

DETECCIÓN DE FALLAS EN VIGAS DE FUNDACIÓN ELÁSTICA MEDIANTE EL METODO INVERSO

Claudio J. Orbanich^{a, b}, Marta B. Rosales^{a, b}, Néstor F. Ortega^a, Carlos P. Filipich^{a, c}

^a *Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253,
8000 Bahía Blanca, Argentina (nfortega@criba.edu.ar)*

^b *CONICET*

^c *CIMTA, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional, 8000 Bahía Blanca, Argentina*

Palabras Claves: Viga de Fundación, Detección de Fallas, Hormigón Armado, Dinámica Estructural.

Resumen: El análisis de frecuencias naturales medidas experimentalmente está siendo utilizado extensivamente, en las últimas décadas, como un criterio para la detección de fisuras. Una de las razones es la relativa sencillez que presenta la medición de frecuencias, en comparación con otros parámetros dinámicos y con los estáticos. Es importante contar con un método no destructivo para monitorear la salud estructural y en especial en estructuras de fundación. Primeramente, se plantean las ecuaciones gobernantes del modelo y se emplea un método basado en series de potencia para obtener la solución para un conjunto de datos dado, sea la constante del resorte, la ubicación de la fisura o la frecuencia, tomados de a dos. Como es sabido existen relaciones provenientes de la Mecánica de Fractura que vinculan el tipo y magnitud de la fisura y la constante elástica del elemento estructural analizado. En este trabajo se ha desarrollado un algoritmo que utiliza series de potencias en la solución del problema directo, que luego resulta eficiente en la resolución del problema inverso. En una primera aproximación, las mediciones experimentales fueron suplantadas por una simulación numérica realizada con el Método de los Elementos Finitos, que resuelve una viga apoyada sobre una fundación elástica con y sin daño, obteniéndose las primeras tres frecuencias flexionales. Otro caso utiliza un modelo experimental de una viga de hormigón armado simplemente apoyada a escala reducida, determinando sus frecuencias naturales a través de mediciones experimentales. En ambos casos, los valores de las frecuencias serán los datos de ingreso en el algoritmo del método inverso. Surgen así tres curvas cuya intersección permite hallar la longitud y la ubicación de la fisura. Cabe acotar que el efecto de la fisura es modelado analíticamente, introduciendo un resorte rotacional en la viga apoyada sobre una fundación elástica, tipo Winkler. Desde el punto de vista de realizar una simulación del primer caso, se desarrolló un modelo numérico con el Método de los Elementos Finitos, introduciendo una fisura discreta en la viga de fundación. En el segundo caso, la fisura se alcanzó con un estado de cargas estáticas.

1 INTRODUCCION

Una estructura dañada presenta, entre otros cambios, una rigidez relativa menor que la misma sin daño; esto se evidencia, entre otros efectos, por su respuesta estática y dinámica.

Varios métodos están basados en parámetros estructurales tales como la masa, la rigidez, el módulo de elasticidad y en parámetros modales, como las frecuencias naturales, las formas modales y el amortiguamiento modal. En los trabajos de Salawu, 1997; Doebling, 1998 y Patil and Maiti 2005, Kim *et al.*, 2006, se reportan varias investigaciones, que han abordado el problema con técnicas diversas.

El criterio de estimación de la ubicación y la profundidad de la fisura analizando los cambios en las frecuencias naturales medidas en el componente estructural dañado, ha sido ampliamente utilizado en los últimos años. Una de las razones es que las frecuencias son, parámetros dinámicos de sencilla obtención a través de mediciones. Su determinación experimental, para un elemento fisurado dado, es relativamente directa. Sin embargo el problema inverso para la determinación de los parámetros de la fisura (ubicación y profundidad) para un conjunto dado de frecuencias medidas en el elemento dañado, no es tan simple. Para obtener resultados significativos debe utilizarse un modelo aceptable y una técnica numérica eficiente.

Un modelo simple y ampliamente aceptado es la representación de la disminución de la rigidez en el lugar de la fisura, a través de un resorte rotacional. En el problema directo, si la constante del resorte y su ubicación fueran conocidas, la resolución del algoritmo daría como resultado las frecuencias naturales del sistema estructural. En la disciplina Mecánica de Fractura puede determinarse una equivalencia entre la constante del resorte y la profundidad de la fisura, para cierto tipo de problemas. Por ello, conocida la profundidad de la fisura puede obtenerse un valor de la constante del resorte equivalente y viceversa.

Rytter (1993) clasificó a la detección de daño en cuatro niveles: el nivel 1 tiene en cuenta la existencia del daño en la estructura, el nivel 2 es el nivel 1 más la localización del daño, en el nivel 3 se le suma al nivel 2 la cuantificación de la severidad del daño y el nivel 4, que es el nivel 3 más la predicción de la vida útil de la estructura; éste se puede considerar desacoplado de los niveles anteriores. Como el objetivo del trabajo es la detección de una fisura, tanto en su ubicación como profundidad o largo (nivel 3), se plantea un método inverso; es decir, conocida la respuesta, se obtienen los datos de la fisura. Primeramente se encuentra el algoritmo de la solución del problema directo. Ese mismo algoritmo se utiliza luego para el problema inverso, ingresando como datos valores de frecuencias naturales, medidos en la probeta en estudio. Los resultados serán: la ubicación y el valor de la constante del resorte. Utilizando la equivalencia proveniente de la teoría de Mecánica de Fractura, se podrá obtener la profundidad de la misma.

En el problema de vibraciones de vigas de fundación, considerando la fisura como equivalente a un resorte rotacional intermedio, admitiendo la fisura abierta y que la constante del resorte se mantiene invariante, se obtienen las tres primeras frecuencias naturales, a través de mediciones. Estos valores son ingresados como datos en el algoritmo desarrollado para resolver el problema inverso, es decir, predecir la longitud y la ubicación de la fisura, dadas las tres frecuencias naturales medidas.

En el primer caso analizado, se modela con el Método de los Elementos Finitos, los efectos de una fisura transversal en una viga de fundación, realizada en hormigón armado, apoyada sobre un medio elástico. Se desarrolla una aplicación para la detección y caracterización de las fisuras, aplicando un método inverso, que tiene como datos de ingreso mediciones experimentalmente. En el segundo caso, una viga de hormigón armado fue ensayada experimentalmente sin suelo, y con los resultados de frecuencia medidos se aplicó la técnica

arriba enunciada. En ambos casos los valores de los parámetros resultaron con precisión satisfactoria.

2 VIGA EN FUNDACIÓN ELÁSTICA: PLANTEO DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES

Se adoptó un modelo como el que se muestra en la Figura 1, donde se puede ver una viga apoyada sobre un suelo Winkler, cuyo módulo de rigidez es k_w [kg/m^3], a la cual se le introduce un resorte rotacional, simulando el efecto mecánico de una fisura, que produce un cambio en la flexibilidad de la sección dañada. Para resolver este problema se caracteriza al resorte con una constante elástica k_r , a la densidad del material de la viga (ρ) y Módulo de Elasticidad (E); para generalizar el problema se ha supuesto que la viga tiene dos tramos con distintas secciones ($F1$ y $F2$), inercias ($J1$ y $J2$) y longitudes ($L1$ y $L2$), como se puede apreciar en la Figura 1.

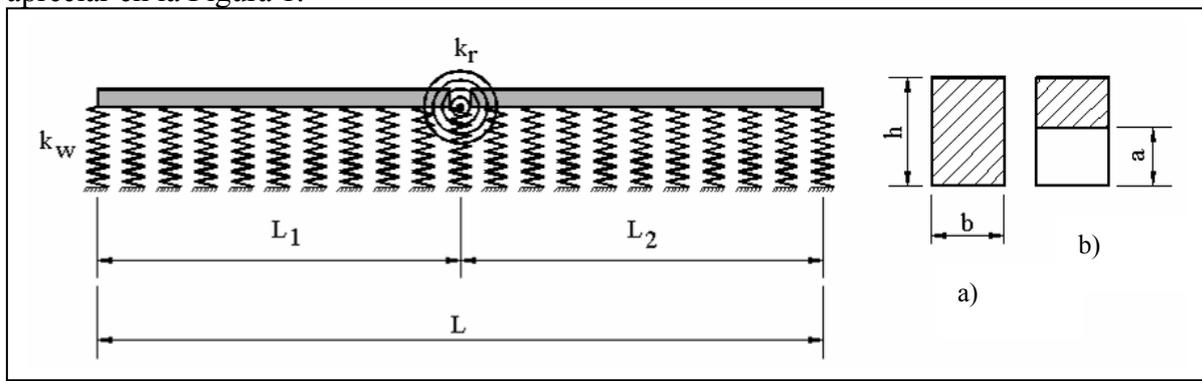


Figura 1: Viga de fundación Winkler, con un resorte rotacional intermedio. a) Sección transversal no dañada; b) sección con fisura de profundidad a .

Las ecuaciones que gobiernan el problema de vibraciones naturales del sistema viga-resorte aquí empleado, a partir de encontrar el extremo del funcional energético, son:

$$EJv_{1XXXX} + \bar{w}v_1 + \rho A\ddot{v}_1 = 0; \quad Ev_{2XXXX} + \bar{w}v_2 + \rho A\ddot{v}_2 = 0 \quad (1)$$

Donde el subíndice X indica derivación respecto a la variable espacial y el punto, derivación respecto a la variable temporal. Para adimensionalizar las ecuaciones gobernantes, se utilizan los siguientes parámetros:

$$\alpha \equiv \frac{L_1}{L}; \quad \beta = \frac{L_2}{L} = 1 - \alpha; \quad x \equiv \frac{X}{L}; \quad k = \frac{k_r L_1}{EJ_1}$$

En el Tramo 1 (T1) $0 \leq x \leq L_1$

$$x_1 = \frac{x}{L_1} \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \quad \text{donde} \quad x_1 = \frac{x}{\alpha L} \quad x_1 = \frac{x}{\alpha}$$

En el Tramo 2 (T2) $L_1 \leq x \leq L$

$$x_2 = \frac{X - L_1}{L_2} = \frac{X - L_1}{(L - L_1)} \quad 0 \leq x_2 \leq 1 \quad \text{donde} \quad x_2 = \frac{x - L_1}{(1 - \alpha)L} \quad x_2 = \frac{x - \alpha}{1 - \alpha}$$

$$\text{En T1: } (\cdot)_X = \frac{(\cdot)'_1}{\alpha L}; \quad \text{en T2: } (\cdot)_X = \frac{(\cdot)'_2}{(1-\alpha)L}$$

Las ecuaciones que gobiernan el sistema son, entonces:

$$\begin{aligned} v_1'''' - \alpha^4 \lambda^2 v_1 &= 0 & v_2'''' - (1-\alpha)^4 \lambda^2 v_2 &= 0 \\ v_1 &= v_1(x_1); \quad \lambda^2 \equiv \Omega^2 - w; & v_2 &= v_2(x_2) \end{aligned} \quad (2)$$

siendo $\Omega^2 \equiv \rho A \omega^2 L^4 / EJ$; $w \equiv \bar{w} L^4 / EJ$. Del cálculo de variaciones se obtienen las siguientes condiciones de borde

$$\begin{aligned} v_1''(0) &= 0; \quad v_1'''(0) = 0 \\ v_2''(1) &= 0; \quad v_2'''(1) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

y condiciones de continuidad, para $X=0$ ($x_1=1, x_2=0$) con $k=k^* L_1 / EJ$, (recordando que $0 \leq x_1 \leq 1$ y $0 \leq x_2 \leq 1$)

$$\begin{aligned} v_2(0) &= v_1(1), \\ v_2''(0) &= k \frac{1-\alpha}{\alpha} \left[v_2'(0) - \frac{1-\alpha}{\alpha} v_1'(1) \right], \quad v_2''(0) = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha^2} v_1''(1) \\ v_2'''(0) &= \frac{(1-\alpha)^3}{\alpha^3} v_1'''(1) \end{aligned} \quad (4)$$

3 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DIRECTO UTILIZANDO UN ALGORITMO DE SERIES DE POTENCIAS

Las series de potencia son una herramienta ampliamente conocida y utilizada en la mecánica estructural, Filipich y Rosales (Filipich and Rosales, 2002; Filipich et al., 2004; Rosales and Filipich, 2003; Rosales et al. 2003) han usado esta herramienta en la solución de problemas altamente no lineales. En el problema que se está tratando en esta investigación, las ecuaciones son lineales y la ventaja del enfoque empleando las series de potencia es la simplicidad algebraica, que tiene una rápida convergencia y por ello, un reducido tiempo computacional, características que son relevantes en la resolución del problema inverso.

Las incógnitas del problema son las funciones $v_1(x_1)$ y $v_2(x_2)$ que representan la deformación modal en cada tramo de la viga. Estas funciones son expandidas en serie de potencias, de la siguiente manera:

$$v_1(x) = \sum_{i=0}^M A_{1i} x_1^i; \quad v_2(x) = \sum_{i=0}^M A_{2i} x_2^i \quad (5)$$

Una vez reemplazadas las Ecs. (5) en el sistema diferencial gobernante (Ecs. (2-4)), se obtiene las siguientes ecuaciones de recurrencia:

$$A_{1(i+4)} = \frac{\alpha^4 \lambda^2 A_{1i}}{\varphi_{4i}} \quad (6)$$

$$A_{2(i+4)} = \frac{(1-\alpha)^4 \lambda^2 A_{2i}}{\varphi_{4i}} \quad (7)$$

donde $\varphi_{lk} = (k+l)!/k!$, siendo k, l números enteros. Las condiciones de continuidad conducen a:

$$A_{20} = \sum_{i=0} A_{1i}, \quad A_{21} = \frac{(1-\alpha)}{k\alpha^2} \left[\sum_{i0} \varphi_{2i} A_{1(i+2)} + k\alpha \sum \varphi_{1i} A_{1(i+1)} \right], \quad (8)$$

$$A_{22} = \frac{(1-\alpha)^2}{k\alpha^2} \sum_{i0} \varphi_{2i} A_{1(i+2)}, \quad A_{23} = \frac{(1-\alpha)^3}{6\alpha^3} \sum_{i0} \varphi_{3i} A_{1(i+3)}$$

En las ecuaciones (6) y (7) se puede ver que las incógnitas son A_{ij} con $i = 1, 2$ y $j=0, 1, 2, 3$ y el autovalor λ . A_{10}, A_{11}, A_{12} y A_{13} se obtienen de las condiciones de borde y las restantes condiciones de contorno. En definitiva, teniendo como datos la posición del resorte α y su constante de rigidez $k = \frac{k_r L_1}{EJ_1}$, pueden obtenerse los autovalores λ del problema. Esto es lo que se conoce como solución del problema directo. Inversamente, si se conocen (λ y α) o (λ y k), se podrían obtener los parámetros k o α , respectivamente. De esta forma, se resuelve el problema inverso.

4 PROBLEMA INVERSO

Como se expresó anteriormente, el uso de las frecuencias naturales como criterio para la detección de fallas, ha sido ampliamente usado en las últimas décadas. La detección de la fisura puede plantearse como un problema inverso. El procedimiento a emplearse es el siguiente:

- Se realiza la medición de las tres primeras frecuencias naturales, del elemento estructural fisurado (o presuntamente fisurado);
- Cada una de estas frecuencias se introducen como datos en el algoritmo;
- Para cada frecuencia se obtiene una curva k vs. α , que se grafica.
- Los puntos de cruce de las tres curvas permite obtener los valores buscados. En este caso y dado que para la precisión deseada ese cruce no es un punto, se halla el baricentro del triángulo que encierran las tres curvas, la cual indica la posición del resorte (equivalente a la fisura) α y la rigidez k (directamente relacionado con la profundidad de la fisura a).
- Una vez que se encontró dicho punto y con ello, se establecieron los valores de α y k , el tamaño de la fisura (profundidad), puede ser estimado de una relación entre ésta y la rigidez del resorte rotacional equivalente, como por ejemplo la siguiente (Ostachowicz and Krawczuk, 1991), con $r = a/h$

$$k = \frac{Eb h^2}{72\pi f(r)} \quad (9)$$

siendo

$$f(r) = 0.6384r^2 - 1.035r^3 + 3.7201r^4 - 5.1773r^5 + 7.553r^6 - 7.3324r^7 + 2.4909r^8$$

5 DETECCIÓN DE FALLAS UTILIZANDO COMO DATOS FRECUENCIAS HALLADAS CON UN MODELO COMPUTACIONAL

En este apartado se modeló, con el Método de los Elementos Finitos, mediante el Software Algor (ALGOR, 2007), una viga de fundación apoyada sobre un medio elástico en estado sano, cuyas sección es de 0,20 m por 0,30 m, por 4,00 m de longitud, siendo el material adoptado hormigón armado, al que se considera como homogéneo, continuo e isótropo, siendo: $E = 3,10 \times 10^{10}$ [N/m²]; $\nu = 0,15$ y $\rho = 2351$ [Kg/m³].

A los efectos de tener en cuenta el modelado computacional de la estructura y homogenizar los valores característicos de la viga de fundación apoyada sobre un medio elástico, se utilizó el procedimiento de “zero setting”, en forma similar a lo realizado por Nandwana and Maiti (1997). Por ello, se calcularon las frecuencias de una viga de fundación apoyada sobre un medio elástico sin fisuras, con la fórmula teórica (e.g. Blevins, 1979) y se obtuvo dicho factor, mediante una relación entre las frecuencias teóricas y las frecuencias calculadas por el Método de los Elementos Finitos, tal como lo muestra la Ecuación (10).

$$Z_i = \frac{\omega_{Teor}}{\omega_{MEF}} = \frac{\Omega_{Teor}}{\Omega_{MEF}} \quad (10)$$

En este caso, las frecuencias teóricas adimensionales para una viga de fundación apoyada en un medio elástico, son $\Omega_1^A = 23,1625$, $\Omega_2^A = 61,96350$, $\Omega_3^A = 121,05192$.

Por otro lado, las frecuencias adimensionalizadas, calculadas por el Método de los Elementos Finitos de la viga sana con las características anteriores, son

Los valores de ajuste, para este caso son: $Z_1 = 1,01885$, $Z_2 = 1,06196$, $Z_3 = 1,10972$.

Luego fue generada una fisura discreta de 1mm de espesor y se fue variando la longitud de la misma, para una fisura ubicada a una distancia x de 3m del apoyo, calculando en cada caso, las primeras tres frecuencias naturales (ω_{MEF}) y los respectivos modos de vibración, Para cada modelo se calcularon las frecuencias adimensionalizadas $\Omega_i^A = 2\pi L^2 \sqrt{\frac{\rho F}{EJ}} \omega = 0.316348\omega$. Las frecuencias adimensionalizadas calculadas (Ω_i^A) son luego afectadas por los factores “zero setting (Z)” y se obtienen las frecuencias adimensionalizadas corregidas (Ω_i), cuyos valores se muestran en la Tabla 1.

En la Figura 2 se muestra un ejemplo de los modos de vibración hallados para las vigas de fundación, apoyadas sobre un medio elástico. Aparecen dibujados además los símbolos que representan a los resortes equivalentes de la fundación tipo Winkler.

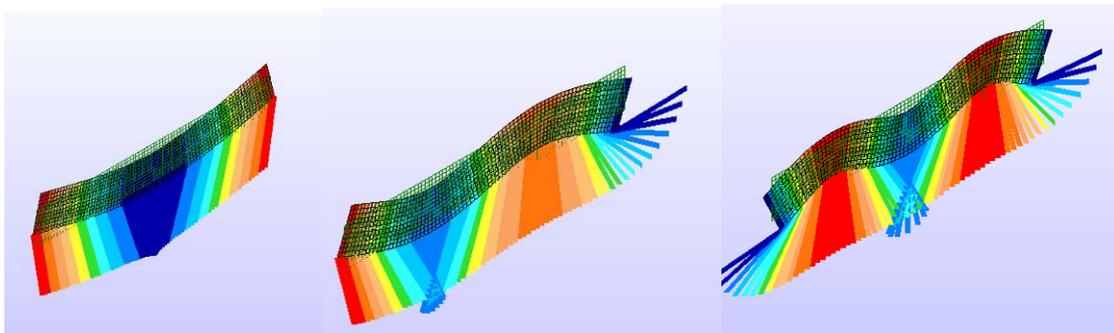


Figura 2: Modos de Vibración para una viga de 20cm x 30cm con una fisura en $x = 3$ m.

Las frecuencias adimensionalizadas corregidas se introducen en un programa realizado en ambiente Matlab, que tiene en cuenta el algoritmo del Método Inverso y obteniéndose una curva con la variación de k (rigidez del resorte) en función de α (ubicación del resorte, $L1/L$). A continuación se verá para cada modelo analizado las tres curvas obtenidas para cada frecuencia. Es interesante destacar que el punto donde se cruzan las tres curvas da la ubicación y el tamaño (indirectamente) de la fisura.

Modelo	x [m]	prof = a [m]	ω MEF	Ω_i^A MEF	Modo	Factor Z	Ω_i MEF
I	3	0,05	71,3976	22,5864	1	1,01885	23,0122
	3	0,05	181,030	57,2684	2	1,06196	60,8168
	3	0,05	339,473	107,3916	3	1,10972	119,1746
II	3	0,1	68,8279	21,7735	1	1,01885	22,1839
	3	0,1	170,823	54,0395	2	1,06196	57,3877
	3	0,1	325,613	103,007	3	1,10972	114,3089
III	3	0,15	66,2839	20,9687	1	1,01885	21,3634
	3	0,15	153,518	48,5651	2	1,06196	51,5742
	3	0,15	307,017	97,1242	3	1,10972	107,7807
IV	3	0,2	58,540	18,5190	1	1,01885	18,8681
	3	0,2	131,878	41,7193	2	1,06196	44,3042
	3	0,2	288,253	91,1882	3	1,10972	101,1934

Tabla 1: Frecuencias Naturales de una viga de fundación, en función de la ubicación y la profundidad de la fisura

5.1 Resultados de la detección de fisura en una viga en fundación elástica. Modelos I, II, III y IV.

En la Figura 3 se observan las curvas k vs. α correspondiente a las tres frecuencias ingresadas al algoritmo, donde se pueden ver dos puntos de cruce de las mismas correspondiente al Modelo I. Es interesante destacar que estas curvas son similares en los cuatro modelos, cambiando solamente las coordenadas del eje k , por tal motivo se considera esta figura, representativa de los cuatro modelos. Luego, se mostrarán vistas ampliadas de la zona de cruce, para cada modelo.

En la Figura 4 se puede ver, ampliada, la zona de encuentro de las tres curvas, observando que la ubicación de la fisura está en $\alpha = 0,252$, por lo que se puede decir que la fisura se encuentra a una distancia de 1,008 m del apoyo derecho, siendo el error: $\varepsilon_l = (\hat{L}_1 - L_1) / L = (1,008 - 1) \times 100 / 4$ del 0,2 %.

Después de localizar la fisura y con los valores de α y k , el tamaño de la fisura (profundidad "a") se estimó mediante una relación entre ésta y la rigidez del resorte rotacional, equivalente tal como se mostró en la Ecuación (9). Resolviendo dicha ecuación se obtiene el valor de la profundidad de la fisura, siendo esta de 0,046 m de longitud, con un error $\varepsilon_a = (\hat{a} - a) / h = (0,046 - 0,05) \times 100 / 0,3 = -1,3$ %. Se considera que posee una adecuada precisión.

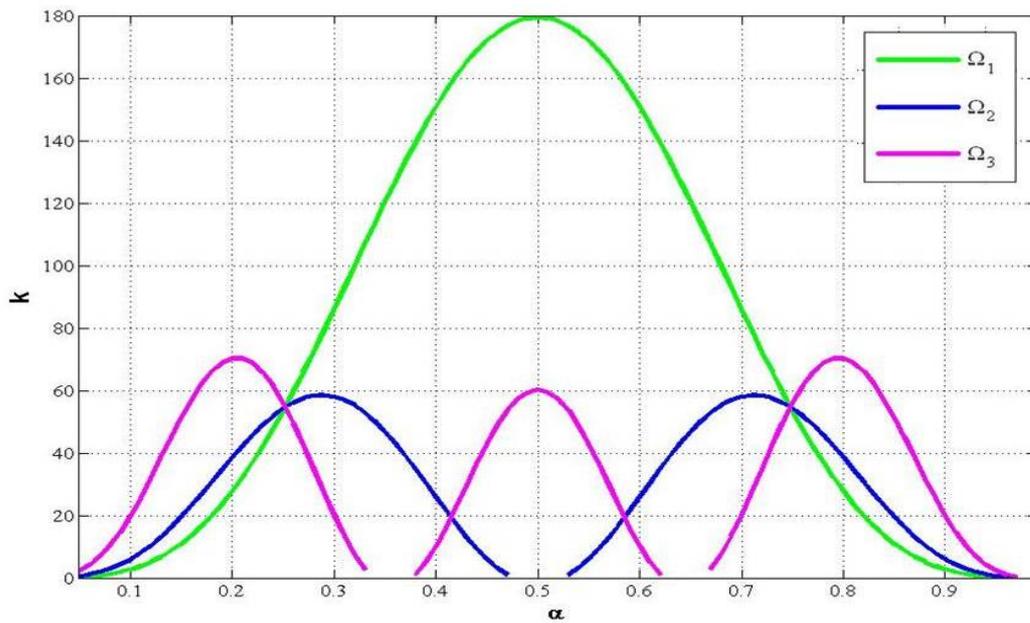


Figura 3: Modelo I. Variación de k en función de α . Curvas para las tres primeras frecuencias naturales.

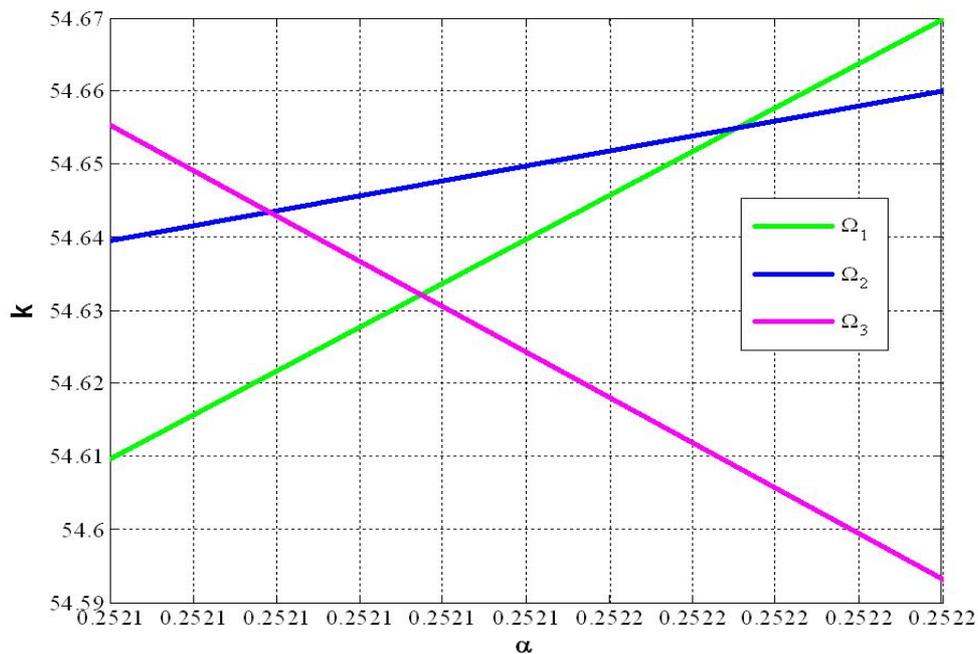


Figura 4: Idem Figura 3. Vista ampliada del cruce de las tres curvas.

En la Figura 5 se puede ver el cruce de las tres curvas correspondiente al Modelo II, y puede deducirse que la ubicación de la fisura está a $\alpha = 0,270$, o sea la fisura se encuentra a una distancia de 1,083 m del apoyo derecho, siendo el error igual a 2 %. La profundidad de la fisura es de 0,098 m. de longitud con un error de -0,6 %.

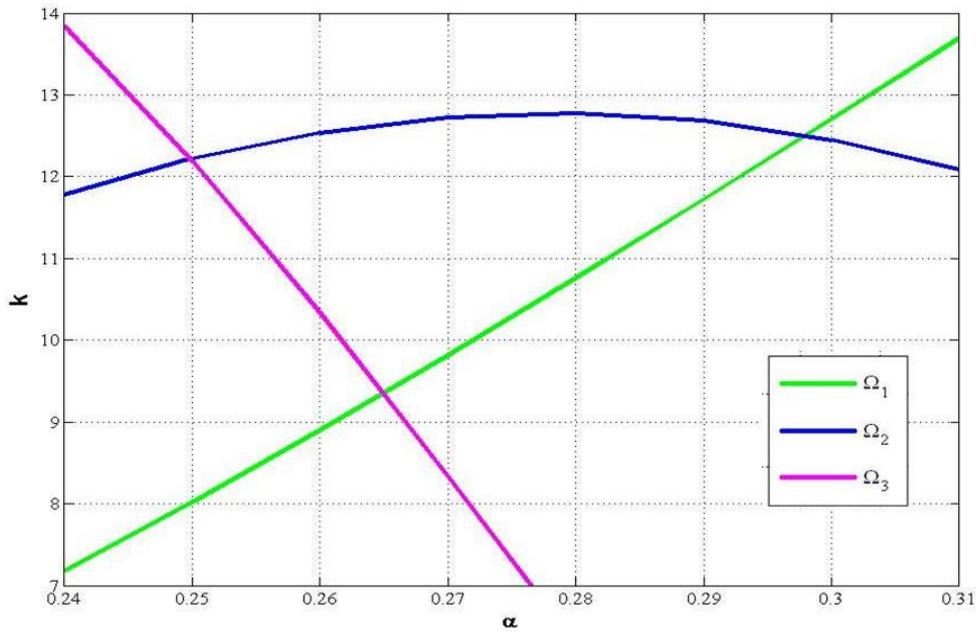


Figura 5: Vista ampliada de la zona de cruce de las curvas k vs. α , para el Modelo II.

El cruce de las tres curvas para el Modelo II puede verse en la Figura 6. Se encuentra que la ubicación de la fisura está a $\alpha = 0,2468$, o sea a una distancia de 0,9872 m del apoyo derecho, siendo el error igual a -0,32 %. El valor de la profundidad de la fisura resulta ser de 0,149 m de longitud, con un error de -0,33 %.

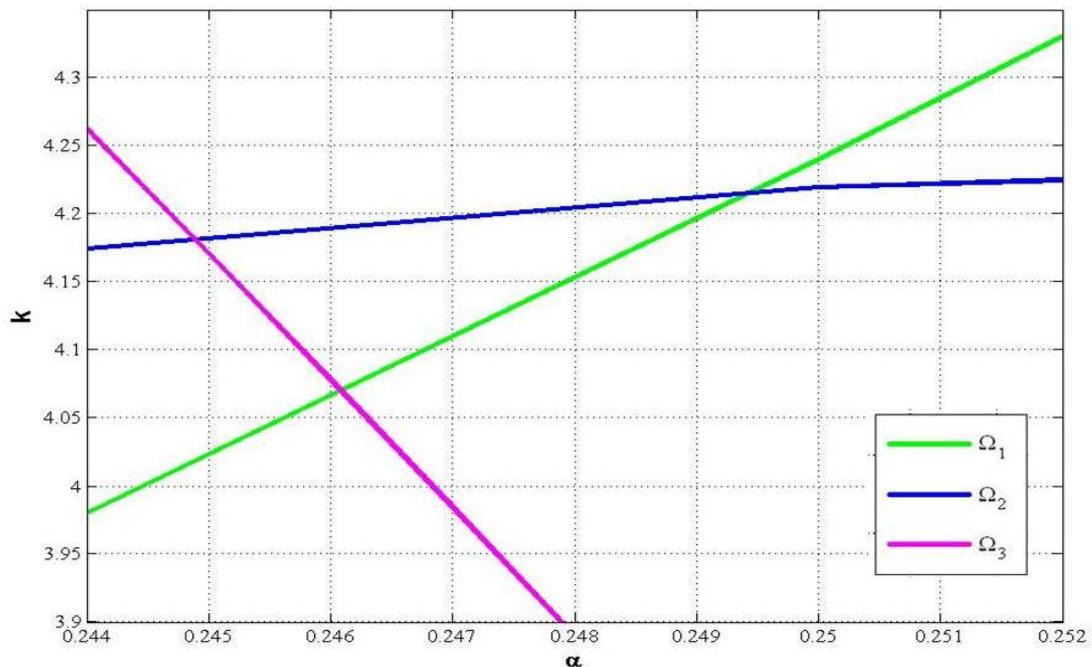


Figura 6: Vista ampliada de la zona de cruce de las curvas k vs. α , para el Modelo III.

En la Figura 7 se puede ver el cruce de las tres curvas para el caso del Modelo IV, y observar que la ubicación de la fisura está a $\alpha = 0,240$, encontrándose la fisura a una distancia de 0,96 m del apoyo derecho, con un error de -1 %. La profundidad de la fisura es de 0,223 m de longitud con un error de 7,7 %.

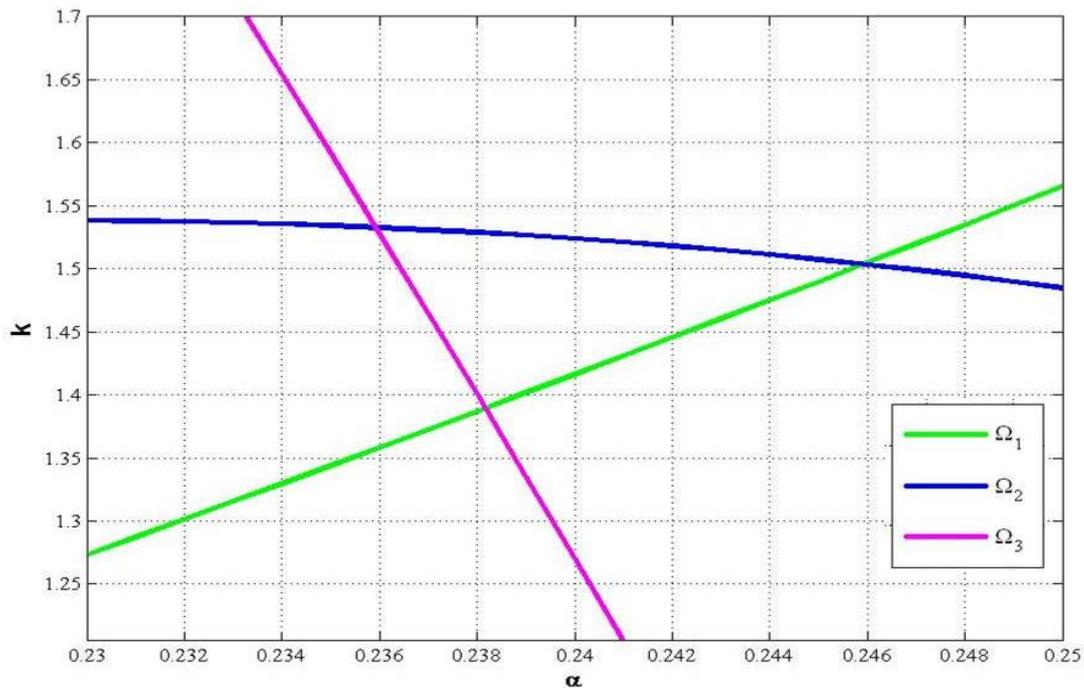


Figura 7: Vista ampliada de la zona de cruce de las curvas k vs. α , para el Modelo IV

6 DETECCIÓN MEDIANTE EL MÉTODO INVERSO A PARTIR DE DATOS EXPERIMENTALES

En la Figura 8 se presenta una viga ensayada en el Laboratorio de Modelos Estructurales de la UNS, a los efectos de detectar una fisura con nivel 3, (detección, localización y cuantificación de la fisura), empleando un método inverso, desarrollado en forma numérica en los puntos anteriores para vigas de fundación. Cabe acotar que en este caso, se realizó una viga rectangular simplemente apoyada, por razones constructivas y para poder materializar el ensayo, con el equipamiento disponible en el laboratorio y calcular sus frecuencias naturales teóricas, se adoptó el esquema estructural indicado en la Figura 9. Si bien se trata de un experimento con una viga sin considerar el suelo, este permite calibrar futuros ensayos experimentales sobre vigas de fundación.



Figura 8: Modelo de una viga simplemente apoyada simulando una fisura en el centro

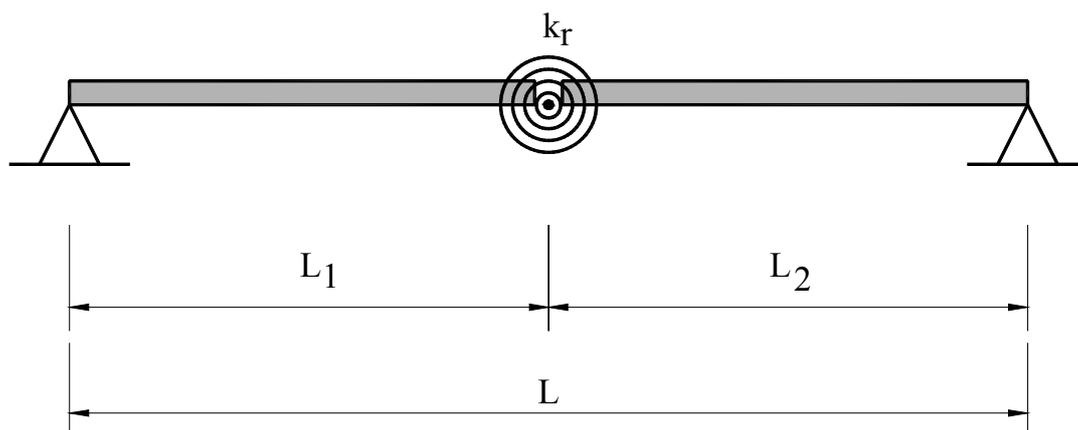


Figura 9: Viga con un resorte rotacional de constante k en la mitad de la luz

Para calcular las frecuencias teóricas se halló la sección homogenizada de la viga de hormigón armado, los datos para la sección de hormigón son de 16,3 cm de ancho por 8 cm de alto, la sección superior de acero es de $0,6411 \text{ cm}^2$ (1 Ø 8 + 1 Ø 4,2), igual a la sección inferior. Para el cálculo de la sección equivalente se aplicaron las siguientes formula:

$$b_{eqh} = \frac{E_H}{E_a} b_h = 1,9404 \text{ cm}^2 \quad (11)$$

$$A_{eq} = A_{a\ sup} + A_{a\ inf} + b_{eqh} h_h = 17,1941 \text{ cm}^2 \quad (12)$$

$$I_{eq} = 2A_a \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{b_h h^3}{12} = 99,2121 \text{ cm}^2 \quad (13)$$

Luego se calcularon las frecuencias teóricas de una viga de hormigón armado simplemente apoyada, (e.g. Blevins, 1979).

Reemplazando los datos de la viga homogenizada se calculan las frecuencias naturales, arrojando los siguientes resultados que: $\omega_{1_T} = \pi^2 f = 42,206\text{Hz}$, $\omega_{2_T} = 4\pi^2 f = 168,824\text{Hz}$, $\omega_{3_T} = 9\pi^2 f = 379,856\text{Hz}$.

Para la medición experimental de las frecuencias, se colocó un acelerómetro a una distancia de $\frac{1}{4}$ de la luz, medida desde el apoyo izquierdo (Figura 10), y se excitó dinámicamente a una distancia de $\frac{1}{4}$ de la luz, medida desde el otro apoyo. El acelerómetro se conecta a un sistema de adquisición de datos Labquest Interfase (Lab-Q) y para el procesamiento de las frecuencias naturales de vibración se utilizó el programa LOGGER PRO (LOGGER PRO 3.6.1, 2008). En la Figura 11 se muestra el instrumental utilizado para el ensayo. Cabe acotar que la fisura que se está detectando, se la generó aplicando una carga puntual con la prensa hidráulica.



Figura 10: Acelerómetro conectado a $\frac{1}{4}$ de la luz desde el apoyo.



Figura 11: Instrumental utilizado para medición de las frecuencias naturales.

En la realización de estos ensayos, para que las frecuencias medidas sean más representativas, se tomó una cantidad importante de mediciones. Con los datos obtenidos se realizó un análisis de regresión y se hallaron las tres primeras frecuencias de la viga sana, arrojándonos los siguientes resultados: $\omega_{1_s} = 19,53\text{Hz}$, $\omega_{2_s} = 121,09\text{Hz}$, $\omega_{3_s} = 359,38\text{Hz}$. A los fines de observar las tres primeras frecuencias con mayor detalle, se muestran de las Figuras 12 a 14, las frecuencias naturales en un entorno de las mismas.

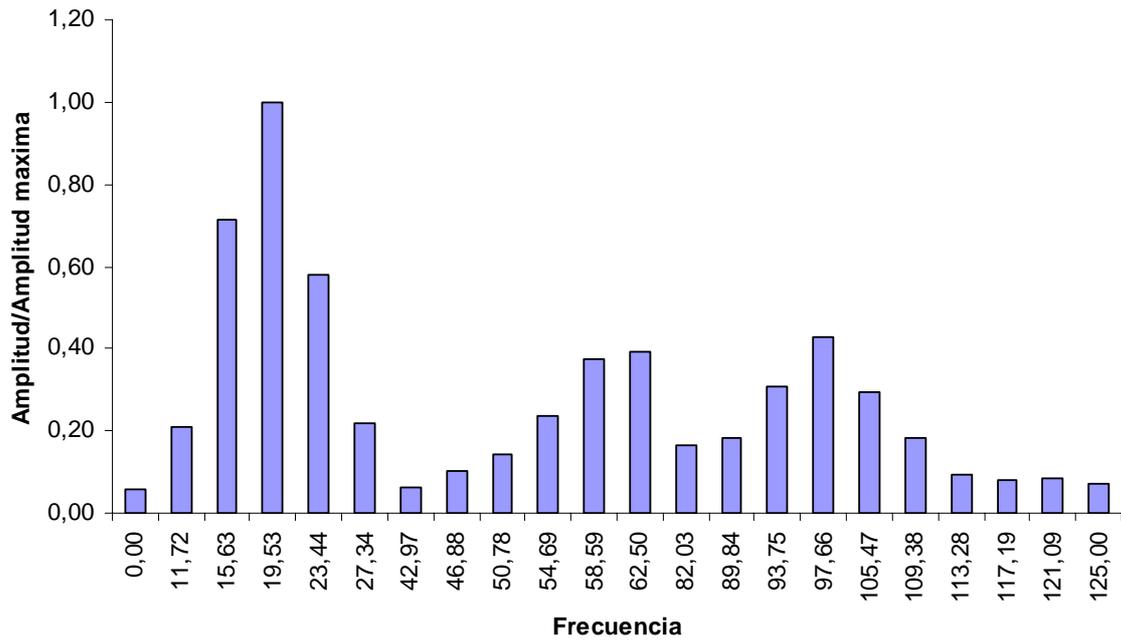


Figura 12: Primera frecuencia de la viga sana $\omega_{1_s} = 19,53\text{Hz}$.

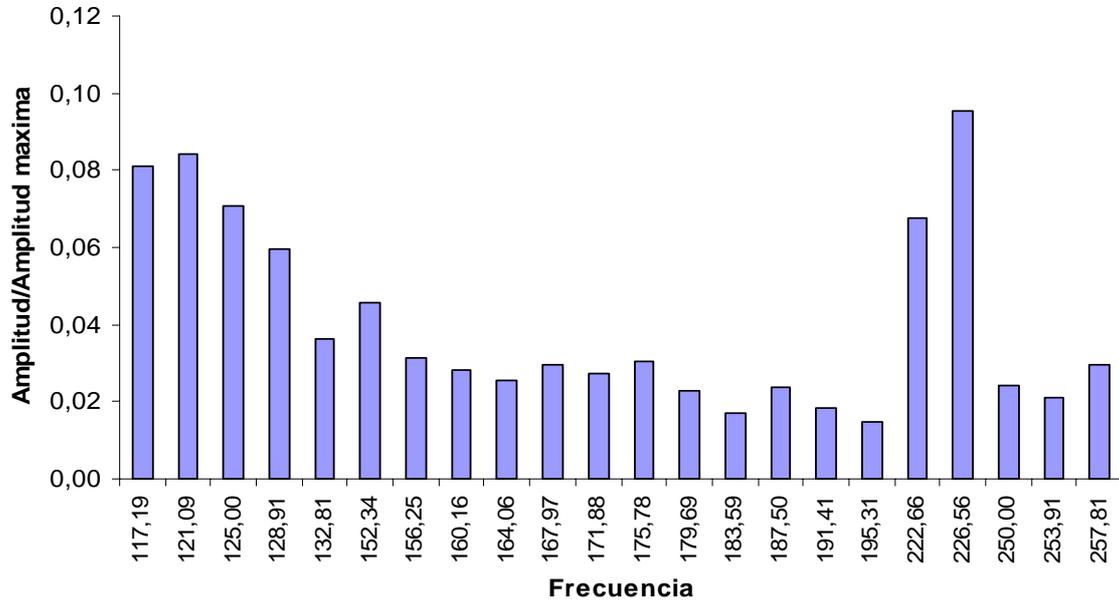


Figura 13: Segunda frecuencia de la viga sana $\omega_{2_s} = 121,09\text{Hz}$.

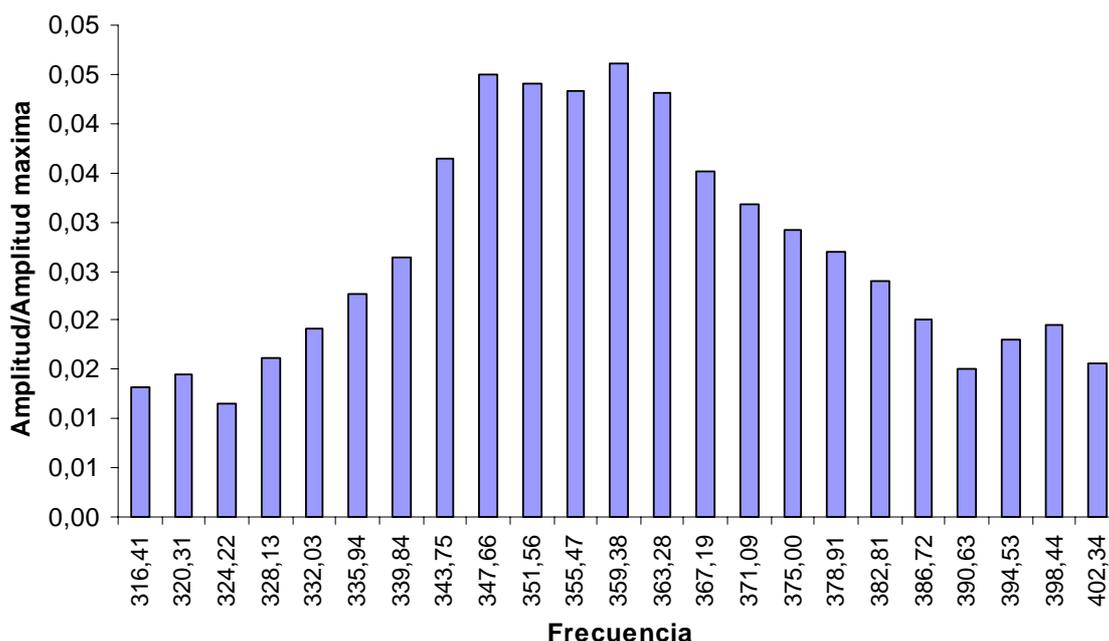


Figura 14: Tercera frecuencia de la viga sana $\omega_{1_s} = 359,38\text{Hz}$.

Una vez halladas las frecuencias teóricas, se calcularon los factores “zero setting”, cuyos valores para este caso son: $Z1 = 2,16$, $Z2 = 1,39$ y $Z3 = 1,06$.

Para lograr una fisura lo menos distribuida posible, se aplicó sobre la viga una carga concentrada en el centro de la misma y se midieron las frecuencias naturales, repitiendo las mediciones varias veces. Aplicando el procedimiento detallado anteriormente, se hallaron las tres primeras frecuencias de la viga fisurada, simplemente apoyada, cuyos resultados son $\omega_{1_f} = 15,63\text{Hz}$, $\omega_{2_f} = 117,19\text{Hz}$, $\omega_{3_f} = 316,41\text{Hz}$, estos resultados se muestran desde las Figuras 15 a 17.

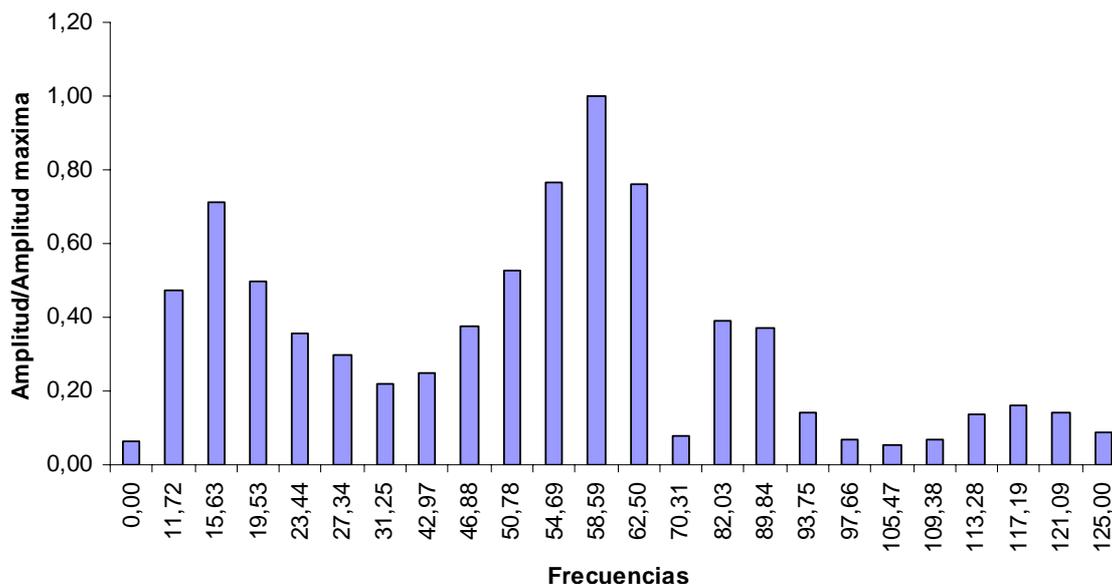
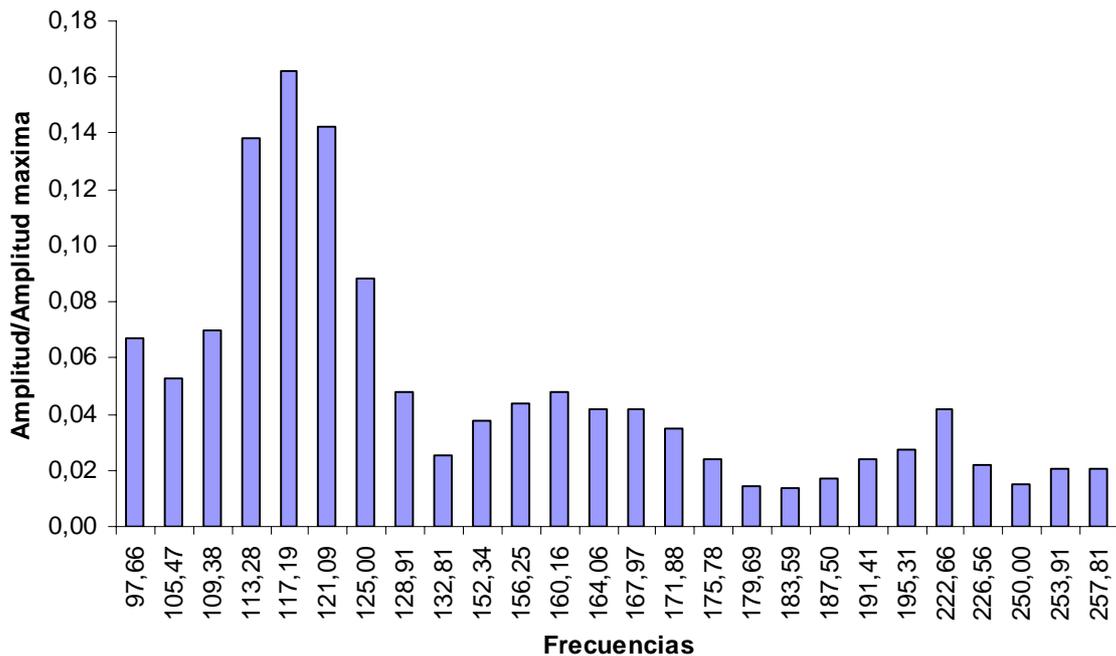
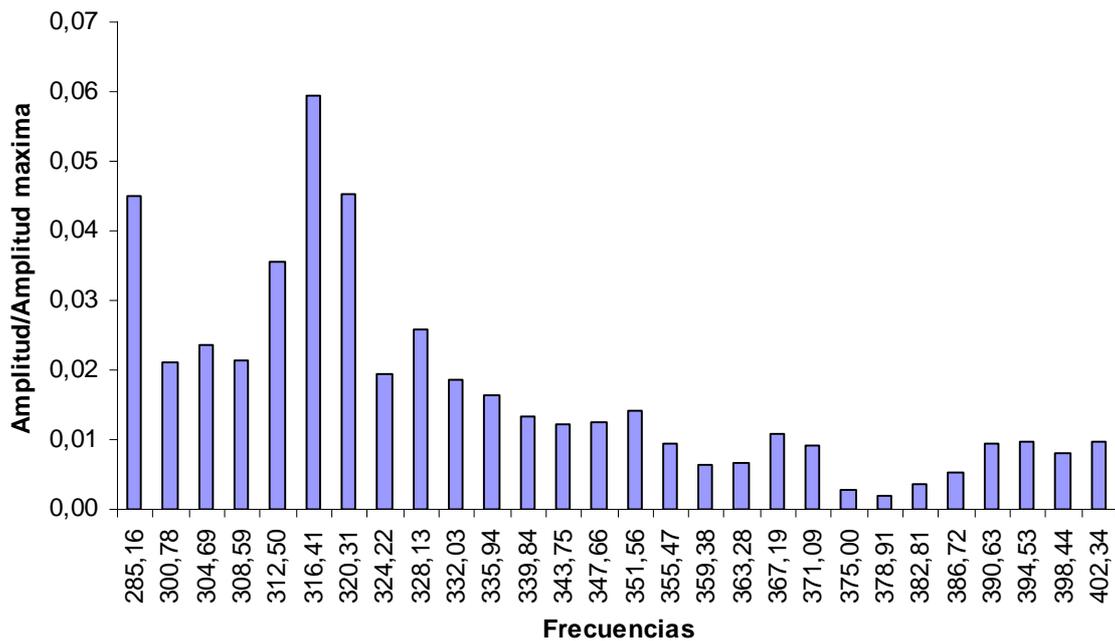


Figura 15: Primera frecuencia de la viga fisurada $\omega_{1_f} = 15,63\text{Hz}$

Figura 16: Segunda frecuencia de la viga fisurada $\omega 2_f = 117,19\text{Hz}$ Figura 17: Tercera frecuencia de la viga fisurada $\omega 3_f = 316,41\text{Hz}$

Una vez halladas las frecuencias, en forma experimentales, se les aplicaron los factores “zero setting”, calculados anteriormente y se obtuvieron las frecuencias corregidas de la viga fisurada, cuyos valores para este caso son: $\omega 1_{fc} = 33,78\text{Hz}$, $\omega 2_{fc} = 163,39\text{Hz}$, $\omega 3_{fc} = 334,44\text{Hz}$, dividiendo a estos valores por el factor $f = 1/\Omega = 4,2763$, se obtienen las frecuencias adimensionales corregidas: $\Omega_1 = 7,8987\text{Hz}$, $\Omega_2 = 38,2068\text{Hz}$, $\Omega_3 = 78,2055\text{Hz}$.

Estas frecuencias se introducen en el un programa realizado en ambiente Matlab, que tiene

en cuenta el algoritmo de un método inverso, con el que se obtiene una curva de la variación de k (rigidez del resorte), en función de α (ubicación del resorte, L_1/L).

En la Figura 18 se observan las tres curvas obtenidas para cada frecuencia. Existen dos puntos de cruce.

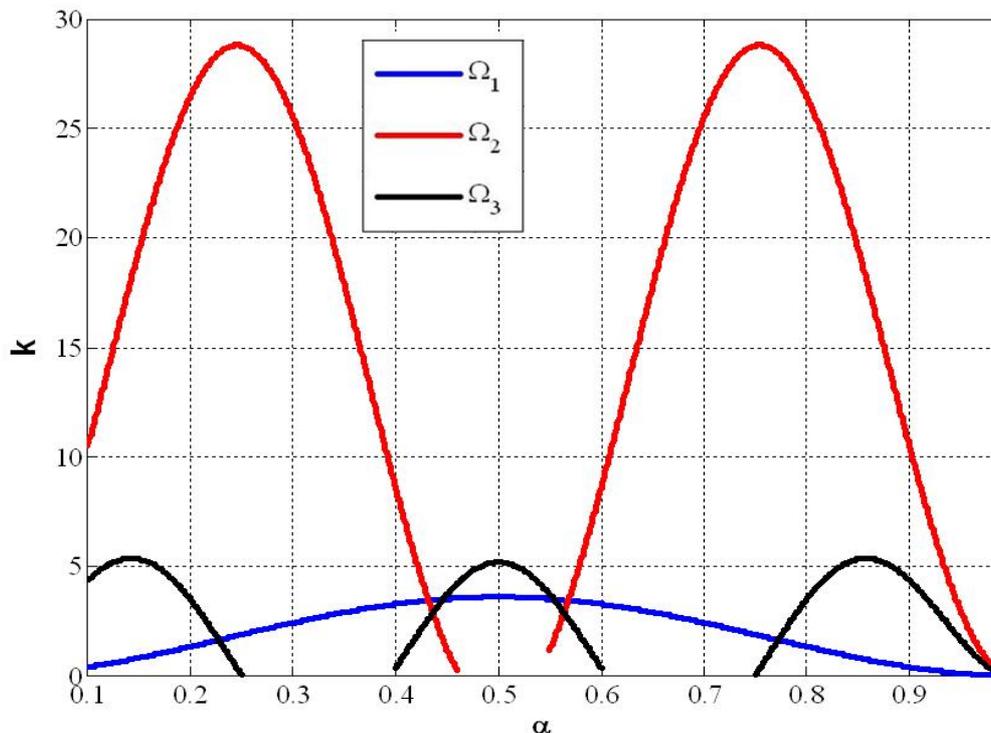


Figura 18: Curvas k vs. α , para la viga simplemente apoyada, de hormigón armado, sin suelo, ensayada experimentalmente.

En la Figura 19 se puede ver ampliada, una de las zonas de cruce de las tres curvas. Una vez hallado el baricentro se obtiene que la ubicación de la fisura está a $\alpha = 0,561$, por lo que se puede decir que la fisura se encuentra en una zona $1 \pm 0,12$ m de los apoyos, siendo el error del 0,06 %. Se obtiene el valor de la profundidad de la fisura a , siendo ésta de 2,53 cm. En la Figura 20 se puede observar que la profundidad real de la fisura en la viga, que es de aproximadamente 2,50 cm, por lo que el error es del 1,2 %, por lo tanto se puede decir que la precisión del método es muy buena. Cabe acotar que en las estructuras de hormigón armado, es habitual que se presente una fisura aislada, sino que hay una zona fisurada, con algunas fisuras que tienen un ancho visible y otras que no lo son.

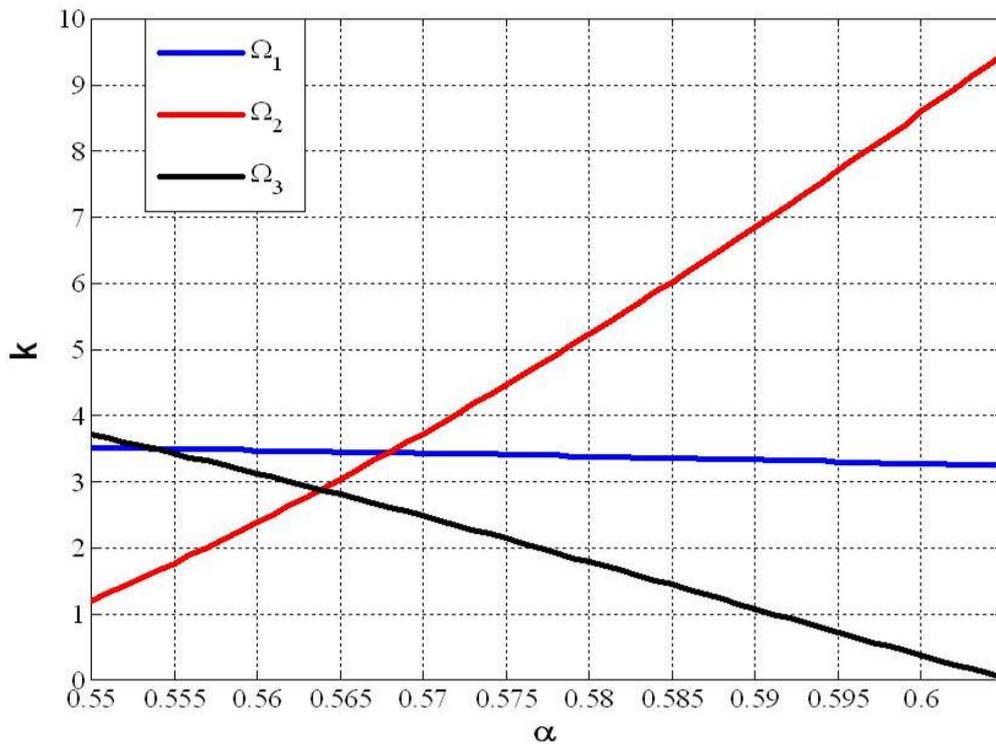


Figura 19: Curvas k vs. α para la viga ensayada experimentalmente



Figura 20: Modelo de viga ensayada con una fisura en el centro.

7 CONCLUSIONES

Se presentó la solución del problema inverso para la detección de fisuras, aplicado a una viga de fundación apoyada sobre un medio elástico y se empleó, satisfactoriamente, el cambio en el valor de sus frecuencias naturales como criterio. En este caso se utilizó una simulación computacional para representar un modelo experimental.

Un algoritmo basado en el método de series de potencias fue utilizado resolver el problema inverso y estimar la localización y tamaño de la fisura. Es interesante destacar que los valores hallados muestran excelentes niveles de precisión.

Con respecto a la detección experimental de fisuras en una viga de hormigón armado, se observó que se pudo localizar y cuantificar la fisura con un nivel de error aceptable y que la precisión del método depende esencialmente de la calidad de las mediciones de las frecuencias naturales.

La metodología propuesta es simple y puede ser un atractivo método para una primera estimación. Métodos menos elementales que permitan la inclusión de complejidades, aunque a costos de mayores tiempos y disponibilidad de equipamientos, pueden ser utilizados posteriormente para verificar y obtener valores con mayor precisión. Entre ellos pueden enunciarse algoritmos genéticos y redes neuronales (Rosales et al, 2009; Buezas, 2009). Además, podrían utilizarse modelos constitutivos de hormigón armado, más complejos que los aquí utilizados dentro de la Resistencia de Materiales. Sin embargo se perderían las ventajas de la metodología propuesta (precisión aceptable, simplicidad y velocidad de cálculo), por ello esta metodología se propone como un método útil para una primera aproximación confiable.

REFERENCIAS

- ALGOR Software. Versión 23. Algor Inc. Pittsburgh, USA, 2007.
- Blevins R.D. Formulas for natural frequency and mode shape, *Van Nostrand Reinhold Co.*, 1979.
- Buezas F.S. Detección de daño en elementos mecánico-estructurales: Modelado dentro de la Mecánica no lineal con inclusión de contacto en la falla, Tesis doctoral, Universidad Nacional del Sur, 2009.
- Cawley, P. and Adams, A.D. The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *Journal of Strain Analysis*, 14 (2): 49-57, 1979.
- Doebling, S.W., Farrar, C.R., Prime, M.B. A summary review of vibration-based damage identification methods. *The Shock and Vibration Digest*, 30(2):91-105, 1998.
- Filipich C. and Rosales M. A recurrence solution of strongly non-linear dynamical systems. *Developments in Theoretical and Applied Mechanics Vol. XXI*. Eds. A.J. Kassab, D.W. Nicholson, I. Ionescu. Rivercross Publishing, Inc. Orlando, USA. *SECTAM XXI*, Orlando, USA, 2002.
- Filipich C., Rosales M. B., and Buezas F. Some nonlinear mechanical problems solved with analytical solutions. *International Journal of Latin American Applied Research*. Vol. 34, No. 2, 2004.
- Kim, B.H., Kim, H., Park, T. Nondestructive damage evaluation of plates using the multi-resolution analysis of two-dimensional Haar wavelet, *Journal of Sound and Vibration*, 292: 82-104, 2006.
- Labquest Interfase (Lab-Q). Vernier. Software and Technology, Beaverton, OR, USA, 2008.
- LOGGER PRO 3.6.1. Vernier. Software and Technology, Beaverton, OR, USA, 2008.
- Nandwana B.P. and Maiti S.K. Modeling of vibration of beam in presence of inclined edge or internal crack for its possible detection based on frequency measurements. *Engineering Fracture Mechanics*, 58: 193-205, 1997.
- Ostachowicz W.M. and Krawczuk M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam, *Journal of Sound and Vibration*, 150: 191-201, 1991.
- Patil D.P. and Maiti S.K. Experimental verification of a method of detection of multiple cracks in beams based on frequency measurements, *Journal of Sound and Vibration*, 281: 439-451, 2005.

- Rosales M., and Filipich C. An algebraic series method to solve strongly nonlinear oscillators. ASME International Mechanical Engineering Congress (IMECE 2003), Washington, D.C. USA. Eds. *The American Society of Mechanical Engineers*. CD-ROM VOL2 (10 págs.), 2003.
- Rosales M.B., Filipich C. P. and Buezas F.S. Crack detection in beam-like structures, *Engineering Structure*, Available online 19 de mayo 2009.
- Rytter A. Vibration based inspection of Civil Engineering Structures. Ph. D. Thesis. Denmark: Aalborg University, 1993.
- Salawu O.S. Detection of structural damage through changes in frequency a review, *Engineering Structures*, 19(9): 718-723, 1997.