11] F. Cirak y M. Ortiz. Fully  $C^1$ -conforming subdivision elements for finite deformations

- thin-shell analysis. *Int. J. Num. Meths in Engng*, vol. **51**, 813-833, 2001.
- [12] F.G. Flores F.G. y E. Oñate. A basic thin shell triangle with only translational DOFs for large strain plasticity, *Int. J. Num. Meths in Engng*, **51**, pp. 57-83, 2001.
- [13] E. Oñate, P. Cendoya y J. Miquel. Non linear explicit dynamic analysis of shells using the BST rotation-free triangle. *Engineering Computations*, vol.**9**(6), 662–706, 2002.
- [14] F.G. Flores y E. Oñate. Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free BST shell triangle using an assumed strain approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, en prensa, 2004.
- [15] R. Phaal and C.R. Calladine. A simple class of finite elements for plate and shell problems. I: Elements for beams and thin plates. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **5**, pp. 955–977, 1992.
- [16] J. Jovicevic y E. Oñate. *Analysis of beams and shells using a rotation-free finite element-finite volume formulation*, Monografía 43, CIMNE, Barcelona, 1999.
- [17] F.G. Flores. Two Dimensional Shell Element for Nonlinear Analysis, *Applied Mechanics Reviews*, vol. **48**(11 part.2), pp.30-35. 1995.
- [18] F.G. Flores y L.A. Godoy. Finite Element Applications to the Internal Pressure Loadings on Spherical Shells and other Shells of Revolution, *Finite Element Analysis of Thin Walled Structures* (Editor John Bull), Barking (Inglaterra), Cap.9 pp. 259-296, 1990.
- [19] Prinja NK y Clegg RA , A review of benchmark problems for geometric non-linear behaviour of 3-D beams and shells, NAFEMS R0024, 1993.
- [20] Hibbit, Karlson y Sorensen Inc., ABAQUS, version 5.2.1, Pawtucket, USA.
- [21] STAMPACK. version 6.0.0 *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems*, Quantech ATZ, Barcelona, España, (www.quantech.es), 2004.
- [22] J.K. Lee, R. Wagoner, y E. Nakamachi. A benchmark test for sheet metal forming analysis, Technical Report, Ohio State University, 1990.
- [23] F.G. Flores. “A two-dimensional linear assumed strain triangular element for finite deformations analysis”. *International Journal of Computer Methods in Science and Engineering* (en prensa) 2004.
- [24] C.G. García Garino. Un modelo numérico para el análisis de sólidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones, Tesis de doctorado, Universidad Politécnica de Cataluña, 1993.
- [25] A. Makinouchi et al (Ed), Anales de NUMISHEET 93, Isehari, Japan, 1993.
- [26] R. Hill. “A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals”. *Proc. Royal Society London*, Vol. **A193**, pp. 281, 1948.