

COMPARACIÓN DE DIVERSAS MATRICES DE MASAS CONCENTRADAS CON SIMILITUD DE MODOS PROPIOS

R. Zaradnik^a, S. Raichman^b & A. Mirasso^c

^a*raulzar@hotmail.com*, ^b*sraichman@uncu.edu.ar*, ^c*aemirasso@uncu.edu.ar*

^{a,b,c}IMERIS, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo

<http://www.fing.uncu.edu.ar>

Palabras clave: Matriz de masas diagonal, coordinación modal, similitud de formas modales, diferencias relativas.

Resumen: En el análisis dinámico de estructuras mediante el método de elementos finitos, la definición de la matriz de masa del modelo tiene una gravitante importancia en las exigencias computacionales tanto en el problema de oscilación libre como en el de integración temporal de las ecuaciones de movimiento. Las denominadas matrices de masa consistentes resultan de un análisis variacional y tienen en general valores no nulos en la diagonal principal y fuera de la misma. Por el contrario, las llamadas matrices de masas concentradas son matrices diagonales y son sumamente ventajosas debido a la simplicidad de las operaciones matriciales donde las mismas intervienen.

En trabajos previos los autores han planteado la obtención de matrices de masas concentradas con el empleo de funciones de forma particulares, para un elemento cuadrilátero de placa de ocho nodos, manteniendo las propiedades de simetría y conservación necesarias. Las matrices de masas concentradas pueden obtenerse con diversos métodos, entre los que se pueden mencionar el método de Hinton, Rock y Zienkiewicz, el método Row-Sum, el método de la Cuadratura Nodal y el método simple de Agrupado de Masas. Sin embargo, el cambio del modelo de masas consistentes a concentradas puede introducir diferencias en la determinación de las frecuencias naturales y en la capacidad de representar magnitudes de energía en el modelo de elementos finitos.

Se analiza una metodología basada en el cálculo del coeficiente de coordinación modal para definir unívocamente la diferencia producida por el cambio de formulación de matrices de masas consistentes a matrices de masas concentradas. Se determina un error relativo en las frecuencias naturales y en el cálculo de la energía, entre el modelo de masas concentradas, respecto del modelo de masas consistentes, para elementos estructurales de baja y elevada complejidad. Esta metodología es posible de adaptarse a otro tipo de elementos finitos.

1 INTRODUCCIÓN.

En el análisis dinámico de estructuras mediante el método de elementos finitos, la definición de la matriz de masa del modelo tiene una gravitante importancia en las exigencias computacionales posteriores de la solución numérica del problema. Las matrices de masa pueden ser consistentes o concentradas. En el primer caso, las matrices de masas consistentes resultan de un análisis variacional y tienen en general valores no nulos en la diagonal principal y fuera de la misma. Por el contrario las denominadas matrices de masas concentradas son matrices diagonales que no se obtienen a partir criterios variacionales (Kazuo, 1981; Hughes, 1987; Felippa, 2004; Archer *et al.*, 2005; Fisher, *et al.* 2005; Mishra, 2008).

Tanto en el problema de oscilación libre como en el de integración temporal de las ecuaciones de movimiento, las matrices de masas concentradas son sumamente ventajosas debido a la simplicidad de las operaciones matriciales donde las mismas intervienen. Tal es el caso de los métodos para determinar frecuencias propias del sistema o bien en los denominados explícitos de integración temporal de las ecuaciones de equilibrio dinámico. Sin embargo, el cambio del modelo de masas consistentes a concentradas puede introducir diferencias en la determinación de las frecuencias naturales y en la capacidad de representar magnitudes de energía.

Las matrices de masas pueden obtenerse con diversos métodos y una reseña de los principales se presenta en Hughes (Hughes, 1987). Entre ellos se pueden mencionar los siguientes: el método HRZ, por Hinton, Rock y Zienkiewicz (Hughes, 1987), el método Row-Sum (Hughes, 1987), el método de la Cuadratura Nodal (Hughes, 1987) y el método simple de Agrupado de Masas (Hughes, 1987). En trabajos previos los autores (Zaradnik, 2009, Zaradnik *et al.*, 2006) han planteado la obtención de matrices de masas concentradas con el empleo de funciones de forma particulares, manteniendo las propiedades de simetría y conservación necesarias (Felippa, 2004).

Es común tener presente el análisis del error inducido en la determinación de los valores y vectores propios, por el nivel de densidad de malla y el tipo de mallado (Zienkiewicz *et al.*, 2000; Murlikrishna *et al.*, 2003). No ocurre lo mismo con el análisis de las diferencias que aparecen en los resultados al considerar matrices de masas consistentes o concentradas. Resulta así de interés contar con una metodología cuyo propósito sea el análisis de la diferencia inducida por el cambio de la matriz de masas consistente por la concentrada, para un mismo mallado (sin alterar la densidad de elementos establecidos durante el empleo de cualquiera de ambos modelos de masas) y asegurando el mantenimiento de las formas modales.

Por otro lado, existen varios trabajos de investigación donde se validan los resultados de la modelación por elementos finitos por medio de ensayos de laboratorio (Avitabile, 1998; Burns, 2004; Dascotte *et al.*, sf; Ccasa Infantes, 2000; Garbayo *et al.*, sf; Giannoccaro *et al.*, sf; López Díez *et al.*, sf), y en los cuales se hacen reiteradas referencias a los trabajos de otros investigadores (Allemang *et al.*, 1983; Blaschke *et al.*, 1997) según si los vectores propios son reales o complejos, respectivamente. Estos investigadores propusieron un procedimiento para comparar las formas modales obtenidas en el laboratorio con las formas modales obtenidas numéricamente, con el objetivo de establecer las llamadas deformaciones maestras, que resultaban ser aquellas que, de entre todas las numéricas, podían ser medidas. Este análisis se completaba con una deflación del espacio modal numérico para semejarlo al espacio modal medido.

En base a estas consideraciones, se asume como hipótesis la certeza de los resultados

obtenidos empleando el modelo de masas consistentes y se validan los resultados logrados con el modelo de masas concentradas, empleando la metodología introducida por Allemang y su colaborador (Allemang *et al.*, 1983), pero adaptada al presente propósito.

En síntesis, se analiza una metodología basada en el cálculo del coeficiente de coordinación modal para definir unívocamente la diferencia producida por el cambio de formulación de matrices de masas consistentes a matrices de masas concentradas como un error relativo, en la determinación de las frecuencias naturales y en el cálculo de la energía, entre el modelo de masas concentradas, respecto del modelo de masas consistentes.

2 MATRICES DE MASAS.

Se sintetizan a continuación los principales aspectos de las formulaciones de matrices de masas que se han implementado para el elemento de placa cuadrilátero de ocho nodos propuesto por Hinton y Owen (Hinton *et al.*, 1984) y cuyos resultados se compararán más adelante.

2.1. Matrices de Masa Consistentes.

En el análisis dinámico de estructuras mediante el Método de Elementos Finitos, a partir de la energía cinética del sistema y al interpolar las velocidades de la misma forma en que se interpolan los desplazamientos, se obtienen las matrices de masas consistentes mediante (Felippa, 2004):

$$m_{ij} = \int_V N_i^T \rho N_j dV \quad (1)$$

Siendo N_i y N_j las funciones de forma elementales adoptadas; ρ la densidad del material y V el volumen del elemento. Se trata de una formulación que conduce a matrices de masas consistentes, que en general son matrices con componentes no nulas en la diagonal principal y fuera de la misma.

2.2. Matrices de Masas Concentradas.

Las matrices de masas concentradas sólo tienen elementos no nulos en la diagonal principal. Hay diversos métodos para obtenerlas a partir de las matrices de masas consistentes, pero también es posible definir las directamente. Se sintetizan a continuación los métodos considerados en este trabajo.

2.2.1 Matriz de propuesta por Zaradnik

En trabajos anteriores se ha planteado la obtención de una matriz de masa concentrada (Zaradnik, 2009; Zaradnik *et al.*, 2006). Para lograr una matriz de masas definida positiva, en (Zaradnik *et al.*, 2006) se emplean funciones de forma diferentes para los nodos de esquina que para los nodos centrales, y todas son multiplicadas por una función exponencial de adaptación que asegura la constancia de la masa elemental (no se crea ni se pierde masa elemental). A continuación, se sintetizan los principales aspectos de ese trabajo.

Para calcular una matriz de masa concentrada, deben determinarse las masas traslacionales y las inercias rotacionales asociadas a cada nodo y a cada grado de libertad, despreciando cualquier vinculación o interacción entre los diversos grados de libertad de un mismo elemento. Para la determinación de la masa traslacional se plantea:

$$m_k = \int_M dm = \int_V \rho N_k dV \quad (2)$$

La masa concentrada del nodo “k” resulta de utilizar integración numérica en la ecuación (2),

$$m_k = \sum_{l=1}^{N\text{-capas}} \rho_l \frac{h}{2} \Delta \zeta_l |J| \sum_{i=1}^{N\text{-Gaus}} \left[\sum_{j=1}^{N\text{-Gaus}} \chi_{ij} N_k \Big|_{ij} \right] \quad (3)$$

donde:

χ_{ij} : es el coeficiente de peso para el punto de Gauss correspondiente a “ij”, y

$N_k \Big|_{ij}$: es el valor de la función de forma N_k evaluada en el punto de Gauss correspondiente a “ij”.

Para el planteo de las inercias rotacionales, se recurre a la ecuación general:

$$J_{Pk} = \int_M r^2 dm \quad (4)$$

Considerando que la distancia genérica está relacionada con el grado de libertad de rotación, se concluye en que las ecuaciones para las inercias rotacionales resultan:

$$J_{Pk} \Big|_{\beta_1} = \sum_{l=1}^{N\text{-capas}} \Delta h_l \rho_l |J| \left\{ \sum_{i=1}^{N\text{-Gaus}} \left\{ \sum_{j=1}^{N\text{-Gaus}} \left\{ \chi_{ij} \left[(\Delta \xi_{ij})^2 + h_l^2 \right] N_k \Big|_{ij} \right\} \right\} \right\} \quad (5)$$

$$J_{Pk} \Big|_{\beta_2} = \sum_{l=1}^{N\text{-capas}} \Delta h_l \rho_l |J| \left\{ \sum_{i=1}^{N\text{-Gaus}} \left\{ \sum_{j=1}^{N\text{-Gaus}} \left\{ \chi_{ij} \left[(\Delta \eta_{ij})^2 + h_l^2 \right] N_k \Big|_{ij} \right\} \right\} \right\} \quad (6)$$

donde $\Delta \xi_{ij}$ y $\Delta \eta_{ij}$ representan las distancias sobre el elemento de referencia entre el nodo bajo análisis y el punto de Gauss correspondiente dentro de la integración numérica (Zaradnik *et al.*, 2006).

2.2.2 Matriz de propuesta por el método HRZ

De (Hughes, 1987) es posible resumir el método HRZ para un elemento genérico de la siguiente forma.

$$m_{pq} = \begin{cases} \alpha \int_V \rho N_p^2 dV & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases} \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{\text{Masa total}}{\text{Suma de las masas traslacionales}} \quad (8)$$

Varios investigadores detallan con ejemplos el mecanismo operativo para obtener la matriz concentrada una vez que se dispone de la matriz consistente (Felippa, 2004; Archer *et al.*, 2005; Mishra, 2008).

2.2.3 Matriz de propuesta por el método de la cuadratura nodal (QN)

En (Hughes, 1987) también detalla el método comúnmente conocido como cuadratura nodal que puede resumirse para un elemento genérico como:

$$m_{pq} = \delta_{pq} \int_V N_p^T \rho N_q dV \quad (9)$$

Es decir que, para la matriz de masas concentradas simplemente se toman los elementos de la diagonal principal de la matriz de masas consistentes.

2.2.4 Matriz de propuesta por el método de agrupado de masas (AM)

En (Hughes, 1987) se propone una técnica de agrupado de masas que puede resumirse para un elemento genérico mediante el siguiente procedimiento:

- a) Se calculan las masa traslacionales por medio de:

$$m_a = \int_V N_a^T \rho N_a dV \quad (10)$$

- b) Se calculan el volumen total y la masa total del elemento genérico:

$$V = \int_V dV$$

$$M = \int_V \rho dV \quad (11)$$

c) Se realiza una normalización, separando las componentes traslacionales de las rotacionales:

$$\bar{M}_{rot} = \sum_{i=1}^{n_{lib}} m_{i_{rot}}$$

$$\bar{M}_{des} = \sum_{i=1}^{n_{lib}} m_{i_{des}} \quad (12)$$

- d) Con la idea de mantener la masa elemental, se realiza un ajuste:

$$\bar{m}_{i_{des}} = \frac{M}{\bar{M}_{des}} m_{i_{des}}$$

$$\bar{m}_{i_{rot}} = \frac{M}{\bar{M}_{rot}} m_{i_{rot}} \quad (13)$$

e) Se calculan las inercias rotacionales finales, al determinar la distancia polar ($\sqrt{\lambda}$) por medio de:

$$\bar{m}_{i_{rot}} = \lambda \bar{m}_{i_{rot}}$$

$$\lambda = \max \begin{cases} \frac{V}{8h} \\ h^2 \\ 12 \end{cases} \quad (14)$$

3 SUBESPACIO MODAL COORDINADO: CRITERIOS PARA SU DETERMINACIÓN.

3.1. Conceptos preliminares

Al cambiar el modelo de masas consistentes a masas concentradas, es posible que las formas modales propias, exceptuando la correspondiente al modo fundamental, no coincidan plenamente una a una entre ambos modelos, es decir, el modo "j" del modelo de masas consistentes no necesariamente coincide con el modo "j" del modelo de masas concentradas, para $j > 1$. Matemáticamente se puede escribir que:

$$\{\phi_j\}_2 \neq \{\phi_j\}_1 \quad \text{para } j > 1 \quad (16)$$

donde $\{\phi_j\}_1$ es el autovector j de la formulación de masas consistentes y $\{\phi_j\}_2$ es el autovector j con alguna de las formulaciones de masas concentradas.

Desde un punto de vista estrictamente determinístico, aún para el modo fundamental, la coincidencia perfecta es muy difícil, debido a que la coincidencia de cualquier forma modal exigiría la igualdad de todas y cada una de las componentes de ambos vectores propios.

En base a un criterio estadístico se analiza la diferencia introducida por el cambio de formulación de las matrices de masas introduciendo la coordinación de los modos propios y comparando finalmente un parámetro escalar.

3.2. Coordinación por coeficiente de coordinación modal

El método propuesto para coordinar las formas modales se basa en el criterio introducido por Allemang y luego perfeccionado por Blaschke (Allemang *et al.*, 1983; Blaschke *et al.*, 1997) aunque adaptado a los fines de comparación para el presente trabajo. En este procedimiento se trabaja con todo el vector de la forma modal y consiste en calcular el **coeficiente de coordinación modal** definido por la ecuación:

$$CCM_{ij} = \frac{\{\phi_i\}_1^T \{\phi_j\}_2}{\sqrt{\{\phi_i\}_1^T \{\phi_i\}_1} * \sqrt{\{\phi_j\}_2^T \{\phi_j\}_2}} \quad (17)$$

en la cual:

$\{\phi_i\}_1$: es el vector de la forma modal “i” resultante de analizar el modelo con masas concentradas “1”;

$\{\phi_j\}_2$: es el vector de la forma modal “j” resultante de analizar el modelo con masas consistentes “2”;

En el presente trabajo, y en un todo de acuerdo con las propuestas de Burns (Burns, 2004), se considera que ambas componentes están coordinadas si su **coeficiente de coordinación modal** cumple con:

$$|CCM_{ij}| \geq 0.85 \quad (18)$$

Este análisis de coordinación define el que dará en llamarse **subespacio modal coordinado de dimensión “m”**, que es simplemente el subespacio definido por los vectores modales coordinados que cumplen con la ecuación (18). En el mejor de los casos, el subespacio modal coordinado puede coincidir con el espacio modal total “n”, aunque debería pensarse siempre menor o igual al número máximo de modos analizados. Es en este subespacio modal coordinado donde es posible definir el concepto de error relativo, pues fuera de él, el modelo de masas consistentes refleja comportamientos no visibles para el modelo de masas concentradas y viceversa. Es decir, el subespacio modal coordinado es el subespacio común a los espacios modales de ambos modelos.

Debe quedar claro que tal sub-espacio se modifica según el nivel de exigencia propuesto por la ecuación (18) y por ello su dimensión es dependiente del valor de CCM exigido para el problema.

3.3. Planteo de diferencias

El problema de valores propios resuelto con matrices de masa consistentes está dado por:

$$K_e \Phi_1 = M_1 \Phi_1 \Lambda_1 \quad (19)$$

donde se determinan los primeros “p” valores propios λ_j^1 que se agrupan en una matriz diagonal Λ_1 y sus autovectores correspondientes que se agrupan en la matriz Φ_1 de n filas y p columnas .

El problema de valores propios resuelto con matrices de masas concentradas está dado por:

$$K_e \Phi_2 = M_2 \Phi_2 \Lambda_2 \quad (20)$$

para el cual se determinan los primeros “p” valores propios λ_j^2 que se agrupan en una matriz diagonal Λ_2 y sus autovectores correspondientes que se agrupan en la matriz Φ_2 de n filas y p columnas.

La diferencia de los resultados entre ambas formulaciones se puede plantear como la diferencia entre las ecuaciones (19) y (20). Así resulta:

$$K_e (\Phi_1 - \Phi_2) = M_1 \Phi_1 \Lambda_1 - M_2 \Phi_2 \Lambda_2 \quad (21)$$

Es posible establecer una relación entre ambas formulaciones vinculando los autovalores y autovectores solución de las ecuaciones (20) y (21), en la forma:

$$\Lambda_1 = d(\Lambda) \Lambda_2 \quad (22)$$

$$\Phi_1 = d(\Phi) \Phi_2 \quad (23)$$

$$\Phi_1 d(\Lambda) = F(\Phi) \Phi_2 \quad (24)$$

En principio, las matrices $F(\Phi)$ y $d(\Lambda)$ son cuadradas, la primera del mismo orden que las matrices de rigidez o masa, es decir de orden “n” y la segunda del mismo orden que el subespacio modal coordinado, es decir de orden “m”. La matriz $d(\Phi)$ es de n por p, siendo p los primeros “p” valores y vectores propios calculados. Las matrices Φ_j y Λ_j pueden ser matrices rectangulares, ambas del mismo orden “n x p”.

Debe entenderse que en estas condiciones se verifica la siguiente desigualdad múltiple:

$$1 \leq m \leq p \leq n \quad (25)$$

Conocidos los autovalores de ambas formulaciones, de la ecuación (22) se puede calcular la matriz cuadrada de proporcionalidad entre los valores propios:

$$d(\Lambda) = \Lambda_1 \Lambda_2^{-1} \quad (26)$$

Con este resultado y los autovectores Φ_j , de la ecuación (24) se puede calcular la matriz cuadrada de proporcionalidad entre las matrices modales Φ_j :

$$F(\Phi) = \Phi_1 d(\Lambda) \Phi_2^{-1} \quad (27)$$

Debe apreciarse que las definiciones conducen a matrices identidad tanto para $F(\Phi)$ como para $d(\Lambda)$ en el caso en que no existan diferencias entre los valores y los vectores propios generados por los modelos de masas consistentes y concentradas.

Además, debe observarse que tanto la matriz modal Φ_2 como la matriz de los valores propios Λ_2 son en general rectangulares, lo cual obliga a determinar su correcta inversa (en ambos casos es la inversa por derecha).

Considerando las ecuaciones (22) y (23), en la ecuación (21) resulta:

$$K_e [d(\Phi) - I] \Phi_2 = [M_1 \Phi_1 d(\Lambda) - M_2 \Phi_2] \Lambda_2 \quad (28)$$

Y al considerar (24) en (28) se obtiene:

$$K_e [d(\Phi) - I] \Phi_2 = [M_1 F(\Phi) - M_2] \Phi_2 * \Lambda_2 \quad (29)$$

lo que permite observar la semejanza de las matrices del problema planteado por la ecuación (29) con el problema de valores y vectores propios considerando la masa consistente, dado por la ecuación (20). Es decir que se puede expresar:

$$\begin{cases} K_e [d(\Phi) - I] = \alpha K_e \\ M_1 F(\Phi) - M_2 = \alpha M_2 \end{cases} \tag{30}$$

Con α un escalar. Esto permite escribir:

$$\begin{cases} [d(\Phi) - I] = \alpha I \Rightarrow d(\Phi) = (1 + \alpha)I = \Phi_1 \Phi_2^{-1} \\ F(\Phi) = (1 + \alpha)M_1^{-1}M_2 = \Phi_1 d(\Lambda) \Phi_2^{-1} \end{cases} \tag{31}$$

De nuevo, puede verse que las matrices $F(\Phi)$ y $d(\Phi)$ son cuadradas y de orden “n”:

$$\underbrace{d(\Phi)}_{n \times n} = \underbrace{(1 + \alpha)}_{\text{Escalar}} \underbrace{I}_{n \times n} = \underbrace{\Phi_1}_{n \times p} \underbrace{\Phi_2^{-1}}_{p \times n} \tag{32}$$

$$\underbrace{F(\Phi)}_{n \times n} = \underbrace{(1 + \alpha)}_{\text{Escalar}} \underbrace{M_1^{-1}}_{n \times n} \underbrace{M_2}_{n \times n} = \underbrace{\Phi_1}_{n \times p} \underbrace{d(\Lambda)}_{p \times p} \underbrace{\Phi_2^{-1}}_{p \times n} \tag{33}$$

Es interesante cuantificar el valor del coeficiente “ α ”. Para ello, a partir de la ecuación (32) es posible obtener:

$$(1 + \alpha)I = \Phi_1 \Phi_2^{-1} \tag{34}$$

Y teniendo presente que en el sub-espacio modal coordinado exige una relación entre los autovectores solución de ambas formulaciones:

$$\{\Phi_1\}_j = \beta_j \{\Phi_2\}_j \tag{35}$$

Puede escribirse:

$$\alpha_j = |\beta_j| - 1 \tag{36}$$

Es importante resaltar que si se cumple que $\Phi_1 = \pm \Phi_2$, necesariamente será $\alpha_j = 0$ para todo $j \leq m$. Obsérvese que se ha introducido un doble signo en la igualdad entre los vectores propios del modelo consistente y concentrado, significando con ello que podrían ser considerados iguales, aún en oposición de fase, debido a los fines que persigue el presente trabajo. Una comprobación de la exactitud del cálculo de β_j es verificar que su signo coincida con el signo del coeficiente de coordinación modal correspondiente.

En la realidad, el cambio del modelo de masas consistentes a masas concentradas obliga a restringir el análisis sólo al sub-espacio modal coordinado y, aún así, existen leves diferencias entre las matrices modales, lo cual origina que $\alpha_j \neq 0$.

3.4. Error relativo en los valores propios y en las frecuencias naturales

Es también de interés el error o diferencia entre los valores propios entre ambas formulaciones, que es posible calcular de la siguiente forma:

$$\Delta(\Lambda) = \Lambda_1 - \Lambda_2 = d(\Lambda)\Lambda_2 - \Lambda_2 = [d(\Lambda) - I]\Lambda_2 \tag{37}$$

Y debido a que todas las matrices en juego son diagonales, el error relativo en la determinación de los valores propios puede calcularse por medio de:

$$\varepsilon(\Lambda) = \Delta(\Lambda)\Lambda_2^{-1} = d(\Lambda) - I = \Lambda_1 \Lambda_2^{-1} - I \tag{38}$$

Como lo realmente importante es el error relativo en la determinación de las frecuencias naturales, las cuales están dadas por:

$$\omega_j = \sqrt{\lambda_j} \text{ para } j=1,2,\dots,m \tag{39}$$

Las componentes de la ecuación matricial (38), resultan:

$$\Delta(\lambda_j) = [d(\lambda_j) - 1]\lambda_j \text{ para } j=1,2,\dots,m \tag{40}$$

$$\Delta(\omega_j) = \frac{\partial \omega_j}{\partial \lambda_j} \Delta(\lambda_j) = \frac{\sqrt{\lambda_j}}{2} [d(\lambda_j) - 1], \text{ para } j=1,2,\dots,m \quad (41)$$

lo cual conduce a que el error relativo en la frecuencia natural “j” sea evaluada como:

$$\varepsilon(\omega_j) = \frac{1}{2} [d(\lambda_j) - 1] \quad \text{para } j=1,2,\dots,m \quad (42)$$

O en forma matricial escrita de la siguiente manera:

$$\varepsilon(\omega) = \frac{1}{2} [d(\Lambda) - I] \quad (43)$$

matriz que resulta ser cuadrada de orden “m”.

Puede verse que la ecuación (43) es la forma matricial de la ecuación (42), y mide el error relativo o diferencia relativa en los autovalores al cambiar entre las formulaciones de las matrices de masas consideradas. Esta medida deberá ser menor que cierto valor de error admisible ε_{adm} . Se debe destacar que la ecuación (43) es idéntica a la empleada por Murlikrishna (Murlikrishna *et al.*, 2003) para determinar el error relativo de las frecuencias como consecuencia del cambio del mallado de los elementos finitos.

3.5. Error relativo de la energía

Resulta de interés evaluar el error relativo o cambio relativo en la determinación de la energía de deformación. Ésta última se puede calcular con:

$$E_p = \frac{1}{2} \{u\}^T K_e \{u\} \quad (44)$$

Y como el vector de desplazamientos se puede expresar en la base modal a partir de:

$$\{u\} = \Phi \{y\} \quad (45)$$

Se tendrá que la energía de deformación es:

$$E_p = \frac{1}{2} \{y\}^T \Phi^T K_e \Phi \{y\} \quad (46)$$

Hay que recordar que cuando se calculan “p” modos (con $p < n$), la matriz Φ resulta ser rectangular y el orden del vector de desplazamientos en el espacio modal $\{y\}$ es de orden “px1”.

La diferencia entre ambas formulaciones en la determinación de la energía de deformación se puede calcular considerando:

$$\Delta(E_p) = \frac{1}{2} \{y\}^T [\Delta(\Phi)]^T K_e [\Delta(\Phi)] \{y\} \quad (47)$$

Para determinar la diferencia de las matrices modales se tiene en cuenta la ecuación (23):

$$\Delta(\Phi) = \Phi_1 - \Phi_2 = [d(\Phi) - I] \Phi_2 \quad (48)$$

Así, la ecuación (47) se puede escribir:

$$\Delta(E_p) = \frac{1}{2} \{y\}^T \Phi_2^T [d(\Phi) - I]^T K_e [d(\Phi) - I] \Phi_2 \{y\} \quad (49)$$

Y el cambio relativo de la energía de deformación puede ponerse como el cociente entre el cambio del valor de energía dado por la ecuación (49) y el valor de energía para una de las formulaciones de matrices de masas. Así se tiene que el cambio relativo de la energía de deformación resulta:

$$\varepsilon(E_p) = \frac{\frac{1}{2} \{y\}^T \Phi_2^T [d(\Phi) - I]^T K_e [d(\Phi) - I] \Phi_2 \{y\}}{\frac{1}{2} \{y\}^T \Phi_2^T K_e \Phi_2 \{y\}} \quad (50)$$

O bien considerando la primera ecuación del sistema (31):

$$K_e^* = [d(\Phi) - I]^T K_e [d(\Phi) - I] = \alpha^2 K_e \quad (51)$$

$$\varepsilon(E_p) = \alpha^2 * \frac{\{y\}^T \Phi_2^T K_e \Phi_2 \{y\}}{\{y\}^T \Phi_2^T K_e \Phi_2 \{y\}} = \alpha^2 \quad (52)$$

Es importante observar que el cambio relativo de la energía de deformación está evaluado indirectamente por el valor de “ α ”. Así, empleando la ecuación (36) para el modo “ i ” del sub-espacio modal coordinado:

$$\varepsilon(E_{pi}) = \alpha_i^2 = (|\beta_i| - 1)^2 \quad (53)$$

El cambio relativo de la energía de deformación deberá ser menor que cierto valor admisible.

4 APLICACIONES

A continuación, se presentan dos casos analizados con los criterios anteriormente expuestos y cuyas características son resumidas en la [Tabla 1](#). Allí se aprecia el tamaño de cada sub-espacio coordinado determinado en todos los casos bajo las siguientes hipótesis limitantes:

$$|CCM_{ij}| \geq 0.85 \quad (54)$$

$$\text{Cantidad de valores propios solicitados } p = 75 \quad (55)$$

Ejemplo	Número de elementos	Grados de libertad (n)	Orden del subespacio coordinado (m), según el procedimiento para determinar la matriz de masas concentrada diagonal			
			AM	QN	HRZ	Zaradnik
Placa plana con orificio rectangular	28	443	17	40	39	34
Aspa tipo de 20,5m	113	1585	11	27	27	19

Tabla 1: Orden de los sub-espacios coordinados

La [Tabla 2](#) agrupa algunas figuras que permiten visualizar para cada modelo mostrando los tres (3) primeros modos de vibración calculados con la matriz de masas consistentes. Finalmente, los resultados de los estudios se han organizado en figuras, que en todos los casos muestran la evolución de las diferencias en las frecuencias y en la energía.

4.1. Primeros modos de vibración no amortiguada de cada modelo con masas consistentes

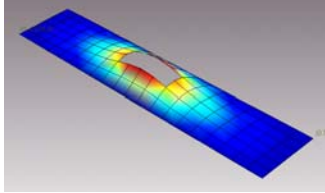
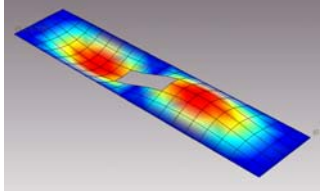
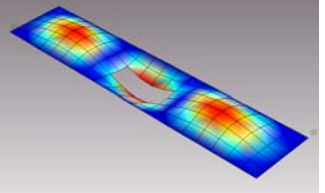
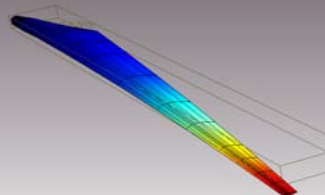
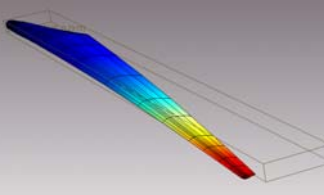
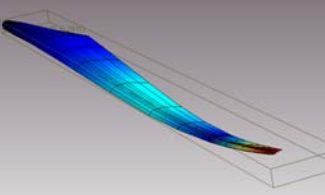
Ejemplo	Modo fundamental	Segundo modo	Tercer modo
Placa plana con orificio	 361 Hz	 460 Hz	 523 Hz
Aspa tipo de 20,5m	 3 Hz	 5 Hz	 9 Hz

Tabla 2: Primeros modos de vibración de cada modelo

4.2. Placa plana con orificio rectangular

En este caso se ha modelado, con 28 elementos de ocho (8) nodos, una placa rectangular cuyo largo es $L = 780mm$, su ancho es $b = 150mm$ y con $h = 3.9mm$ de espesor de material homogéneo de densidad $\rho = 1551 \frac{kg}{m^3}$, apoyada en tres de sus bordes y empotrada en el restante. Las figuras 1 y 2 muestran los errores relativos en la determinación de las frecuencias naturales, mientras que las figuras 3 y 4 muestran los errores relativos en la representación de la energía.

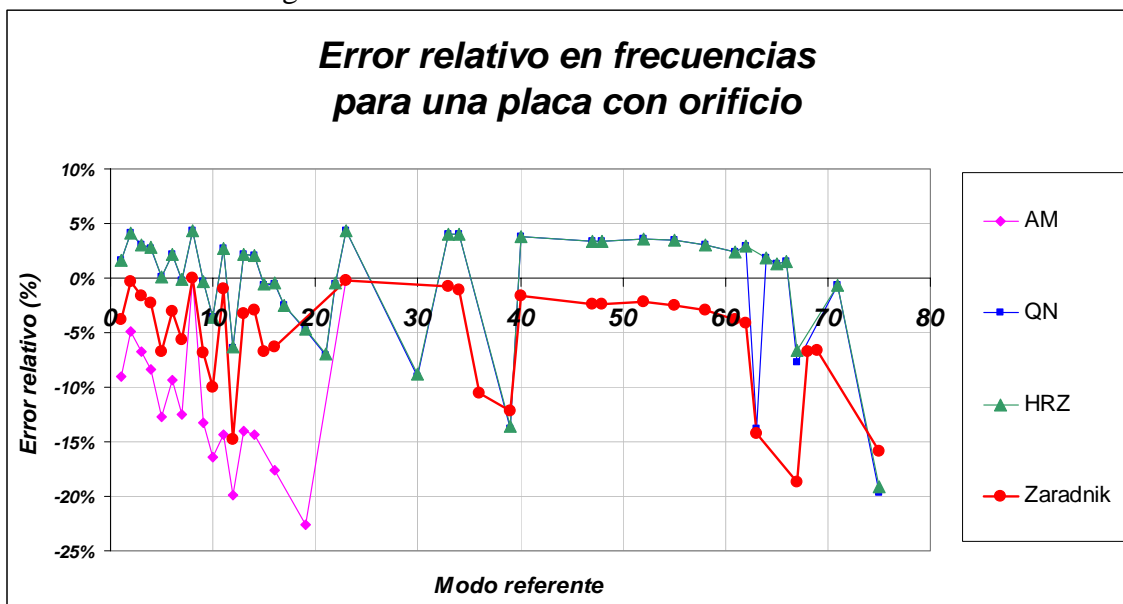


Figura 1: Error relativo en frecuencias naturales (Para todo el espacio modal coordinado)

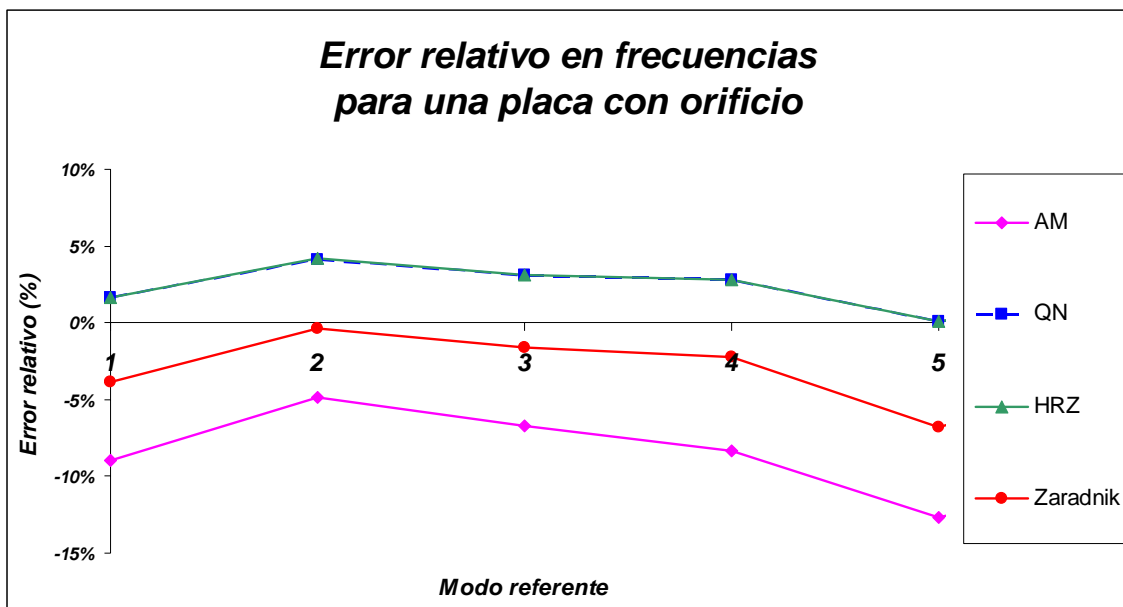


Figura 2: Error relativo en frecuencias naturales (Sólo los primeros modos)

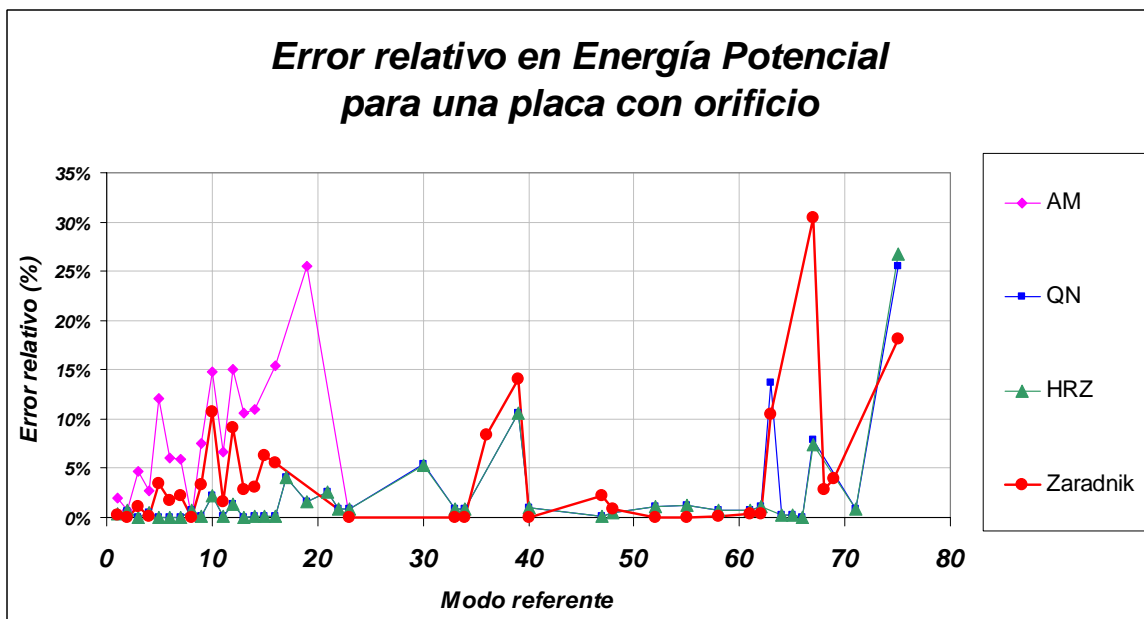


Figura 3: Error relativo para representar energía potencial

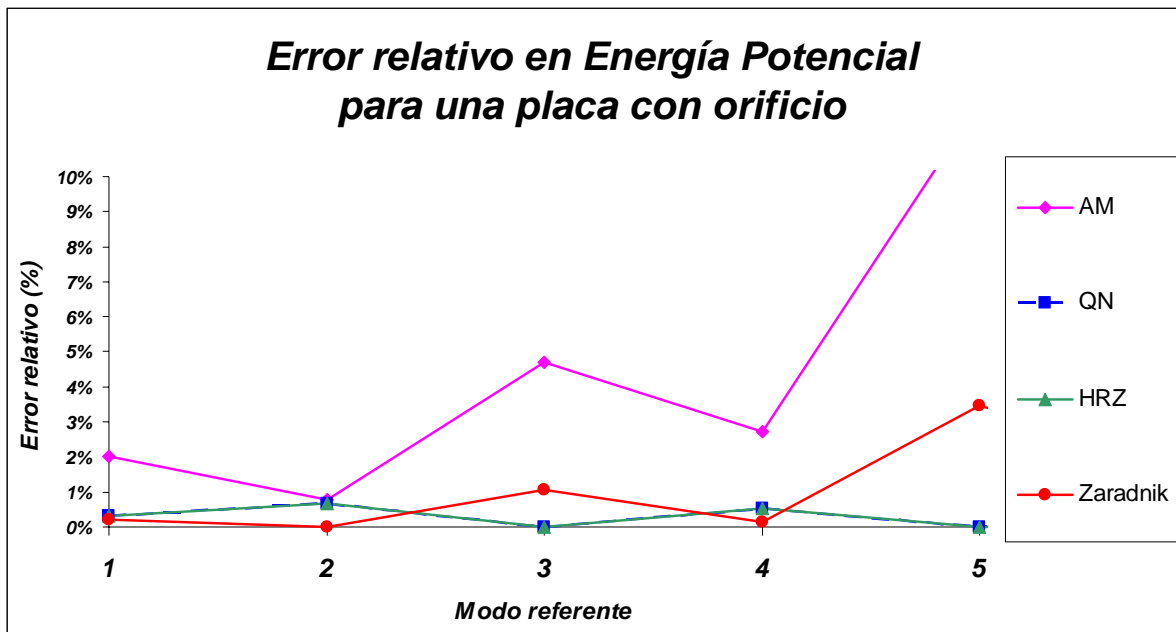


Figura 4: Error relativo para representar energía potencial (Sólo los primeros modos)

Del análisis de las figuras 1 a 4, se puede destacar que mientras se consideren solamente los primeros cinco modos todas las técnicas para generar matrices de masas concentradas, tienen errores relativos inferiores a 10% respecto de la formulación de masas consistentes. Por el contrario cuando se consideran mayor cantidad de modos las diferencias se acrecientan. En la [Figura 2](#) y en la [Figura 4](#) se puede observar que el comportamiento de la formulación propuesta por Zaradnik ([Zaradnik, 2009](#)) es similar a la formulación de matrices concentradas de HRZ y del método QN. Al considerar hasta cinco modos, tanto en el error relativo de las frecuencias ([Figura 2](#)) y como el de la energía ([Figura 4](#)), son inferiores al 5% para la formulación propuesta por Zaradnik ([Zaradnik et al., 2006](#)), y los métodos HRZ y QN.

4.3. Aspa tipo

El aspa tipo se ha modelado con 113 elementos de ocho (8) nodos, y corresponde a un aspa escalada tipo de largo $L = 20.5m$, de material compuesto y empotrada en su raíz ([Zaradnik et al., 2007](#)). Las figuras [5](#) y [6](#) muestran los errores relativos en la determinación de las frecuencias naturales iniciales, mientras que las figuras [7](#) y [8](#) muestran los errores relativos en la representación de la energía potencial.

En las Figuras [5](#) y [6](#) se muestra el error relativo de las frecuencias entre las formulaciones de masas concentradas respecto a la formulación de masas consistentes. En la [Figura 5](#) se puede observar que el comportamiento de la formulación propuesta por Zaradnik ([Zaradnik, 2009](#)) es similar a la formulación del método HRZ hasta modos de orden 50. En la [Figura 6](#), se presenta el error relativo en frecuencias en los primeros modos, y allí el error relativo con la formulación propuesta por Zaradnik ([Zaradnik, 2009](#)) es similar al método AM, e inferior a la formulación de los métodos HRZ y QN.

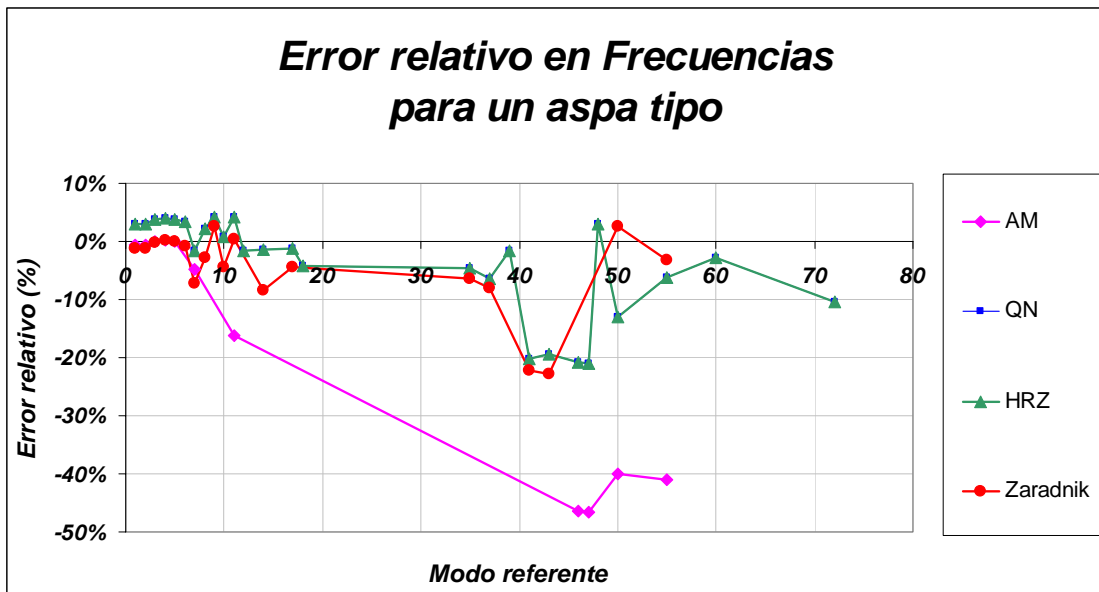


Figura 5: Error relativo en frecuencias naturales (Para todo el espacio modal coordinado)

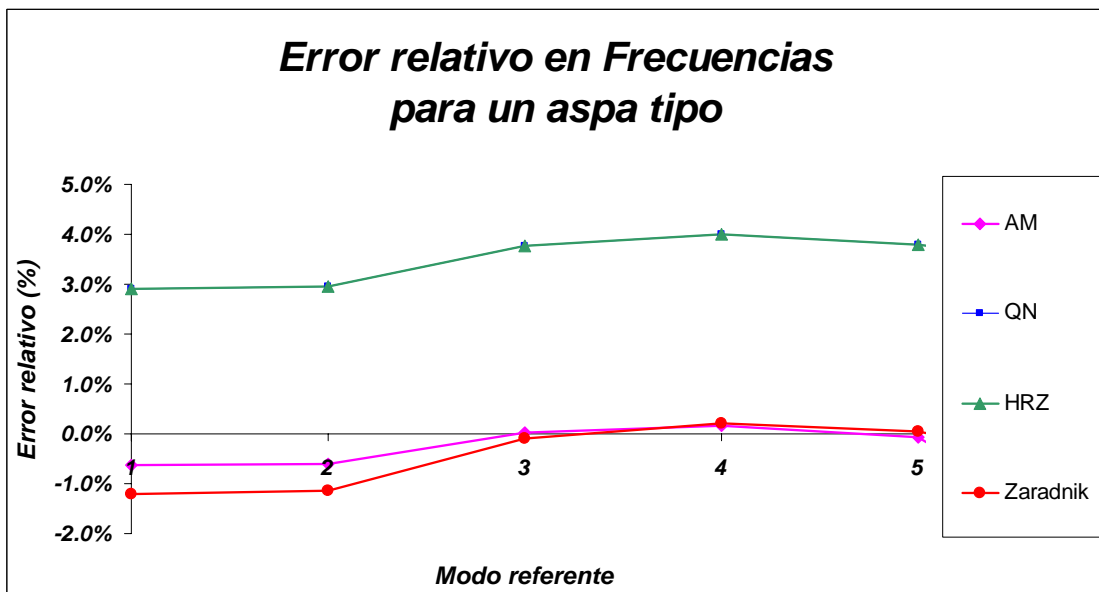


Figura 6: Error relativo en frecuencias naturales (Sólo los primeros modos)

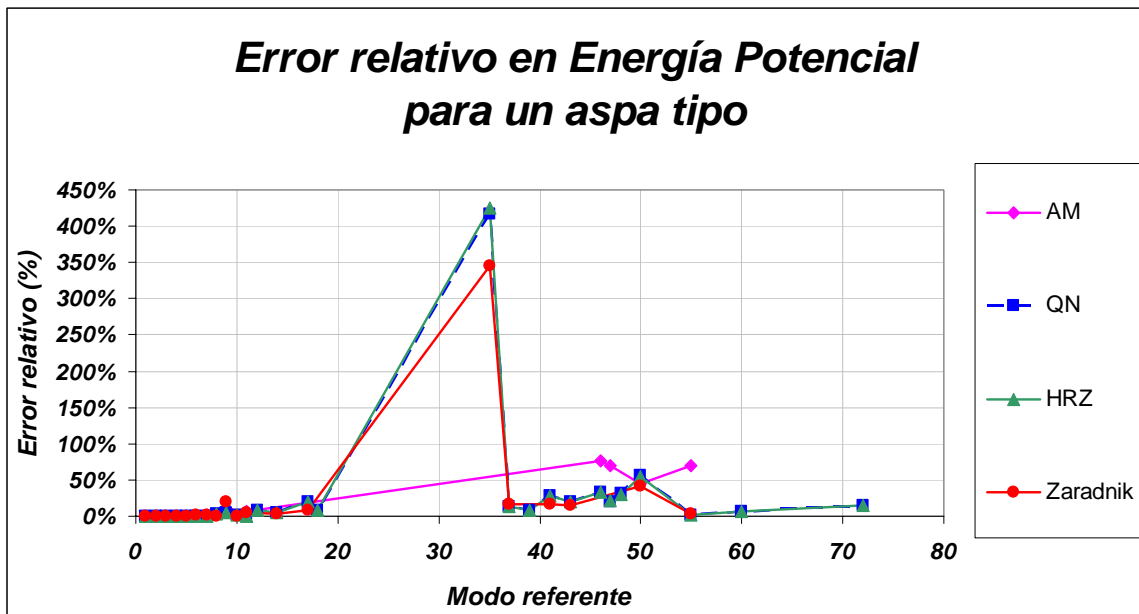


Figura 7: Error relativo para representar energía potencial

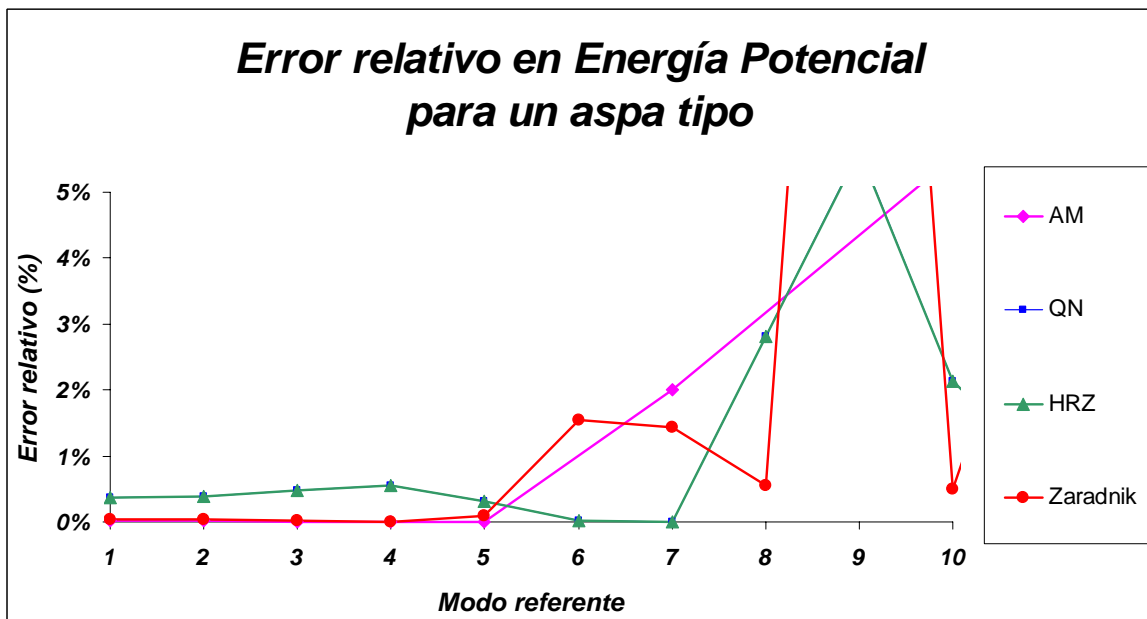


Figura 8: Error relativo para representar energía potencial (Sólo los primeros modos)

5 CONCLUSIONES

Se han comparado diversas propuestas para la formación de la matriz de masas concentradas respecto de la matriz de masas consistentes para el elemento de placa cuadrilátero de ocho nodos propuesto por Hinton y Owen (Hinton *et al.*, 1984). Además de las formulaciones clásicas para determinar matrices de masas concentradas que existen en la bibliografía, se ha incluido en la comparación la propuesta por Zaradnik (Zaradnik, 2009).

La comparación de las distintas formulaciones de masas concentradas se hace respecto de la formulación de masa consistente para elementos estructurales simples y para el alabe de un generador eólico.

El método utilizado para la comparación pone en evidencia un subespacio modal donde es válido hablar de diferencia como error relativo por cambio del modelo consistente al concentrado, que se ha dado en llamar “*subespacio modal coordinado*”. Fuera del mismo, no tiene sentido definir una diferencia o error relativo. Es importante observar que el subespacio modal coordinado se achica a medida que el modelo desarrollado se complejiza, pero al mismo tiempo, se reducen los errores relativos de los primeros modos, tanto de las frecuencias estimadas como de las energías potenciales en juego.

Se concluye que las matrices de masas diagonales representan bastante bien el comportamiento dinámico de los primeros modos naturales, independientemente del método empleado para su formulación, no ocurriendo lo mismo para los modos superiores. La principal causa de error radica en la forma en que los métodos para formar las matrices de masa concentradas evalúan las inercias rotacionales. Hay que notar que las verdaderas inercias rotacionales deberían estar constituidas de dos componentes; un componente que represente la integración de las inercias rotacionales de cada infinitésimo respecto al eje centroidal de elemento, y el otro componente que considere la integración de las inercias rotacionales de cada infinitésimo sobre su propio eje centroidal (Archer *et al.*, 2005). Mientras el método de agrupación de masas (Hughes, 1987) sólo considera el segundo término; el método propuesto por el autor (Zaradnik *et al.*, 2006; Zaradnik, 2009) considera en su formulación ambos aportes, sin embargo, el segundo término se considera un infinitésimo de orden superior y prácticamente es eliminado.

En síntesis, las determinaciones de la matriz de masas concentradas obtenida a partir de la matriz consistente por medio de los métodos de cuadratura nodal (Hughes, 1987) y HRZ (Hughes, 1987; Felippa, 2004), y la propuesta a partir de un concepto físico y desarrollada por Zaradnik (Zaradnik *et al.*, 2006; Zaradnik, 2009) pueden considerarse apropiadas para el análisis dinámico estructural, en especial en modelos con gran cantidad de grados de libertad.

REFERENCIAS

- Allemang, R.J. & Brown, D.L., “A correlation coefficient for modal vector analysis”, Proceedings IMAC I, 1983, pp 110-116.
- Archer, G. & Whalen, T.; “Development of Rotationally Consistent Diagonal Mass Matrices for Plate and Beam Elements”, Department of Architectural Engineering, California Polytechnical State University, San Luis Obispo, CA 93407, ETATS-UNIS, and School of Civil Engineering, Purdue University, 550 Stadium Mall Drive, West Lafayette, IN 47907-1284, ETATS-UNIS, ISSN 0045-7825 CODEN CMMECC, 2005, vol. 194, no6-8, pp. 675-689
- Avitabile, P.; “Overview of analytical and experimental modal model correlation techniques”, tesis, 1998.
- Blaschke P.G. & Ewins, D.J.; “The MAC revisited and updated”, Proceedings IMAC XV, 1997, pp 147-154.
- Burns, L.; “MAC evaluations utilized in FEA análisis for mode identification”, Brems.tech Conference, Robert Bosh Corporation, Munich, December 2004.
- Ccasa Infantes, J.E.; “Ajuste de modelos de elementos finitos usando técnicas de estimación de parámetros”, Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica, Universidad Estatal de Campinas, Facultad de Ingeniería Mecánica, Departamento de Mecánica computacional, 2000.
- Dascotte, E. & Schönrock, A.; “Validation and updating of an aero engine finite element model base don static stiffness testing”, trabajo conjunto entre Dynamic Design Solutions, Bélgica y CargoLifter Development GMBH, Alemania.

- Felippa, C.; "Introduction to Finite Element Methods", Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures University of Colorado Boulder, Colorado, 2004.
- Fisher, A.; Rieben, R.; Rodrigue, G. & White, D.; "A generalized mass lumping technique for vector finite-element solutions of the time-dependent Maxwell equations", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 53, no. 9, september 2005
- Garbayo, M. y Pintor, J.; "Ajuste y validación de modelos teóricos mediante ensayos de vibración sobre el componente", Trabajo interno Universidad Pública de Navarra, Dpto. Ingeniería Mecánica Energética y Materiales, Pamplona, España, txma@unavarra.es
- Giannoccaro, N.; Messina A., y Trentadue B.; "Experiencing modal data on quality controls for structural components in the automobile industry", trabajo conjunto entre Dipartimento di Progettazione e Produzione Industriale, Politecnico di Bari, y Dipartimento di Ingegneria dell'Innovazione, Università di Lecce, Italy.
- Hinton, E. & Owen, D.; "Finit Element Software for Plates and Shells", Pineridge Press Limited, 1984.
- Hughes, T.; "The Finite Element Method. Linear Static and Dinamic Finite Element Analysis", ISBN 0-13-317017-9, Prentice-Hall, 1987
- Kazuo Ishihara, "A Finite Element Lumped Mass Scheme for Solving Eigenvalue Problems of Circular Arches" Department of Mathematics, Faculty of Science, Ehime University, Matsuyama 790, Japan, 1981.
- López Díez, J.; Marcó Gómez, V.; Cuerno Rejado, C. y Luengo, P.; "Modal test correlation and error localization for finite element models for spacecraft structures", trabajo interno Universidad Politécnica de Madrid, E.T.S.I. Aeronauticos y C.A.S.A. División espacio.
- Mishra, S.; "A Study of Influences of Mass Lumping and Reduction of dof on the Natural Frequency of a Long Cable-stayed Bridge", Department of Civil Engineering, North Eastern Regional Institute of Science and Technology, Nirjuli, Arunachal Pradesh 791 109, vol 88, 2008
- Murlikrishna, R. & Prathap, G.; "Studies on variational correctness of finite element elastodynamics of some plate elements", Research Report CM 0306, July 2003, Engineering Analysis Center of Excellence Ltd, Bangalore, India
- Zaradnik, R.; Raichman, S. & Mirasso, A.; "Formulación de matrices de masas concentradas para análisis dinámico de estructuras de materiales compuestos", II Encuentro de Investigadores y Docentes de Ingeniería (EnIDI 2006), Mendoza, 2006. En: Desarrollos e Investigaciones Científico Tecnológicas en Ingeniería, pp. 267 a 273, ISBN 987-05-1360-3, Mendoza, 2006
- Zaradnik, R.; Raichman, S. & Mirasso, A.; "Vibraciones Libres de Palas de Turbinas Eólicas de Materiales Compuestos Considerando Cinemática No Lineal Mediante Modelos de Elementos Finitos". XVI Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2007). En: Mecánica Computacional Vol. XXVI, pp. 419-438, ISSN 1666-6070, AMCA, Córdoba, Argentina, 2007.
- Zaradnik, R.; "Análisis de Estructuras con Materiales Compuestos", Tesis de Maestría en Ingeniería Estructural, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo, Mendoza, Argentina, 2009.
- Zienkiewicz, O. & Taylor, R.; "The Finite Element Method", McGraw Hill, 2000.