

INFLUENCIA DE LA CARGA AXIAL EN LA VIBRACIÓN DE VIGAS DE PARED DELGADA

Fernanda de Borbón^a, Daniel Ambrosini^a y Anibal Mirasso^b

^aÁrea de Dinámica Experimental, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo. CONICET.,
ferdeborbon@gmail.com, [http://www.fing.uncu.edu.ar/Investigacion/institutos/imeris/areas/
dinamica_experimental/dinamica_experimental](http://www.fing.uncu.edu.ar/Investigacion/institutos/imeris/areas/dinamica_experimental/dinamica_experimental)

^bÁrea de Modelación Constitutiva, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Ciudad
Universitaria, Parque General San Martín 5500 Mendoza, Argentina

Palabras Clave: Vigas de pared delgada, Frecuencias naturales, Carga axial.

Resumen. Las vigas de pared delgada y sección cerrada son extensamente utilizadas como componentes estructurales en amplios campos de la Ingeniería. Existen diversas estructuras que pueden modelarse como vigas de pared delgada con carga axial. Aunque la teoría de Vlasov está firmemente establecida, presenta como inconveniente el hecho de que desprecia las deformaciones angulares inducidas por el esfuerzo de corte. A partir de un modelo teórico - numérico basado en las hipótesis de Vlasov que tiene en cuenta el efecto mencionado anteriormente y que considera además las vibraciones flexotorsionales acopladas, se incorporó en trabajos anteriores, una fuerza axial constante a las ecuaciones de movimiento. En este trabajo, se realiza un estudio numérico - experimental de las frecuencias naturales de vibración de vigas de pared delgada de aluminio cargadas axialmente. Para su resolución numérica, se utiliza un método de integración numérica conjuntamente con el algoritmo de la transformada rápida de Fourier y el método de elementos finitos.

1. INTRODUCCIÓN

Las vigas de pared delgada y sección cerrada son extensamente utilizadas como componentes estructurales en diferentes campos de la Ingeniería Civil, Aeronáutica y Mecánica.

En la literatura pueden encontrarse numerosas aplicaciones de vibración de vigas rectas y curvas, como así también arcos y estructuras de cáscara. Por otra parte, la teoría formulada por [Vlasov \(1963\)](#) ha sido ampliamente usada en el análisis dinámico de vigas de pared delgada y sección abierta, como es ejemplificado en los estudios de [Christiano y Culver \(1969\)](#) y [Yoo y Fehrenbach \(1982\)](#) en los cuales existe gran correlación entre trabajos experimentales y las predicciones teóricas de frecuencias naturales y desplazamientos inducidos en vigas rectas y curvas sometidas a cargas móviles.

En [Ambrosini et al. \(1995\)](#) y [Ambrosini et al. \(2000\)](#) se propuso una teoría modificada, la cual está basada en la formulación de Vlasov pero que tiene en cuenta deformaciones por corte, inercias rotacionales en las resultantes de tensiones y puede ser aplicada en vigas de sección no uniforme. Esta formulación, que utiliza el método de variables de estado en el dominio de la frecuencia, conduce a un tratamiento numérico eficiente, el cual puede ser muy útil en numerosas aplicaciones.

Otras contribuciones en este campo están restringidas a aplicaciones particulares. Por ejemplo, [Aggarwal y Cranch \(1967\)](#) y [Yaman \(1997\)](#) trabajan con secciones tipo canal y [Ali Hasan y Barr \(1974\)](#) con secciones ángulo. [Tanaka y Bercin \(1999\)](#) extendieron el modelo de [Bishop et al. \(1989\)](#) para estudiar el acoplamiento triple de vigas uniformes usando Mathematica. Las ecuaciones diferenciales presentadas por los autores mencionados tienen una confusión del sistema de coordenadas que fue clarificada por [Arpaci y Bozdog \(2002\)](#). En [Ambrosini y Danesi \(2003\)](#) se presentó un estudio numérico comparando los resultados con los obtenidos con [Arpaci y Bozdog \(2002\)](#).

Más recientemente, [Kim y Kim \(2005\)](#) presentaron una matriz de rigidez dinámica / estática para vigas de pared delgada asimétricas considerando deformaciones por corte, alabeo de la sección transversal y el acoplamiento entre ellas como así también, inercias rotacionales. Además desarrollaron un elemento finito usando un elemento de viga isoparamétrico. [Prokić \(2006\)](#) obtuvo un modelo para vigas de pared delgada y sección abierta de cinco ecuaciones diferenciales acopladas teniendo en cuenta el alabeo de la sección transversal, deformaciones por corte e inercias rotacionales. La solución explícita y analítica fue obtenida con Mathcad.

La determinación con precisión de las frecuencias naturales de vibración y de las formas modales, es de suma importancia en el diseño de vigas de pared delgada axialmente cargadas sujetas a cargas dinámicas. Aspas de helicópteros, álabes de turbinas, ejes de automóviles son algunos ejemplos de este tipo de vigas.

[Kim et al. \(2003\)](#) propusieron un método numérico para evaluar en forma exacta la matriz de rigidez estática y dinámica de vigas de pared delgada sujetas a cargas axiales excéntricas. Las ecuaciones se derivan a partir de la energía potencial total basada en rotaciones y momentos semitangenciales. [Jun et al. \(2004\)](#) extendieron el modelo de Arpaci and Bozdog y obtuvieron la matriz de transferencia dinámica para una viga con sección arbitraria pero las deformaciones por corte no fueron incluidas en la formulación. [Chen y Hsiao \(2007a\)](#) estudiaron el caso particular de vigas de pared delgada con sección Z, en las cuales se produce el acoplamiento axial-torsional inducido por las condiciones de borde.

En cuanto a la utilización de métodos numéricos, [Kim y Kim \(2000\)](#) presentaron una formulación para vigas de pared delgada asimétricas en la cual todos los desplazamientos están definidos en un eje arbitrario. Se utilizaron polinomios de Hermite como funciones de forma.

Chen y Hsiao (2007b) estudian el acoplamiento de las vibraciones axiales y flexotorsionales debido a las condiciones de borde mediante método de elementos finitos. Mientras que Sapountzakis y Mokos (2007) desarrollaron un elemento de contorno para la construcción de la matriz de rigidez y el vector de cargas nodales de un elemento de sección homogénea o compuesta. Tuvieron en cuenta tanto el alabeo como las deformaciones por corte.

Erkmen y Mohareb (2008) presentan un elemento finito que considera deformaciones por corte para el análisis de pandeo en vigas de pared delgada y que predice el efecto de la posición de la carga crítica. Back y Will (2008) desarrollan un elemento finito para analizar vigas I compuestas, el cual tiene en cuenta deformaciones por corte y alabeo. Se analizan diferentes tipos de elementos y su convergencia. Además se desarrolla la matriz de rigidez geométrica.

Regularmente, nuevas teorías y enfoques se presentan en la literatura y se realizan diversas comparaciones entre ellos. Sin embargo, es notable la falta de datos experimentales los cuales son esenciales para corroborar las teorías propuestas y obtener conclusiones confiables sobre la precisión y aplicabilidad de estas teorías. En Ambrosini (2009) se presenta un modelo matemático para vigas de pared delgada asimétricas y su verificación con ensayos de vibraciones libres.

En este trabajo, se realiza un estudio numérico - experimental de las frecuencias naturales de vibración de vigas de pared delgada de aluminio cargadas axialmente. Para su resolución numérica, se utiliza un método de integración numérica conjuntamente con el algoritmo de la transformada rápida de Fourier y el método de elementos finitos.

2. MODELO MATEMÁTICO

2.1. Ecuaciones diferenciales de Movimiento

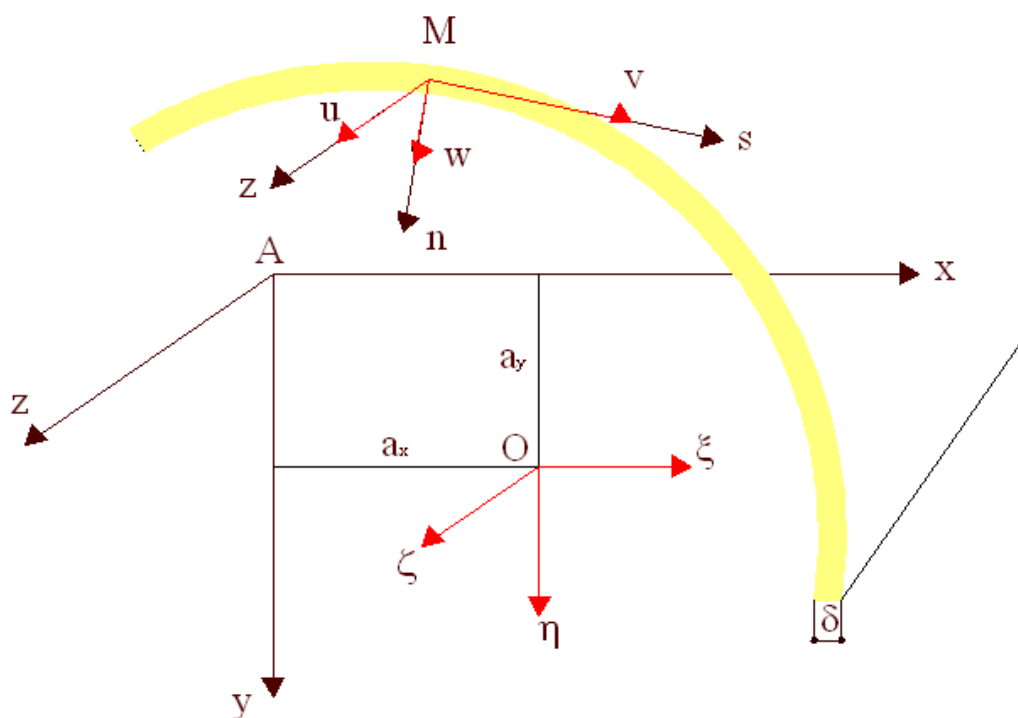


Figura 1: Sistema de ejes coordenados

Siguiendo la convención adoptada por Vlasov, se adopta un sistema rectangular de coor-

denadas globales (x, y, z) de manera que conformen una terna izquierda (Ver figura 1). Los desplazamientos asociados al sistema coordenado elegido son ξ , η y ζ respectivamente. En la figura, O representa el centroide de la sección transversal y A el centro de corte.

En trabajos anteriores (de Borbón, 2008; de Borbón et al., 2008) se incorporó el efecto de una carga axial a las ecuaciones de movimiento desarrolladas por Ambrosini et al. (2000). Se consideró una fuerza longitudinal P aplicada en un punto arbitrario de la sección e_x , e_y (Ver figura 2). Si P es una fuerza de tracción y M_x y M_y son los momentos de flexión producidos por la carga excéntrica de manera que $M_x = Pe_y$ y $M_y = -Pe_x$, se obtiene la tensión normal producida por la carga P

$$\sigma_p = \frac{P}{F} - \frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y \quad (1)$$

El desplazamiento de un punto M ubicado en la sección transversal queda determinado por:

$$\begin{aligned} \xi_M &= \xi - (y - a_y)\theta \\ \eta_M &= \eta + (x - a_x)\theta \end{aligned} \quad (2)$$

Donde θ es el giro de la sección transversal alrededor del polo.

Los esfuerzos normales $\sigma_p \delta ds$ actuando en la sección transversal de una faja elemental, son proyectados en las direcciones de los ejes coordenados x e y como resultado de las deformaciones por flexión.

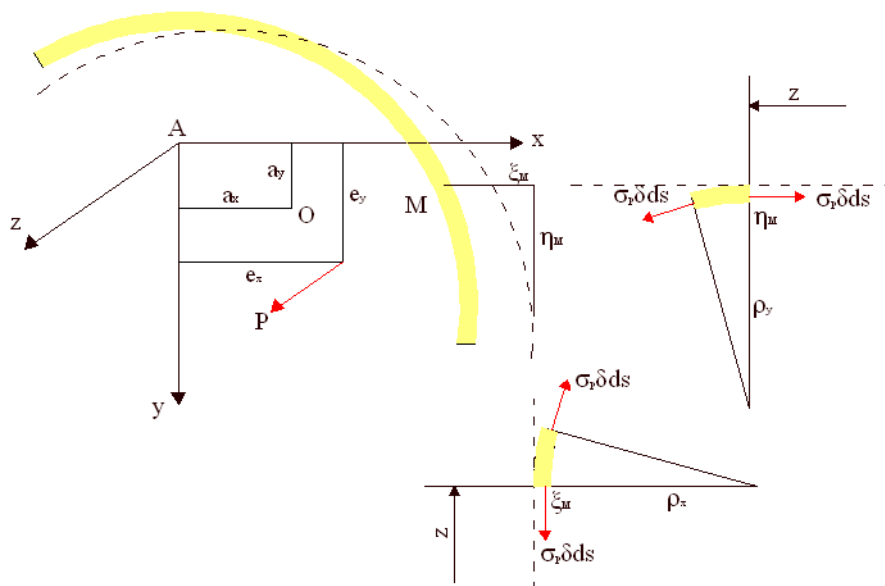


Figura 2: Carga axial y sus proyecciones

Las ecuaciones de movimiento para vibraciones flexotorsionales de vigas de pared delgada

cargadas axialmente son:

$$\begin{aligned}
 & EJ_y \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z^3} \right) - P \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) + P (e_y - a_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \\
 & + \rho F \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \rho J_y \left(\frac{\partial^4 \xi}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{mx}}{\partial z \partial t^2} \right) = q_x \\
 & EJ_x \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^4} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z^3} \right) - P \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) - P (e_x - a_x) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \\
 & + \rho F \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \rho J_x \left(\frac{\partial^4 \eta}{\partial z^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \gamma_{my}}{\partial z \partial t^2} \right) = q_y \quad (3) \\
 & EJ_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + P \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{mx}}{\partial z} \right) (e_y - a_y) - \\
 & - P \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} - \frac{\partial \gamma_{my}}{\partial z} \right) (e_x - a_x) - P (r^2 + 2e_x \beta_x + 2e_y \beta_y) \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\
 & + \rho F \left(a_y \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) - \rho J_\varphi \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^2 \partial t^2} = m_t
 \end{aligned}$$

En esas ecuaciones, F es el área de la sección transversal, J_x y J_y son los momentos de inercia de la sección transversal en relación a los ejes principales, J_φ el momento de inercia sectorial, J_d el módulo de torsión, a_x y a_y las coordenadas del centro de corte, γ_{mx} y γ_{my} representan los valores medios de las deformaciones por corte sobre una sección transversal $z = \text{constante}$. E es el módulo de elasticidad longitudinal, G es el módulo de elasticidad transversal y ρ denota la densidad de masa del material de la viga. q_x , q_y y m_t son las cargas y momento torsor externos por unidad de longitud.

Las características geométricas r , β_x y β_y :

$$r^2 = a_x^2 + a_y^2 + \frac{J_x + J_y}{F} \quad (4)$$

$$\beta_x = \frac{U_y}{2J_y} - a_x \quad (5)$$

$$\beta_y = \frac{U_x}{2J_x} - a_y$$

$$\begin{aligned}
 U_x &= \int_F y^3 dF + \int_F x^2 y dF \\
 U_y &= \int_F x^3 dF + \int_F y^2 x dF
 \end{aligned} \quad (6)$$

Los términos de la derecha de la expresión (6) corresponden a los momentos y productos de inercia de tercer orden de la sección considerada. Se ha mantenido la nomenclatura adoptada por Vlasov para las ecuaciones (5) y (6).

El sistema representa un modelo general para vigas que tiene en cuenta el acoplamiento triple entre las vibraciones flexionales y torsionales. Debe tenerse en cuenta que la ecuación de vibración longitudinal relacionada al desplazamiento generalizado ζ (Figura 1) está desacoplada del resto del sistema. En el caso que las vibraciones longitudinales sean de interés pueden ser tratadas independientemente.

3. MODELO NUMÉRICO EN VARIABLES DE ESTADO

La resolución de las ecuaciones diferenciales de cuarto orden obtenidas tal como se presentan es una tarea compleja. Por lo tanto, es conveniente transformar esas ecuaciones en un sistema equivalente de doce ecuaciones diferenciales de primer orden. El esquema descrito anteriormente es conocido en la literatura como *método de variables de estado*.

Se seleccionan como componentes del vector \mathbf{v} de estado seis componentes geométricas y seis estáticas: Los desplazamientos ξ , η , las rotaciones de flexión ϕ_x , ϕ_y , los esfuerzos de corte Q_x , Q_y , los momentos flectores M_x , M_y , la rotación torsional θ y su derivada espacial θ' , el momento torsional total M_T y el bimomento B

$$\mathbf{v}(z, \omega) = \{\eta, \phi_y, Q_y, M_x, \xi, \phi_x, Q_x, M_y, \theta, \theta', M_T, B\}^T \quad (7)$$

Donde

$$M_T = H_\varphi + H_k \quad (8)$$

$$H_k = GJ_d\theta' \quad (9)$$

El sistema en notación matricial es

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \mathbb{A}\mathbf{v} + \mathbf{q} \quad (10)$$

Donde \mathbb{A} es la matriz del sistema y \mathbf{q} es el vector de carga externa. La matriz \mathbb{A} puede observarse en figura 3 donde:

$$\begin{aligned} B\theta' &= \rho J_\varphi \omega^2 - GJ_d \\ PR^2 &= P(r^2 + 2e_x\beta_x + e_y\beta_y) \end{aligned} \quad (11)$$

3.1. Resolución del sistema equivalente

El sistema (10) puede integrarse fácilmente usando procedimientos numéricos estándar, tales como el método de cuarto orden Runge-Kutta, el algoritmo predictor-corrector u otros métodos.

Para resolver el problema, tanto para frecuencias naturales como para la respuesta dinámica, el procedimiento consiste en transformar un problema de valores de borde en dos puntos en un problema de valores iniciales, como es demostrado por [Ebner y Billington \(1968\)](#). El procedimiento se aplica usualmente en el método de matrices de transferencia [Pestel y Leckie \(1963\)](#). Las condiciones de borde para este problema son las mismas que para la viga uniforme:

	Flexión	Torsión
Fija o empotrada	$\xi = \eta = \phi_x = \phi_y = 0$	$\theta = \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$
Libre	$Q_x = Q_y = M_x = M_y = 0$	$M_t = B = 0$
Articulada	$\xi = \eta = M_x = M_y = 0$	$\theta = B = 0$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & \frac{1}{k_y FG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EI_x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\rho F \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho F \alpha^2 \alpha_x & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \rho J_x \alpha^2 + P & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P(e_x - \alpha_x) & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k_x FG} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho F \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & -\rho F \alpha^2 \alpha_y & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho J_y \alpha^2 + P & -1 & 0 & 0 & -P(e_y - \alpha_y) & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{EI_\varphi} \\
 \rho F \alpha^2 \alpha_x & P(e_x - \alpha_x) & 0 & 0 & -\rho F \alpha^2 \alpha_y & -P(e_y - \alpha_y) & 0 & 0 & -\rho F \alpha^2 r^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B\theta + PR^2 & 1 & 0
 \end{bmatrix}$$

Figura 3: Matriz A

4. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

4.1. Elemento de viga

Se utiliza un elemento viga donde se asumen como funciones de interpolación o funciones de forma elementales *polinomios cúbicos de Hermite* (Ver figura 4). Estos polinomios cúbicos son completos y aseguran el cumplimiento de los criterios de convergencia del método de elementos finitos (Bathe, 1996; Zienkiewicz y Taylor, 1994).

Las expresiones de las funciones de forma elegidas para un elemento de longitud h_e :

$$\begin{aligned}
 N_1(s) &= (1/4)(2 + s)(1 - s)^2 \\
 N_2(s) &= (h_e/8)(1 + s)(1 - s)^2 \\
 N_3(s) &= (1/4)(2 - s)(1 + s)^2 \\
 N_4(s) &= (h_e/8)(s - 1)(1 + s)^2
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$s = \frac{2z}{h_e} - 1 \quad \text{entonces} \quad -1 < s < 1 \tag{13}$$

Los grados de libertad de un elemento de longitud h_e quedan definidos en la figura 5. Los desplazamientos de un elemento quedan definidos por:

$$u_i = v_i = N_i^e a_i^e \tag{14}$$

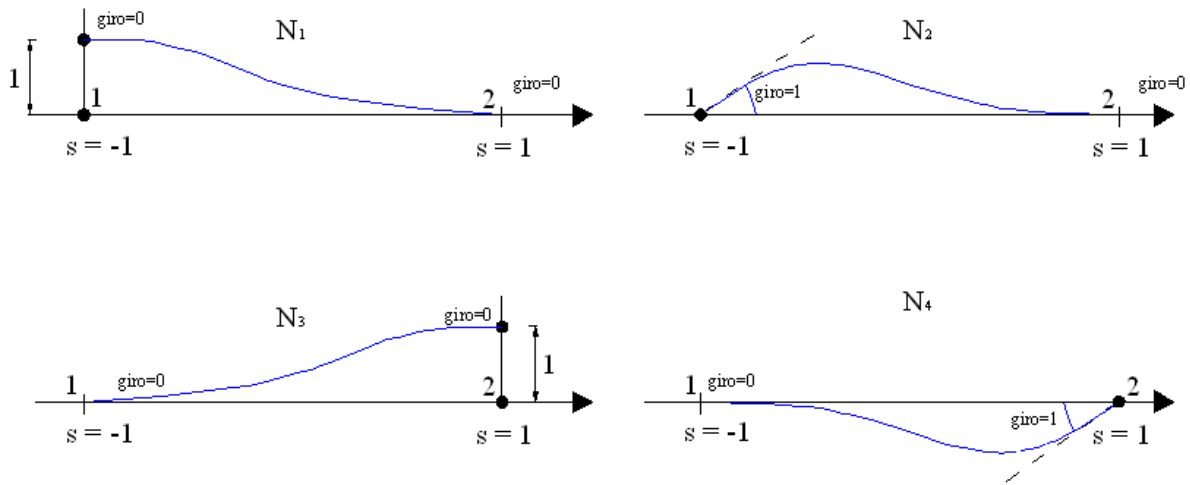


Figura 4: Funciones de forma: Hermite

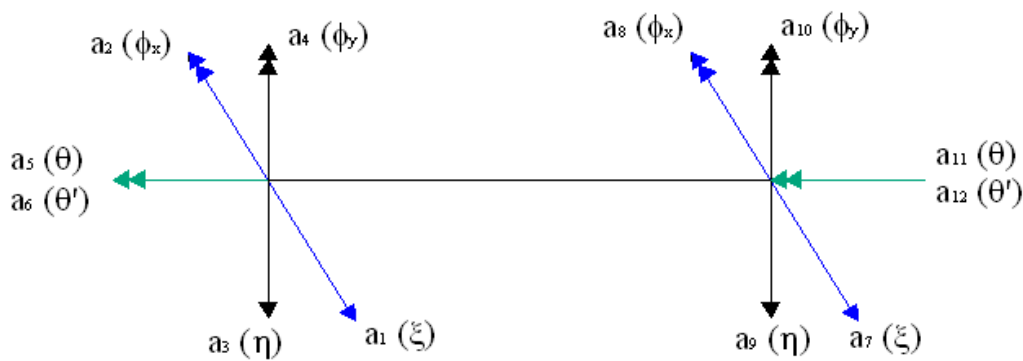


Figura 5: Grados de Libertad del elemento

Donde:

- N_i^e = Matriz de Funciones de Forma para un elemento de longitud h_e
- a^e = Vector con los Grados de Libertad del elemento

Se pueden expresar las ecuaciones de equilibrio matricialmente (Zienkiewicz y Taylor, 1994):

$$\sum_{i=1}^{nel} [(\mathbb{K}_{ij}^e - \omega^2 \mathbb{M}_{1ij}^e + \omega^4 \mathbb{M}_{2ij}^e) a^e] = 0 \tag{15}$$

Se presentan las expresiones de las matrices de rigidez y masa del elemento finito desarrollado.

La matriz de masa se presenta como suma de tres matrices sólo con el fin de clarificar su contenido. La primera matriz contiene los términos de masa propiamente dichos. La segunda, contiene los términos que afectan a las aceleraciones provenientes de las deformaciones por corte. Por último, la tercera matriz contiene términos que afectan a las aceleraciones provenientes de las deformaciones por corte pero cuyas derivadas respecto al tiempo son de cuarto orden.

En vigas esbeltas, esta última matriz puede despreciarse (Clough y Penzien, 1975).

Tanto la matriz de rigidez como las matrices de masa, han sido ordenadas de modo de mostrar los acoplamientos existentes entre la flexión y torsión.

Cabe destacar que, cuando se resuelve numéricamente una aplicación práctica, las matrices son reordenadas de modo de poder ensamblar las matrices.

$$\mathbb{K}^e = \begin{bmatrix} \int \mathbb{B}^T E J_y \mathbb{B} dz + \int \mathbb{G}^T P \mathbb{G} dz & 0 & - \int \mathbb{G}^T P (e_y - a_y) \mathbb{G} dz \\ 0 & \int \mathbb{B}^T E J_x \mathbb{B} dz + \int \mathbb{G}^T P \mathbb{G} dz & \int \mathbb{G}^T P (e_x - a_x) \mathbb{G} dz \\ - \int \mathbb{G}^T P (e_y - a_y) \mathbb{G} dz & \int \mathbb{G}^T P (e_x - a_x) \mathbb{G} dz & \int \mathbb{B}^T E J_\varphi \mathbb{B} dz + \int \mathbb{G}^T G J_d \mathbb{G} dz + \int \mathbb{G}^T P R^2 \mathbb{G} dz \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbb{M}^e = \begin{bmatrix} \int \mathbb{N}^T m \mathbb{N} dz + \int \mathbb{G}^T \rho J_y \mathbb{G} dz & 0 & \int \mathbb{N}^T m a_y \mathbb{N} dz \\ 0 & \int \mathbb{N}^T m \mathbb{N} dz + \int \mathbb{G}^T \rho J_x P \mathbb{G} dz & - \int \mathbb{N}^T m a_x \mathbb{N} dz \\ \int \mathbb{N}^T m a_y \mathbb{N} dz & - \int \mathbb{N}^T m a_x \mathbb{N} dz & \int \mathbb{N}^T m r^2 \mathbb{N} dz + \int \mathbb{G}^T \rho J_\varphi \mathbb{G} dz \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\mathbb{M}_1^e = \begin{bmatrix} \int \mathbb{G}^T \frac{mEJ_y}{k_x FG} \mathbb{G} dz + \int \mathbb{N}^T \frac{Pm}{k_x FG} \mathbb{N} dz & 0 & \int \mathbb{G}^T \frac{mEJ_y a_y}{k_x FG} \mathbb{G} dz + \int \mathbb{N}^T \frac{Pm a_y}{k_x FG} \mathbb{N} dz \\ 0 & \int \mathbb{G}^T \frac{mEJ_x}{k_y FG} \mathbb{G} dz + \int \mathbb{N}^T \frac{Pm}{k_y FG} \mathbb{N} dz & - \int \mathbb{G}^T \frac{mEJ_x a_x}{k_y FG} \mathbb{G} dz + \int \mathbb{N}^T \frac{Pm a_x}{k_y FG} \mathbb{N} dz \\ - \int \mathbb{N}^T \frac{Pm(e_y - a_y)}{k_x FG} \mathbb{N} dz & \int \mathbb{N}^T \frac{Pm(e_x - a_x)}{k_y FG} \mathbb{N} dz & - \int \mathbb{N}^T \frac{Pm(e_y - a_y) a_y}{k_x FG} \mathbb{N} dz + \int \mathbb{N}^T \frac{Pm(e_x - a_x) a_x}{k_y FG} \mathbb{N} dz \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbb{M}_2^e = \begin{bmatrix} \int \mathbb{N}^T \frac{\rho J_y m}{k_x FG} \mathbb{N} dz & 0 & \int \mathbb{N}^T \frac{\rho J_y m a_y}{k_x FG} \mathbb{N} dz \\ 0 & \int \mathbb{N}^T \frac{\rho J_x m}{k_y FG} \mathbb{N} dz & - \int \mathbb{N}^T \frac{\rho J_x m a_x}{k_y FG} \mathbb{N} dz \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

En las matrices \mathbb{G} es la derivada primera de las funciones de forma, \mathbb{B} es la derivada segunda de las funciones de forma, m es la masa por unidad de longitud y k_x y k_y son los coeficientes de Cowper de la sección transversal.

Para resolver las integrales presentes en las matrices de rigidez y masa se utiliza integración numérica por puntos de Gauss, utilizando la cantidad de puntos necesarios que conducen a una integración exacta del polinomio del orden dado.

5. EJEMPLOS TEÓRICO - EXPERIMENTAL

El modelo con carga axial fue incorporado al programa DYBEAM (Ambrosini, 1991), el cual incluye todos los aspectos señalados en la sección 3. El elemento de viga se implementó en un programa de elementos finitos en entorno MATLAB. Se adoptó como estructura modelo de archivos, la utilizada en Fish y Belytschko (2007).

5.1. Caso de Estudio

Se analizó una viga de aluminio cuya sección se puede apreciar en Figura 6. Las propiedades geométricas y mecánicas de la misma son las siguientes:

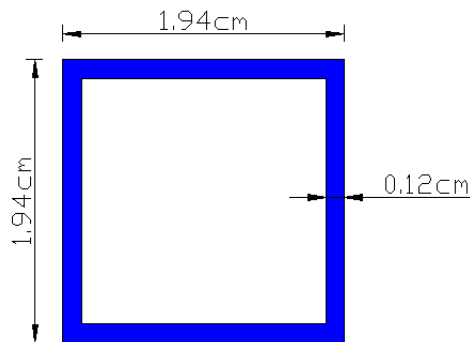


Figura 6: Sección transversal viga de ensayo

$$\begin{aligned}
 F &= 0,8736e^{-4} m^2 & l &= 1,475 m \\
 J_x = J_y &= 4,8281e^{-9} m^4 & J_d &= 4,1933e^{-11} m^4 \\
 E &= 54,50 GPa & \rho &= 2670 kg/m^3
 \end{aligned}$$

Se estudió una viga con condición de borde libre - libre.

Para la obtención de las frecuencias naturales en forma numérica, se despreció la influencia de las deformaciones por corte dada la esbeltez de la viga. Se utilizaron 20 elementos para la resolución a través de elementos finitos.

Se realizaron una serie de ensayos sin carga axial y posteriormente se aplicó una carga axial de tracción centrada de 71.6N.

Finalmente se compararon las frecuencias naturales de vibración obtenidas con los programas mencionados anteriormente con los resultados de los ensayos experimentales.

5.2. Preparación del experimento e instrumentación

Se utilizó un acelerómetro PCB 353B33 para medir las frecuencias de vibración de la viga de aluminio. Se amplificó la señal generada por el acelerómetro con un amplificador PCB 480E09. Se utilizó una tarjeta de adquisición de datos PCM- DAS16D/16 de 100 kHz en una notebook para grabar y procesar las señales a través del programa HPVEE (1998). La viga se golpeó con un martillo para excitar los distintos modos. Se utilizó un canal en todos los experimentos. La disposición del ensayo puede apreciarse en figura 7 donde se ve el acelerómetro posicionado en el centro de la viga, el acondicionador de señal y el peso de 71.6N.



Figura 7: Ensayo

5.3. Resultados

En tabla 1 se resumen las frecuencias obtenidas a partir de los ensayos.

Frecuencias experimentales			
Modo	P=0 N	P= 71.6 N	Dif
1	54.9	57.4	4.60 %
2	158.0	159.4	0.90 %
3	294.7	295.5	0.30 %
4	499.7	500.4	0.20 %

Tabla 1: Ensayos: Frecuencias

Se observa que existe una diferencia de 4.6 % en el primer modo de vibración. Luego la influencia de la carga axial disminuye en los modos superiores y puede ser despreciada. Este comportamiento es coincidente con resultados analíticos encontrados en la literatura.

Las figuras 8 a 11 muestran la salida gráfica del programa HPVEE. Las frecuencias se distinguen claramente para ambos casos de carga.

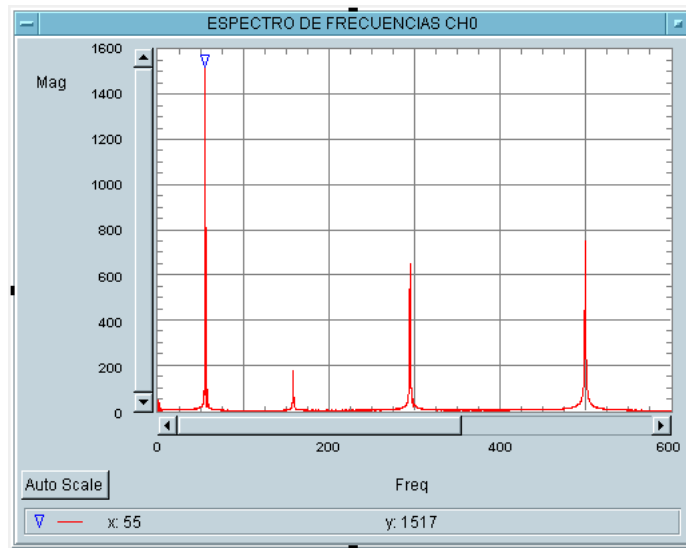


Figura 8: Ensayo 6 - Carga axial P=0

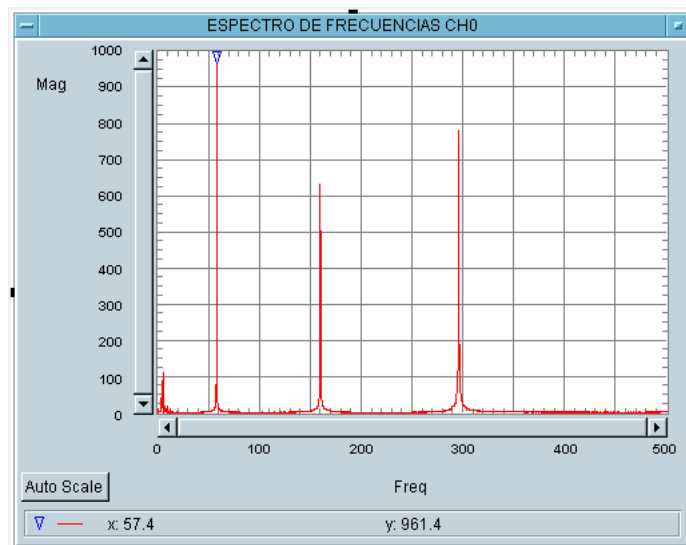


Figura 9: Ensayo 12 - Carga axial P=71.6 N

El primer segundo de los gráficos de aceleraciones muestra el golpe del martillo. Cuando la carga axial es nula, el aparente beating se debe a la rotación de la viga durante el ensayo. Sin embargo, cuando el ensayo es con carga axial, el beating desaparece porque el peso colgante evita la rotación de la viga durante el ensayo.

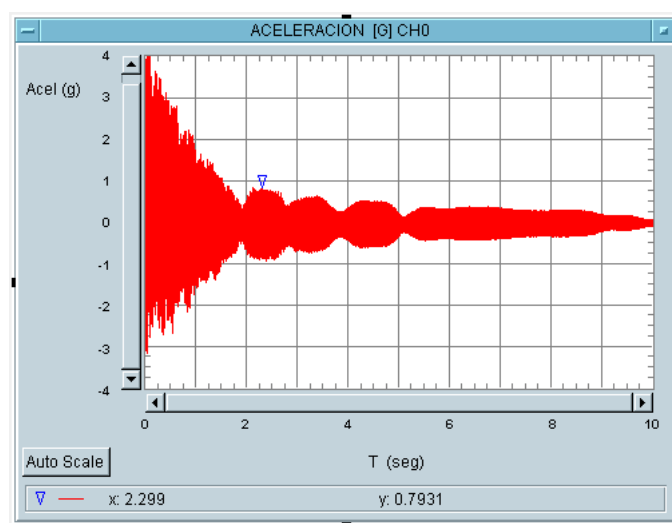


Figura 10: Ensayo 5 - Carga axial P=0

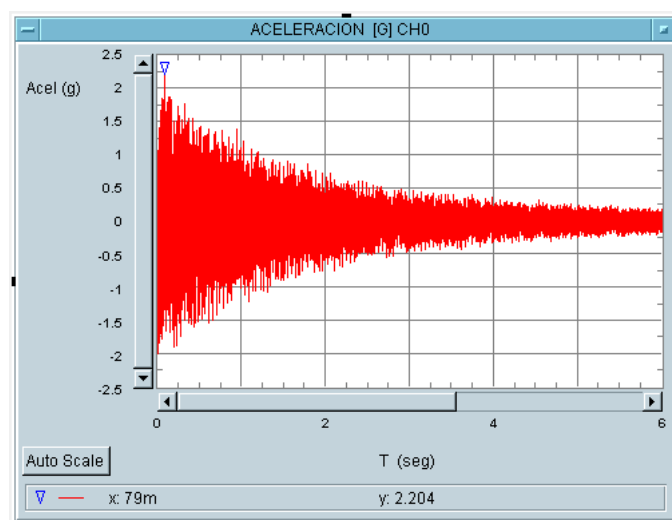


Figura 11: Ensayo 12 - Carga axial P=71.6

En las tablas 2 y 3 se observan las frecuencias obtenidas con los programas numéricos y su comparación con el valor experimental. Los resultados numéricos obtenidos con el métodos de variables de estado y el método de elementos finitos son similares entre sí.

Para el caso sin carga axial, se obtienen excelentes resultados en el primer y tercer modo de vibración. El segundo modo presenta la mayor dispersión respecto al resultado del ensayo. Esto se debe a que la posición del acelerómetro no es la adecuada para capturar la frecuencia de ese modo. Cuando la viga está cargada axialmente, los resultados obtenidos son similares en el primer y cuarto modo. Las diferencias en el segundo y tercer modo no superan el 3 %.

Viga Libre - Libre sin carga axial

Modo	Frecuencias naturales (Hz)				
	Ensayo	DYBEAM	Dif	MEF	Dif
1	54.9	54.9	0.00 %	54.9	0.00 %
2	158.0	151.2	-4.30 %	151.3	-4.24 %
3	294.7	295.7	0.34 %	296.4	0.58 %
4	499.7	490.3	-1.88 %	489.4	-2.06 %

Tabla 2: Ejemplo 1: Viga Libre - Libre sin carga axial

Viga Libre - Libre con carga axial

Modo	Frecuencias naturales (Hz)				
	Ensayo	DYBEAM	Dif	MEF	Dif
1	57.4	57.5	0.17 %	57.5	0.17 %
2	159.4	155.1	-2.70 %	155.2	-2.63 %
3	295.5	301.4	2.17 %	302.6	2.40 %
4	500.4	499.7	-0.14 %	498.8	-0.32 %

Tabla 3: Ejemplo 1: Viga Libre - Libre con carga axial

6. CONCLUSIONES

Se presenta en este trabajo un estudio numérico - experimental de las frecuencias naturales de vibración de vigas de pared delgada de aluminio con dos condiciones de carga. Para su resolución numérica, se utiliza un método de integración numérica conjuntamente con el algoritmo de la transformada rápida de Fourier y el método de elementos finitos.

Se analiza un ejemplo de viga con extremos libre - libre y se obtienen las frecuencias naturales de vibración tanto en forma experimental como en forma numérica. Se observa que los resultados numéricos son comparables a los experimentales tanto para la viga descargada como para la viga con carga axial.

Por otra parte, se constata que la fuerza axial no puede despreciarse en la obtención de la frecuencia natural de vibración del primer modo. La influencia de la carga axial disminuye en los modos superiores y puede despreciarse.

Agradecimientos

Se agradece el apoyo financiero de CONICET y de la Universidad Nacional de Cuyo.

REFERENCIAS

Aggarwal H. y Cranch E. A theory of torsional and coupled bending torsional waves in thin-walled open section beams. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, 34:337-343, 1967.

- Ali Hasan S. y Barr A. Linear vibration of thin-walled beams of equal angle-section. *Journal of Sound and Vibration*, 32:3–23, 1974.
- Ambrosini D. On free vibration of nonsymmetrical thin-walled beam. *Thin Walled Structures*, 47:629–636, 2009.
- Ambrosini R. *Análisis Dinámico de Estructuras de Pared Delgada y Sección Abierta en el Dominio de la frecuencia*. Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias Exactas y Tec., Universidad Nacional de Tucumán, 1991.
- Ambrosini R. y Danesi R. Free vibration of nonsymmetrical thin walled beams. *Mecánica Computacional. Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, ENIEF*, 22:666–677, 2003.
- Ambrosini R., Riera J., y Danesi R. Dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams with shear flexibility. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:2867–2885, 1995.
- Ambrosini R., Riera J., y Danesi R. A modified vlasov theory for dynamic analysis of thin-walled and variable open section beams. *Engineering Structures*, 22:890–900, 2000.
- Arpaci A. y Bozdog E. On free vibration analysis of thin-walled beams with nonsymmetrical open cross-sections. *Computers and Structures*, 80:691–695, 2002.
- Back S. y Will K. Shear-flexible thin-walled element for composite i-beams. *Engineering Structures*, 30:1447–1458, 2008.
- Bathe K. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall Inc., New Jersey, 1996.
- Bishop R., Cannon S., y Miao S. On coupled bending and torsional vibration of uniform beams. *Journal of Sound and Vibration*, 131:457–464, 1989.
- Chen H. y Hsiao K. Coupled axial-torsion vibration of thin-walled z section beam induced by boundary conditions. *Thin Walled Structures*, 45:573–583, 2007a.
- Chen H. y Hsiao K. Quadruply coupled linear free vibrations of thin walled beams with generic open section. *Engineering Structures*, 30:1319–1334, 2007b.
- Christiano P. y Culver C. Horizontally curved bridges subject to moving load. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 1969.
- Clough R. y Penzien J. *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill, Singapore, 1975.
- de Borbón F. *Vigas de pared delgada y sección abierta cargadas axialmente*. Tesis de Maestría, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, 2008.
- de Borbón F., Ambrosini R., y Mirasso A. Elemento finito para vigas de pared delgada doblemente asimétricas cargadas axialmente. *Mecánica Computacional. Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones, ENIEF*, 27:1921–1941, 2008.
- Ebner A. y Billington D. Steady state vibrations of damped timoshenko beams. *Journal of the Structural Division, ASCE*, 1968.
- Erkmen R. y Mohareb M. Buckling analysis of thin walled open members- a finite element formulation. *Thin Walled Structures*, 2008.
- Fish J. y Belytschko T. *A first course in Finite Elements*. John Wiley & Sons Ltd, England, 2007.
- HPVEE. *HPVEE. Advanced programming techniques*. Hewlett-Packard, 1998.
- Jun L., Wanyou L., y Rongying S. Honginxing H. Coupled bending an torsional vibration of nonsymmetrical axially loads thin-walled bernoulli-euler beam. *Mechanics Research Communication*, 31:697–711, 2004.
- Kim M., Yun H., y Kim N. Exact dynamic and static element stiffness matrices of nonsymmetric thin-walled beam-columns. *Computers and Structures*, 81:1425–1448, 2003.
- Kim N. y Kim M. Exact dynamic/static stiffness matrices of nonsymmetric thin-walled beams

- considering coupled shear deformation effects. *Thin Walled Structures*, 43:701–734, 2005.
- Kim S. y Kim M. Improved formulation for spatial stability and free vibration of thin-walled tapered beams and space frames. *Engineering Structures*, 22:446–458, 2000.
- Pestel E. y Leckie F. *Matrix Methods in Elastomechanics*. McGraw Hill, 1963.
- Prokić A. On fivefold coupled vibrations of timoshenko thin-walled beams. *Engineering Structures*, 28:54–62, 2006.
- Sapountzakis E. y Mokos V. 3-d beam element of composite cross section including warping and shear deformation effects. *Computers and Structures*, 85:102–116, 2007.
- Tanaka M. y Bercin A. Free vibration solution for uniform beams of nonsymmetrical cross section using mathematica. *Computers and Structures*, 71:1–8, 1999.
- Vlasov V. *Thin-walled Elastic Beams*, volumen 2. Israel Program for Scientific Translations, 1963.
- Yaman Y. Vibrations of open-section channels: A coupled flexural and torsional wave analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 204:131–158, 1997.
- Yoo C. y Fehrenbach J. Natural frequencies of curved girders. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 1982.
- Zienkiewicz O. y Taylor R. *The finite element method*, volumen I. McGraw Hill, 1994.