

ANÁLISIS DE LA CONCENTRACIÓN DE TENSIONES EN PLACAS FINITAS ORTÓTROPAS CON TRES ORIFICIOS CIRCULARES SOMETIDAS A CARGAS EN SU PLANO

Carlos A. Rossit^{a,b}, Antonio Susca^a, Diana V. Bambill^{a,b1} y Raúl E. Rossi^a

^aDepartamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada (IMA)- Universidad Nacional del Sur

^bConsejo de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

E-mails: carossit@criba.edu.ar, asusca@uns.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar, rerossi@uns.edu.ar

Palabras clave: concentración, tensiones, placa, circular, ortotropía

Resumen. En el proyecto estructural la concentración de tensiones generalmente juega un importante rol que debe ser tenido en cuenta por el ingeniero de diseño. Sobre todo cuando en el elemento estructural existen varios orificios cercanos entre sí. Por ejemplo, en aeronáutica, es importante la reducción del peso de las estructuras. Sin embargo la práctica de orificios para reducir el peso propio no debe disminuir significativamente la capacidad de resistencia del elemento estructural en cuestión. Por ello se hace necesario un análisis del factor de concentración de tensiones ante las posibles ubicaciones y geometrías de los orificios a generar en el elemento estructural.

El presente trabajo trata sobre el análisis del efecto que tres orificios circulares producen en la distribución de tensiones de una placa de dimensiones finitas de material ortótropo sometida a cargas en su plano. Se estudia como modelo una placa cuadrada solicitada por cargas en su plano, normales a sus bordes externos, considerando distintas relaciones entre el tamaño de la placa y los orificios. También se ha considerado una serie de relaciones entre los tamaños de los orificios circulares y distintas posiciones de los mismos. Para cada situación se han considerado dos posiciones de las orientaciones de las direcciones elásticas principales del material ortótropo con respecto a los lados de la placa.

Los resultados obtenidos muestran los valores de concentración de tensiones en placas de dimensiones finitas, caso en que la literatura referente al tema no es tan abundante. Este es un tema de interés en la práctica habitual de la ingeniería.

¹ Autor para contacto

1 INTRODUCCIÓN

La ejecución de varios orificios en elementos estructurales es necesaria en distintas situaciones de la ingeniería. Por ejemplo, en aeronáutica, es muy importante la reducción del peso en las estructuras. Esta reducción de peso no debe disminuir significativamente la capacidad de carga del elemento estructural en cuestión. En estas situaciones es necesario un análisis del factor de concentración de tensiones ante las posibles ubicaciones y geometrías de los orificios en el elemento estructural.

Es claro que la proximidad entre los orificios, sus geometrías y las dimensiones relativas de los mismos afectan el campo de tensiones del elemento estructural. Es por ello que los resultados del factor de concentración de tensiones calculados para un simple orificio no son aplicables.

Para materiales isótropos se ha estudiado la concentración de tensiones generada por múltiples agujeros circulares en placas de dimensiones finitas o infinitas, sometidas a diferentes estados de carga en su plano medio. Varios de estos estudios se encuentran resumidos en libros que son de permanente consulta por los ingenieros de diseño (Pilkey, 1997).

Por otro lado, son escasos los estudios sobre el factor de concentración de tensiones en placas de material ortótropo con múltiples agujeros. Mientras numerosos investigadores han estudiado el efecto de un solo orificio en materiales ortótropos, poca información existe para el diseñador acerca del factor de concentración de tensiones en dichos materiales con múltiples orificios cercanos entre sí. Sin embargo, debe consignarse el estudio realizado por Henshaw et al. (1996) que considera distintas posiciones de tres orificios circulares, próximos entre sí, en una placa de material ortótropo). En este análisis se concluye que la concentración de tensiones en el borde del orificio puede ser considerablemente aumentada con la práctica de los orificios secundarios, pero para algunas posiciones y tamaños relativos de los orificios secundarios, este valor puede disminuir.

2 PLANTEO DEL PROBLEMA

Se analiza la influencia de tres orificios circulares en la distribución de tensiones de una placa cuadrada de material ortótropo de diversas dimensiones sometida a tracción uniaxial (Figura 1) buscando determinar los valores extremos de las tensiones, provocadas por los orificios.

El factor de concentración de tensiones queda definido por las siguientes expresiones:

$$K_+ = \frac{\sigma_+}{\sigma_1} \quad (1.a)$$

$$K_- = \frac{\sigma_-}{\sigma_1} \quad (1.b)$$

donde: σ_+ es la tensión de tracción máxima en el modelo con agujero.

σ_- es la tensión de compresión máxima en el modelo con agujero.

σ_1 es la mayor de las tensiones principales en el modelo sin orificio, en este caso

$$\sigma_1 = N_x$$

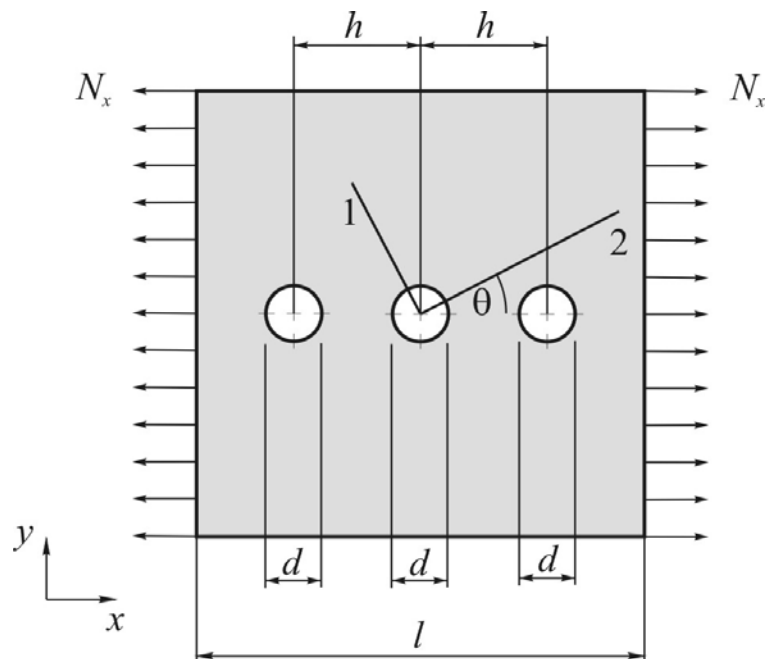


Figura 1: Esquema general del problema analizado

A su vez, se consideraron distintas orientaciones de los orificios con respecto a la dirección del esfuerzo aplicado:

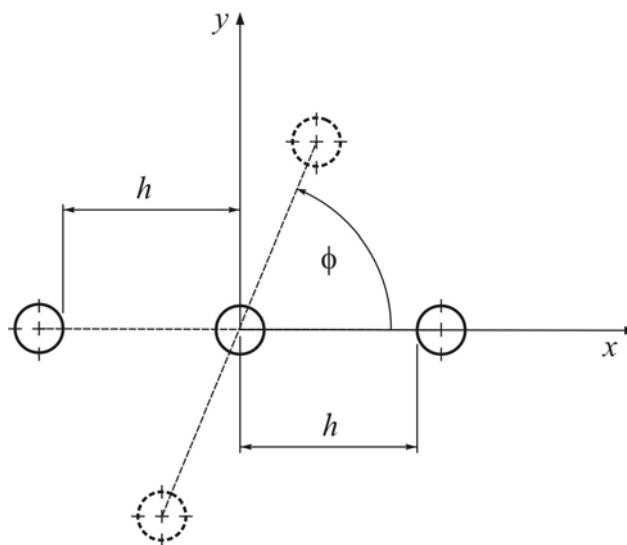


Figura 2: Disposición de los orificios

Como puede observarse en las figuras, las variables involucradas son:

l , lado de la placa cuadrada.

h , distancia entre los centros de los orificios.

d , diámetro de los orificios circulares.

x, y , ejes cartesianos, x coincidente con dirección de carga

1, 2, direcciones de los ejes principales de elasticidad.

θ , ángulo de orientación de los ejes principales de elasticidad.

ϕ , ángulo de orientación de la línea que une los centros de los orificios.

N_x , magnitud de la tensión normal aplicada.

Debido a la gran cantidad de mallados que son necesarios construir, para obtener los resultados requeridos, se utilizó el software **FlexPDE**. Este código, permite definir el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver, el dominio del problema y las condiciones de bordes a cumplir. Admite la utilización de elementos unidimensionales, elementos triangulares en 2D y elementos tetraédricos para 3D. En cada elemento se pueden utilizar funciones de forma lineal, cuadrática o cúbica.

Una característica importante en el proceso de solución, es la capacidad de realizar un proceso de refinamiento adaptativo del mallado. Este proceso consiste en construir automáticamente un mallado inicial del dominio definido, estimar el error de la solución y refinar la malla en zonas donde no se alcanza la precisión definida por el usuario.

Los sistemas a resolver se encuadran dentro de la elasticidad plana y por consiguiente las ecuaciones de equilibrio para el caso plano de tensiones en ausencia de fuerzas de volumen son el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver por el software, ecuaciones (2):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

Las relaciones entre los corrimientos en el plano, u en dirección x y v en dirección y , y las tensiones se obtienen de las relaciones constitutivas dadas en (3) para un material con características elásticas ortótropas:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= C_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{13} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_y &= C_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{23} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} &= C_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + C_{33} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (3)$$

Donde las constantes C_{ij} , con $i, j=1, 2$ y 3 , se pueden expresar para un ángulo general de orientación de los ejes de elasticidad θ como muestran las expresiones (4) extraídas de la bibliografía (Jones, 1999):

$$\begin{aligned}C_{11} &= M_{11} \cos^4(\theta) + 2(M_{12} + 2M_{33}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + M_{22} \sin^4(\theta) \\ C_{12} &= (M_{11} + M_{22} - 4M_{33}) (\sin^2(\theta) \cos^2(\theta)) + M_{12} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta)) \\ C_{13} &= (M_{11} - M_{12} - 2M_{33}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) + (M_{12} - M_{22} + 2M_{33}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \\ C_{23} &= (M_{11} - M_{12} - 2M_{33}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) + (M_{12} - M_{22} + 2M_{33}) \sin(\theta) \cos^3(\theta) \\ C_{22} &= M_{11} \sin^4(\theta) + 2(M_{12} + 2M_{33}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + M_{22} \cos^4(\theta) \\ C_{33} &= (M_{11} + M_{22} - 2M_{12} - 2M_{33}) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + M_{33} (\sin^4(\theta) + \cos^4(\theta))\end{aligned}\quad (4)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \frac{E_1}{(1-\nu_1\nu_2)}, & M_{12} &= \frac{\nu_1 E_2}{(1-\nu_1\nu_2)} \\
 M_{22} &= \frac{E_2}{(1-\nu_1\nu_2)}, & M_{21} &= \frac{\nu_2 E_1}{(1-\nu_1\nu_2)} \\
 M_{33} &= G
 \end{aligned} \tag{5}$$

Junto a las ecuaciones anteriores se deben definir las condiciones de borde del problema. En todos los casos analizados, los bordes interiores se encuentran libres. Es decir que la tensión normal a la curva que define el borde interior es nula. Esto no es así para los bordes externos que, dependiendo de la carga aplicada, poseen valores de tensión no nulos.

Las ecuaciones explicitadas fueron codificadas en el programa mencionado. La definición del dominio del problema se establece a través de comandos particulares. Es así que por medio de segmentos de rectas, arcos y trazadores cúbicos (spline) es posible definir el dominio. Las condiciones de borde, geométricas o naturales, también se codifican por medio de comandos particulares.

El elemento seleccionado para obtener los resultados es el elemento triangular cuadrático (FlexPDE). En la Figura 3 se indica un detalle del mallado en las proximidades de los orificios en una placa de grandes dimensiones ($d/l=0.0001$)

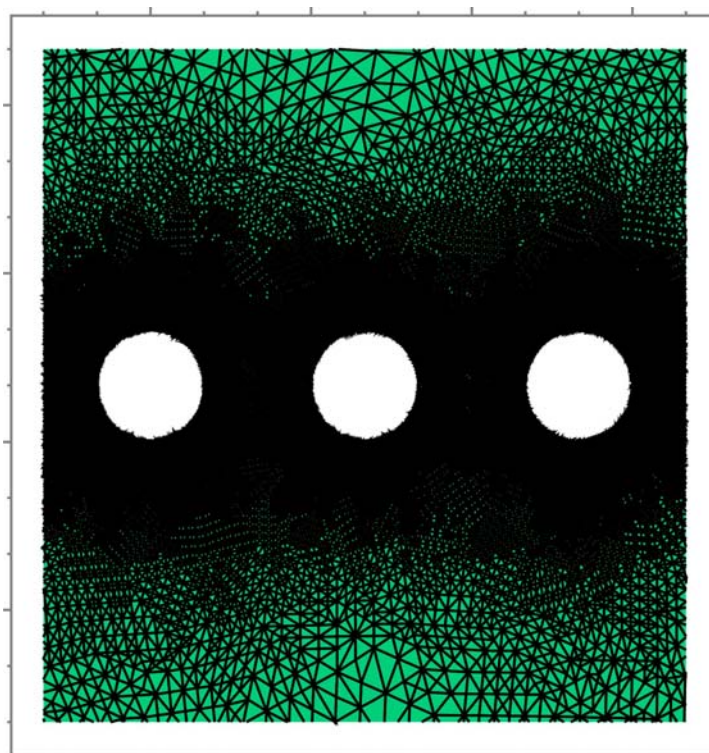


Figura 3: Detalle del mallado en placa $d/l=0.0001$, $\theta=0^\circ$.

3 VERIFICACIÓN DE LA FORMULACIÓN

Para verificar la formulación programada en el software se compararon valores de K_+ para

un caso particular ya estudiado. Son utilizados, para este fin, los resultados para el factor de concentración de tensiones en una placa de material isotrópico, sometida a un estado uniaxial de tracción con tres orificios circulares alineados, Figura 1, que se encuentran publicados (Jindal, 1983)

Las características geométricas del sistema en estudio poseen una relación $d/l=0,1$ y presentan simetría con respecto a las rectas que pasan por los puntos medios de los lados externos. Los resultados de K_+ para las relaciones $h/d= 1,5, 2,0, 2,5$ y el caso de un único agujero circular es decir $h/d=0$ se muestran en la Tabla 1. Se recuerda que este último caso es el caso del trascendente problema resuelto por Kirsch en 1898...

Los resultados expuestos en la referencia y los calculados se muestran en la Tabla 1.

h/d	K_+	
	Jindal, 1983	Presente estudio
1,5	2,4956	2,5772
2,0	2,6153	2,6629
2,5	2,7761	2,7456
0,0	2,9681	3,0171

Tabla 1. Resultados de K_+ de la referencia y los calculados con FlexPDE para el caso descrito.

Los valores expuestos son, en ambos casos, aproximados y como se observa en la tabla anterior, concuerdan satisfactoriamente ya que las diferencias entre los resultados de la referencia y los calculados no sobrepasan el 3,3%

4 RESULTADOS NUMÉRICOS:

Fueron analizados dos modelos con las orientación de los orificios, ϕ coincidente con la dirección de carga ($\phi = 0^\circ$) y perpendicular a la misma respectivamente ($\phi = 90^\circ$).

Para ambos casos se tuvieron en cuenta distintas orientaciones de los ejes principales de elasticidad de la placa ortótropa: $\theta = 0^\circ, 22,5^\circ, 45^\circ, 67,5^\circ$ y 90°

Se consideró la relación $h/d = 2$ constante en todos los casos.

En cuanto al tamaño de los orificios fueron evaluados los siguientes valores para la relación $d/l = 0,1, 0,01, 0,001$ y $0,0001$.

El material ortótropo modelado es del tipo graphite/epoxi y los parámetros elásticos que lo definen son:

$$E_1=181 \text{ GPa}$$

$$E_2=10,30 \text{ GPa}$$

$$G_{12}=7,17 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12}=0,28$$

Con las siguientes relaciones de ortotropía:

$$E_1/E_2= 17,57$$

$$G_{12}/E_2= 0,7$$

En primer lugar se muestran los resultados para $\phi = 0^\circ$:

K_+				
	d/l			
θ°	0,0001	0,001	0,01	0,1
0,0	5,38	5,38	5,41	6,54
22,5	5,83	5,83	5,84	6,91
45,0	4,20	4,20	4,21	4,64
67,5	2,57	2,57	2,57	2,71
90,0	2,16	2,16	2,16	2,24

Tabla 2. Factor K_+ para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. ($\phi = 0^\circ$)

K_-				
	d/l			
θ°	0,0001	0,001	0,01	0,1
0,0	-0,20	-0,20	-0,20	-0,28
22,5	-0,69	-0,70	-0,70	-0,71
45,0	-1,99	-2,02	-2,00	-2,10
67,5	-3,31	-3,30	-3,32	-3,66
90,0	-3,98	-4,02	-4,04	-4,47

Tabla 3. Factor K_- para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. ($\phi = 0^\circ$)

Se observa una fuerte influencia de la orientación de los ejes de ortotropía en la magnitud de las tensiones.

Una característica a puntualizar es la aparición de tensiones significativas de compresión ante una carga de tracción uniaxial, lo que debe ser tenido en cuenta, sobre todo en caso de placas delgadas, por la posibilidad de inestabilidad del equilibrio.

En la figura siguiente se muestra un gráfico que arroja el programa de cálculo con las tensiones principales de tracción para el caso $\phi = 0^\circ$, $\theta = 0^\circ$. Se evidencia en la misma, la fuerte localización de los máximos valores de esfuerzos

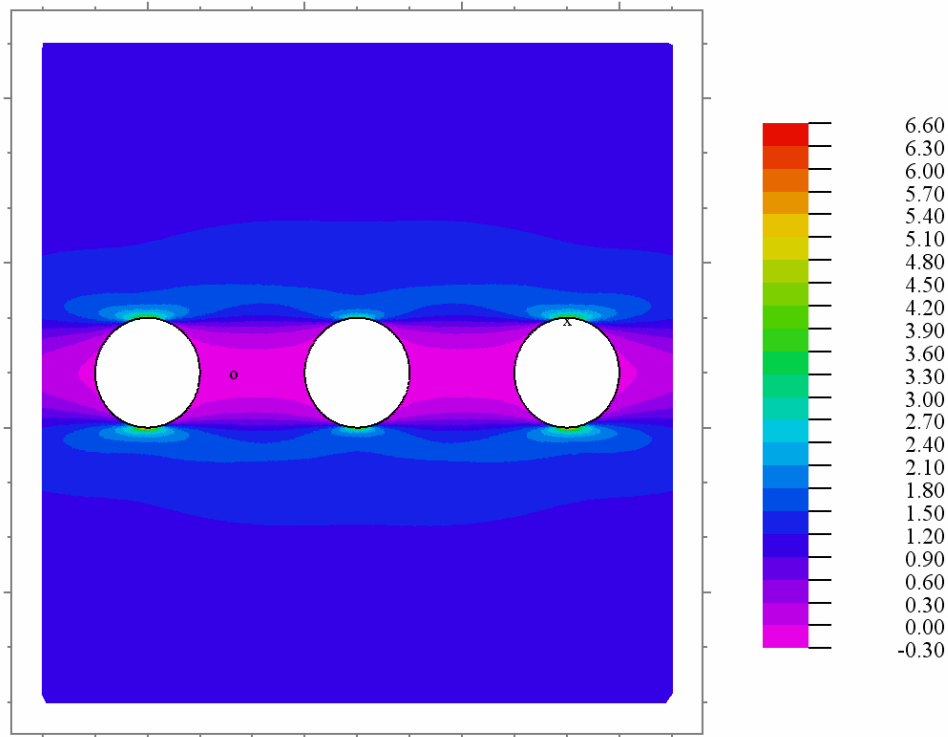


Figura 4: Tensiones principales máximas en placa $d/l=0,1$, $\theta=0^\circ$, $\phi=0^\circ$.

De las Tablas anteriores podemos observar en primer lugar que para relaciones d/l menores a 0.01 los valores experimentan muy poca variación, lo que es corroborado por los gráficos que se muestran a continuación:

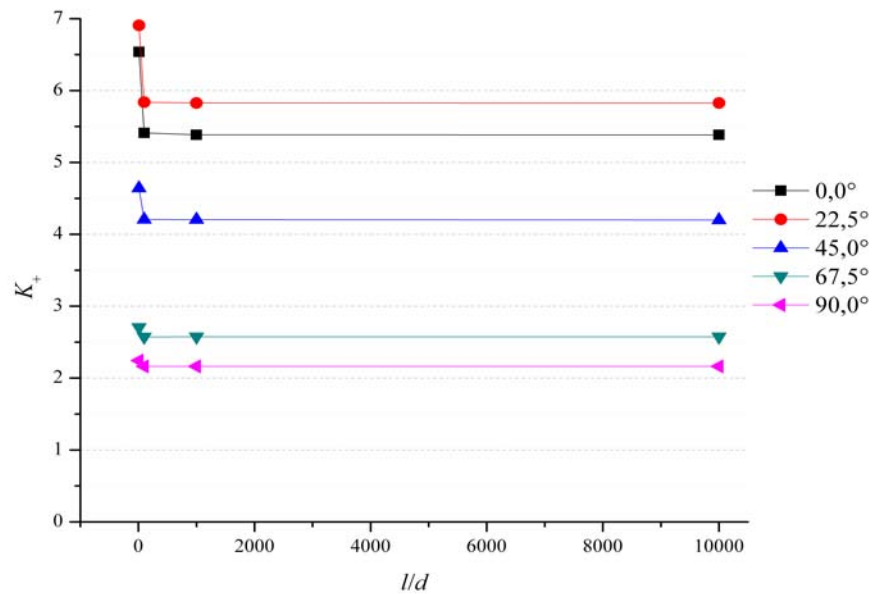


Figura 5: K_+ versus l/d , según cada orientación θ , cuando $\phi=0^\circ$.

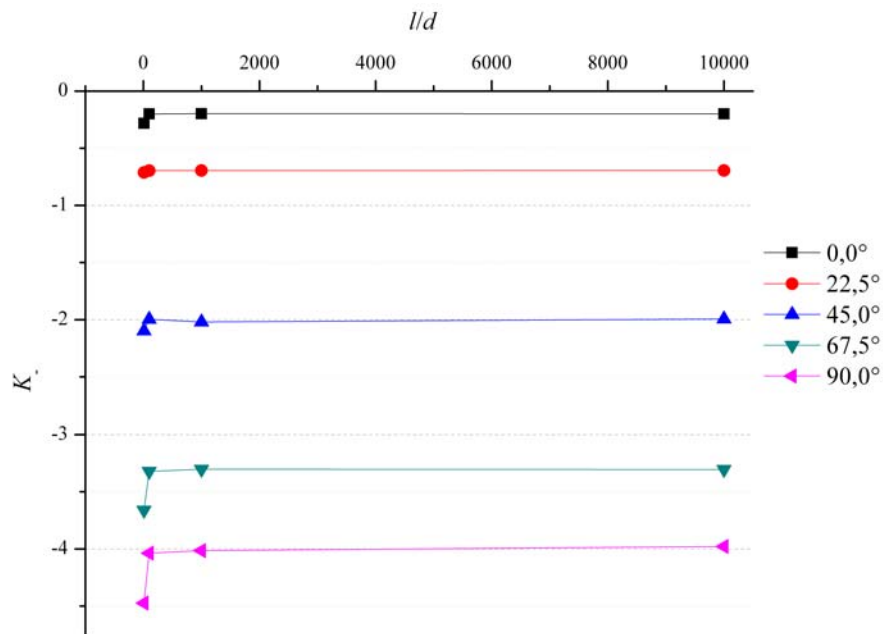


Figura 6: K_- versus l/d , según cada orientación θ , cuando $\phi = 0^\circ$.

A continuación se muestran los resultados para la línea de orificios dispuesta transversalmente a la dirección de carga ($\phi = 90^\circ$):

K_+				
θ°	d/l			
	0,0001	0,001	0,01	0,1
0,0	7,26	7,24	7,32	7,78
22,5	6,12	6,12	6,13	6,61
45,0	4,39	4,42	4,38	4,62
67,5	2,84	2,84	2,84	2,95
90,0	2,55	2,55	2,55	2,65

Tabla 4. Factor K_+ para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. ($\phi = 90^\circ$)

K .				
θ°	d/l			
	0,0001	0,001	0,01	0,1
0,0	-0,21	-0,21	-0,21	-0,24
22,5	-0,87	-0,87	-0,87	-0,96
45,0	-2,45	-2,45	-2,45	-2,85
67,5	-3,93	-3,94	-3,95	-4,91
90,0	-3,45	-3,44	-3,44	-4,47

Tabla 5. Factor K . para distintos tamaños de orificios y orientaciones elásticas. ($\phi = 90^\circ$)

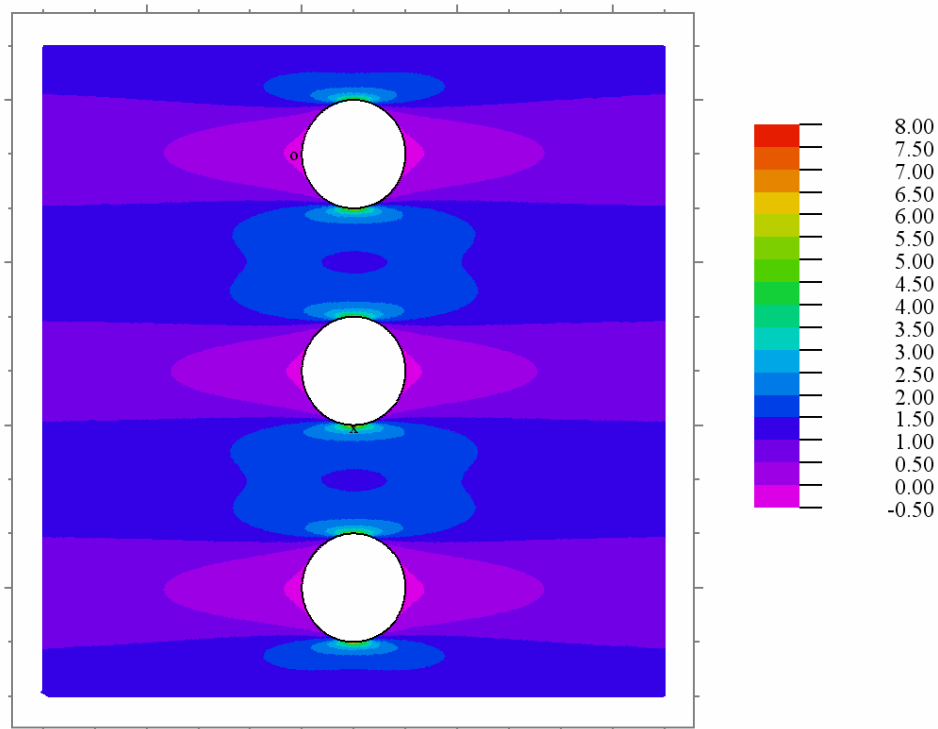


Figura 7: Tensiones principales máximas en placa $d/l=0,1$, $\theta=0^\circ$, $\phi=90^\circ$.

De la observación de los resultados, se desprende que la incidencia de la orientación de los agujeros es menor que la de la orientación de los ejes principales de elasticidad.

Nuevamente, la relación $d/l=0.01$ constituye un límite hasta el cual el tamaño de los orificios muestra poca influencia por lo que podemos considerar a la placa como de

dimensiones infinitas:

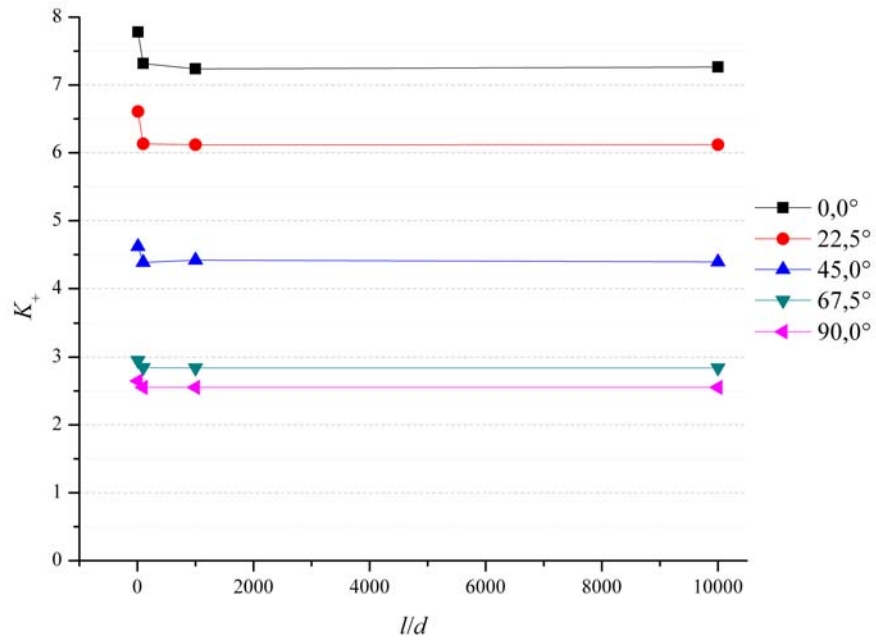


Figura 8: K_+ versus l/d , según cada orientación θ , cuando $\phi = 90^\circ$.

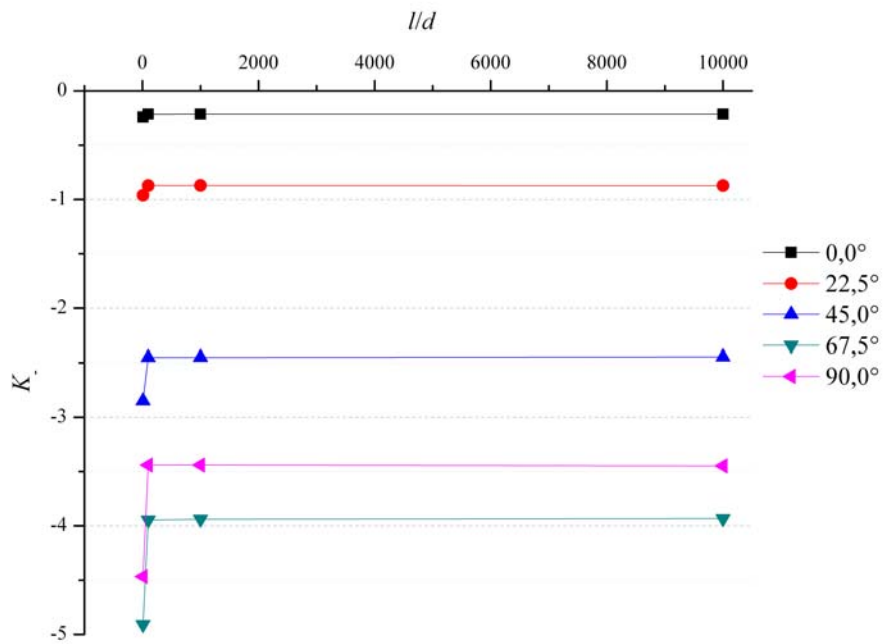


Figura 9: K_- versus l/d , según cada orientación θ , cuando $\phi = 90^\circ$.

5 CONCLUSIONES

En este estudio se presentan un conjunto de resultados obtenidos para una placa ortótropa con tres orificios circulares alineados sometida a tracción uniaxial en el plano.

Se ha presentado un procedimiento para resolver un problema de suma complejidad analítica con un código disponible para el ingeniero de diseño.

Se evidencia que la orientación de los ejes de ortotropía constituye el factor de mayor influencia en la magnitud de los factores de concentración de tensiones, superando el efecto de la orientación de los orificios.

Un detalle a tener en cuenta, como se mencionó, es la aparición de tensiones de compresión, aún cuando la placa se encuentre sometida a un esfuerzo de tracción uniaxial. Esto puede ser determinante en el diseño de placas de pequeño espesor por sus efectos inestabilizadores.

6 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur por su auspicio para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

FlexPDE v.2.20. “*A flexible solution system for partial differential equations*”. PDE Solutions Inc. 2001.

Henshaw J. M., Sorensen Jr. J. R. and Glaessgen E. H., “Finite element analysis of ply-by-ply and equivalent stress concentrations in composite plates with multiple holes under tensile and shear loading”, *Composite Structures*, 36: 45-58, 1996.

Jindal, U. C. “Reduction of stress concentration around a hole in a uniaxially loaded plate”, *Journal of Strain Analysis*, 18(2): 135-41, 1983.

Jones, R. M., “*Mechanics of composite materials*”, Taylor and Francis, Inc., 1999.

Kirsch, G. “*Die theorie der elastizität und die bedürfnisse der festigkeitslehre*”, *Zeit Verem, Deutsch Ing.*, 42: 797-807, 1898.

Pilkey, W. D. “*Peterson's stress concentration factors*”, John Wiley & Sons, Inc., 1997.