

FORMULACIÓN ELASTOPLÁSTICA DE GRADIENTE CONSISTENTE PARA EL ANÁLISIS DE LOCALIZACIÓN EN MEDIOS POROSOS CONTINUOS

Javier L. Mroghinski^{a,c}, Sonia M. Vrech^{b,c} y Guillermo Etse^{b,c}

^a*Departamento de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Nordeste,
Av Las Heras 727, Resistencia, Chaco, Argentina.
javierm@ing.unne.edu.ar*

^b*Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería (CEMNCI),
Universidad Nacional de Tucumán,
Av. Independencia 1800, San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina.
svrech@herrera.unt.edu.ar, getse@herrera.unt.edu.ar*

^c*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, CONICET*

Palabras Clave: Localización, Teoría de gradientes, Propagación de ondas, Medios porosos, Cam Clay.

Resumen. El problema de localización en materiales cohesivos-friccionales está íntimamente relacionado al comportamiento de ablandamiento e inestabilidad en materiales estructurales. En esta situación se observa una dependencia patológica de las soluciones numéricas de Elementos Finitos respecto del tamaño y la orientación de la discretización espacial adoptada. Por tal motivo, la modelación numérica del proceso de deformación en medios porosos requiere de formulaciones constitutivas adecuadas con el fin de obtener una descripción objetiva del complejo proceso de degradación de su resistencia bajo cargas monotónicas. En otras palabras, estas teorías constitutivas enriquecidas deben ser capaces de describir comportamientos no locales de deformación. En el presente trabajo, se propone una formulación elastoplástica dependiente de gradientes superiores termodinámicamente consistente para el modelado de medios porosos continuos. Específicamente, el modelo material empleado corresponde al Cam Clay Modificado para suelos saturados. Como principal virtud, dicha formulación describe en forma objetiva el comportamiento post-pico de materiales cohesivos granulares donde usualmente están presentes las fallas localizadas. Este modelo constitutivo no local presenta tantas longitudes internas características como variables no locales internas posea, es decir, refiriéndose al modelo elastoplástico Cam Clay, las variables internas adoptadas son la deformación volumétrica del esqueleto sólido y la porosidad plástica, que dependen del estado tensional y de la presión de poro actuante, respectivamente. A partir de la teoría de propagación de ondas en continuos son deducidas diferentes condiciones de localización según las condiciones de borde hidráulicas del medio.

1. INTRODUCCIÓN

La mecánica de medios porosos es una disciplina de gran relevancia en diversas áreas del conocimiento como ser en la geofísica, la ingeniería civil, la biomecánica y la ciencia de los materiales. La mecánica de medios porosos tiene por principal objetivo la determinación o predicción de la deformación del medio cuando le son aplicadas acciones exteriores. Los métodos tradicionales y aceptados por la comunidad científica para el estudio de este tipo de materiales están fundados en su mayoría por evidencias experimentales, sin embargo, carecen de un marco termodinámico consistente (Schrefler y Pesavento, 2004; Khalili y Loret, 2001).

Por otro lado, los problemas de localización del campo de deformaciones en medios porosos están íntimamente relacionados con el comportamiento mecánico de ablandamiento del material y se percibe una dependencia de la solución numérica respecto de la discretización empleada en elementos finitos, conduciendo a la pérdida de objetividad en la solución (Svedberg, 1999; Larson, 1999). Por tal motivo, la modelación matemática del proceso de deformación en medios porosos requiere de formulaciones constitutivas adecuadas con el fin de obtener una descripción objetiva del complejo proceso de degradación de su resistencia bajo cargas monotónicas. En otras palabras, estas teorías constitutivas enriquecidas deben ser capaces de describir comportamientos no locales de deformación.

Los desarrollos teóricos están enmarcados en las leyes de la Termodinámica para medios porosos consiguiendo así una formulación consistente sin términos de disipación de energía espurios. La clave para conseguir esta consistencia termodinámica surge de considerar al medio poroso como un sistema continuo termodinámicamente abierto (Coussy, 1995). En consecuencia, se pierden el carácter de mezcla microscópica que otros autores emplean para caracterizar al medio (Gawin et al., 1995; Lewis y Schrefler, 1998; Di Rado et al., 2009).

En el presente trabajo, se propone una formulación elastoplástica dependiente de gradientes superiores termodinámicamente consistente para el modelado de medios porosos continuos (Mroginski et al., 2008). Específicamente, el modelo material empleado corresponde al Cam Clay Modificado para suelos saturados, internacionalmente aceptado por la comunidad científica. Este modelo constitutivo no local presenta tantas longitudes internas características como variables no locales internas posea, es decir, refiriéndose al modelo elastoplástico Cam Clay, las variables internas adoptadas son la deformación volumétrica del esqueleto sólido y la porosidad plástica, que dependen del estado tensional y de la presión de poro actuante, respectivamente. El análisis de bifurcación, tanto para continuos locales como no locales, fue desarrollado a partir de la teoría de propagación de ondas en continuos para diferentes situaciones de las condiciones de borde hidráulicas del medio. Los resultados mostraron una adecuada consistencia entre los tensores de localización para medios porosos obtenidos en este trabajo y el correspondiente a continuos sólidos deducidos anteriormente (Svedberg, 1999; Vrech, 2007).

En la sección que sigue se introduce la teoría de proplasticidad finalizando con una expresión que vincula la deformación volumétrica total del medio con la deformación volumétrica del esqueleto sólido y la porosidad plástica que constituyen las variables internas de la presente formulación. A continuación se plantean las ecuaciones termodinámicas de los medios porosos no locales a partir de la teoría de gradientes. En la tercer sección se analizan las diferentes formas de falla en materiales cuasifrágiles y se deduce la condición de falla localizada de medios porosos continuos, locales y no locales, a partir de la teoría de propagación de ondas. Posteriormente se muestran resultados numéricos de la implementación del modelo Cam Clay modificado para el análisis de localización en suelos saturados locales y no locales. Por último, en la quinta sección, se presentan las conclusiones más relevantes del presente trabajo.

2. POROPLASTICIDAD

Trazando una semejanza entre el comportamiento elastoplástico de medios continuos sólidos y medios porosos, es posible definir a la poroplasticidad como la propiedad de los medios porosos de describir no solamente variaciones permanentes en la deformación del esqueleto sólido sino también cambios irreversibles en el contenido de masa de fluido debido a variaciones en la porosidad del medio. Cuando durante un proceso de carga-descarga el medio poroso experimenta estos cambios irreversibles, el tensor de deformaciones ε_{ij} y la variación del contenido de masa de fluido m , no son suficientes para caracterizar el estado actual del sistema termodinámico. Por lo tanto, deben incorporarse nuevas variables (internas) para describir estas evoluciones irreversibles. Las variables internas necesarias son la deformación plástica ε_{ij}^p , la porosidad plástica ϕ^p o la variación contenido plástico de masa del fluido m^p y la entropía específica irreversible s^p , en el caso de tratarse de transformaciones no isotérmicas.

Suponiendo que la descomposición aditiva de las variables incrementales de estado termodinámicas en una parte elástica ($\dot{\varepsilon}_{ij}^e, \dot{m}^e$) y otra plástica ($\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{m}^p$) es factible, se tiene

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad \text{y} \quad \dot{m} = \dot{m}^e + \dot{m}^p \quad (1)$$

La deformación plástica del esqueleto ε_{ij}^p , está relacionada únicamente con la evolución irreversible del mismo. Sin embargo, el contenido plástico de masa de fluido m^p puede relacionarse con ε_{ij}^p de la siguiente manera. Sea $\dot{\phi}^p$ la tasa de la porosidad plástica definida por

$$\dot{\phi}^p = \frac{\dot{m}^p}{\rho_0^{fl}} \quad (2)$$

donde ρ_0^{fl} es la densidad de masa del fluido en el estado de referencia. El contenido de masa del fluido puede ser expresado a partir de la configuración lagrangiana de la expresión de la conservación de masa por

$$m = J \rho^{fl} \phi - \rho_0^{fl} \phi_0 \quad (3)$$

donde J es el Jacobiano de la transformación, y para transformaciones infinitesimales se aproxima a

$$J \equiv 1 + \varepsilon \quad (4)$$

con $\varepsilon = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$. La variación del contenido plástico de la masa del fluido puede expresarse de la siguiente manera

$$m^p = J^p \rho_0^{fl} \phi^d - \rho_0^{fl} \phi_0 \quad (5)$$

Siendo $J^p = (1 + \varepsilon^p)$, $\varepsilon^p = \varepsilon_{ii}^p$ y ϕ^d la porosidad residual luego de un proceso de descarga completa, y considerando que luego de la descarga la densidad de masa del fluido se restituye a la densidad inicial, $\rho^{fl} = \rho_0^{fl}$. Combinando las expresiones (2) y (5), la porosidad residual puede expresarse finalmente como

$$\phi^p = J^p \phi^d - \phi_0 \quad (6)$$

Para transformaciones infinitesimales ε^p representa la deformación volumétrica plástica. Teniendo presente que el Jacobiano relaciona la configuración (o volumen) de referencia $d\Omega$ con el actual $d\Omega_t$ según

$$d\Omega_t = Jd\Omega \quad (7)$$

considerando la ec. (4), el diferencial de volumen del sistema finalizado el proceso de descarga resulta

$$d\Omega^d = J^p d\Omega \quad (8)$$

y multiplicando la expresión (6) por $d\Omega$ y teniendo en cuenta la ec. (8) puede establecerse

$$\phi^p d\Omega = \phi^d d\Omega^d - \phi_0 d\Omega \quad (9)$$

Esta última expresión justifica la terminología de porosidad plástica, dado que a partir de la misma, ϕ^p representa la variación irreversible del volumen del poro por unidad de volumen infinitesimal $d\Omega$. El contenido de masa del fluido m , el contenido plástico de masa del fluido m^p y la porosidad plástica ϕ^p son variables Lagrangianas debido a que están referidas a la configuración inicial de referencia $d\Omega$.

Como se dijo previamente, bajo la hipótesis de transformaciones infinitesimales, la traza del tensor de deformaciones ε , representa el cambio de volumen en un elemento diferencial de volumen del medio poroso, conocido también como dilatación volumétrica. Por otro lado, la dilatación volumétrica en el esqueleto sólido puede ser causada por cambios de volumen en la fase porosa como así también por cambio de volumen en la matriz sólida ε_s .

Siendo $d\Omega^s$ y $d\Omega_t^s$ el volumen ocupado por la matriz sólida en la configuración de referencia y en la actual, respectivamente, la dilatación volumétrica de la matriz puede expresarse como

$$d\Omega_t^s = \frac{d\Omega_t^s - d\Omega^s}{d\Omega^s} \quad (10)$$

teniendo en cuenta la definición de cada diferencial de volumen $d\Omega_t^s = (1 - \phi) d\Omega_t$ y $d\Omega^s = (1 - \phi_0) d\Omega_t$, y la ec. (4), se arriva a la siguiente expresión

$$(1 - \phi_0) \varepsilon_s = (1 - \phi) \varepsilon - (\phi - \phi_0) \quad (11)$$

Luego, considerando que el comportamiento mecánico del medio es irreversible, la expresión (11) puede ser reformulada de la siguiente manera

$$(1 - \phi_0) \varepsilon_s^p = (1 - \phi^d) \varepsilon^p - (\phi^d - \phi_0) \quad (12)$$

donde ε_s^p es la dilatación volumétrica permanente de la matriz sólida luego de un proceso de descarga poroelástico. Las ecs. (6) y (12) conducen a la descomposición aditiva de la deformación volumétrica plástica del medio poroso en una parte debida al esqueleto sólido y otra debida a la fase porosa

$$\varepsilon^p = \phi^p + (1 - \phi_0) \varepsilon_s^p \quad (13)$$

2.1. Plasticidad no local de gradiente en medios porosos

En esta sección son deducidas las relaciones constitutivas elastoplásticas para medios porosos no locales.

2.1.1. Disipación plástica en medios porosos

En base a estudios desarrollados por [Coussy \(1995\)](#), el estado de un sistema poroso continuo queda perfectamente definido por las variables locales temperatura absoluta θ , deformación elástica ε_{ij}^e , variación del contenido elástico de masa fluida m^e y las variables internas q_i . Para que el sistema sea capaz de describir efectos no locales tanto en la deformación del esqueleto sólido como en la fase porosa debe ser considerado el gradiente de las variables internas $q_{i,j}$ ([Svedberg, 1999](#)). En consecuencia, restringiendo el estudio a problemas isotérmicos, la energía libre de deformación es función de las siguientes variables

$$\Psi = \Psi (\varepsilon_{ij}^e, m^e, q_i, q_{i,j}) \quad (14)$$

Diferenciando la ec. (14) y reemplazándola dentro de la forma global de la desigualdad de Clausius-Duhem, considerando además la ec. (1), se tiene

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\theta} \left[\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} + \left(p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \right) \dot{m} + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \dot{m}^p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} \dot{q}_i - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_{i,j}} \dot{q}_{i,j} \right] d\Omega \geq 0 \quad (15)$$

De la expresión anterior se obtienen las relaciones de Coleman, en forma idéntica a la teoría local de medios continuos

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \\ p &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \end{aligned} \quad (16)$$

los términos remanentes de la ec. (15) corresponden a la energía de disipación plástica

$$\mathfrak{D} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + p \dot{m}^p + Q_i \dot{q}_i \geq 0 \quad (17)$$

con

$$Q_i = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} - \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_{i,j}} \right)_{,j} \quad (18)$$

Como puede observarse de la ec. (17), la diferencia entre la teoría local y la teoría no local de gradiente radica en el término de gradiente adicional en la tensión disipativa, Q_i . Por lo tanto, resulta conveniente descomponer Q_i en una parte local otra no local

$$Q_i = Q_i^{loc} + Q_i^{nloc} \quad (19)$$

con

$$Q_i^{loc} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} \quad \text{y} \quad Q_i^{nloc} = - \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_{i,j}} \right)_{,j} \quad (20)$$

Analizando la expresión de disipación plástica de la ec. (17) es posible trazar una similitud entre la presente formulación de plasticidad de gradiente de deformación y el tratamiento unificado de modelos no locales propuesto por [Gudmundson \(2004\)](#). Es decir, considerando un

continuo Boltzman (microrotaciones nulas) y que para el caso especial en el cual las microtensiones propuestas por Gudmundson son coincidentes con el tensor de tensiones de Cauchy, asumiendo además la tasa de la deformación plástica como variable interna, la expresión (17) resulta equivalente a la propuesta por Gudmundson, exceptuando los términos referidos a la fase porosa. Por tal motivo, se concluye que esta formulación resulta más genérica ya que admite la inclusión de la no localidad en otros componentes además de la fase sólida, como ser la fase porosa, y con ello la posibilidad de considerar diferentes longitudes internas características para modelar con mejor exactitud el comportamiento no local de cada material en particular.

2.1.2. Relaciones constitutivas termodinámicamente consistentes

Basado en trabajos anteriores (Peet et al., 1997; Svedberg, 1999; Etse y Vrech, 2006) se desarrolla una formulación elastoplástica termodinámicamente consistente regularizada de acuerdo a la teoría de gradientes de deformaciones de orden superior. Se considera elastoplasticidad isotérmica, con lo cual las variables θ , s^e y s^p se convierten en cantidades irrelevantes para el estudio. Para el potencial de energía libre de deformación se adopta la descomposición aditiva

$$\Psi(\varepsilon_{ij}^e, m^e, q_i, q_{i,j}) = \Psi^e(\varepsilon_{ij}^e, m^e) + \Psi^{p,loc}(q_i) + \Psi^{p,nloc}(q_{i,j}) \quad (21)$$

donde Ψ^e es la energía elástica del medio poroso definido por Coussy (1995)

$$\Psi^e = \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^e + p^0 \frac{m^e}{\rho_0} + 3\alpha_m \theta M \frac{m^e}{\rho_0} + \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}^e + \frac{1}{2} M \left(B_{ij} \varepsilon_{ij}^e - \frac{m^e}{\rho_0} \right)^2 \quad (22)$$

Los potenciales $\Psi^{p,loc}$ y $\Psi^{p,nloc}$ constituyen las contribuciones locales y no locales, respectivamente, debidas al comportamiento disipativo de endurecimiento/ablandamiento isótropo, expresadas en término de las variables internas q_i y su gradiente $q_{i,j}$.

A partir de las relaciones de Coleman de ec. (16) y despreciado las tensiones y presiones de poro iniciales se pueden obtener las siguientes ecuaciones

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e - M B_{ij} \frac{m^e}{\rho_0} \quad (23)$$

$$p = -M B_{ij} \varepsilon_{ij}^e + M \frac{m^e}{\rho_0} \quad (24)$$

donde $C_{ijkl} = C_{ijkl}^0 + M B_{ij} B_{kl}$, C_{ijkl}^0 es el tensor constitutivo elástico de cuarto orden que relaciona linealmente las tensiones con las deformaciones en el esqueleto sólido, M es el módulo de Biot y $B_{ij} = b \delta_{ij}$ siendo b el coeficiente de Biot y δ_{ij} el delta de Kronecker.

2.1.3. Regla de flujo plástico no local

Del mismo modo que para la teoría local, se plantean las leyes de evolución de las variables internas en forma incremental. Para el caso de flujo plástico y leyes de endurecimiento/ablandamiento isótropo, se introduce un potencial disipativo Φ^* tal que

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{ij}} \dot{m}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} \dot{q}_i = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_i} \quad (25)$$

Para completar la formulación del problema en el dominio Ω deben cumplirse las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker dadas por las relaciones

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad \Phi(\sigma_{ij}, p, Q_i) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} \Phi(\sigma_{ij}, p, Q_i) = 0 \quad (26)$$

2.1.4. Ecuación constitutiva en tasa

Combinando las ecs. (23) y (24), teniendo en cuenta la descomposición aditiva del potencial de energía libre asumida en la ec. (21) y la regla de flujo plástica no local de ec. (25), se pueden obtener las siguientes expresiones incrementales correspondientes al tensor de tensiones $\dot{\sigma}_{ij}$, y a la presión de poro \dot{p} ,

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - C_{ijkl} \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{kl}} - MB_{ij} \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} + MB_{ij} \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} \quad (27)$$

$$\dot{p} = -MB_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + MB_{ij} \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{ij}} + M \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} - M \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} \quad (28)$$

Luego, multiplicando la ec. (28) por B_{ij} y sumando el resultado a la ec. (27), se obtiene una variante de la tasa del tensor de tensiones más adecuada para problemas drenados

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^0 \dot{\epsilon}_{kl} - B_{ij} \dot{p} - C_{ijkl}^0 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\lambda} \quad (29)$$

Por su parte, la tasa de las tensiones disipativas de ec. (19) pueden ser obtenidas a a través de la regla de la cadena como sigue

$$\dot{Q}_i = \dot{Q}_i^{loc} + \dot{Q}_i^{nloc} \quad (30)$$

con

$$\dot{Q}_i^{loc} = -\dot{\lambda} H_{ij}^{loc} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_j} \quad (31)$$

$$\dot{Q}_i^{nloc} = l_\alpha^2 \left(H_{ijkl}^{nloc} \dot{\lambda}_{,k} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_l} + \dot{\lambda} H_{ijkl}^{nloc} Q_{k,l} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial Q_l \partial Q_l} \right)_{,j} \quad (32)$$

En la expresión anterior se introdujeron el módulo local de endurecimiento/ablandamiento H_{ij}^{loc} y el nuevo módulo no local de endurecimiento/ablandamiento H_{ijkl}^{nloc} (Peet et al., 1997)

$$H_{ij}^{loc} = \rho \frac{\partial^2 \Psi^{p,loc}}{\partial q_i \partial q_j} \quad , \quad H_{ijkl}^{nloc} = \rho \frac{1}{l_\alpha^2} \frac{\partial^2 \Psi^{p,nloc}}{\partial q_{i,j} \partial q_{k,l}} \quad (33)$$

H_{ijkl}^{nloc} es un tensor positivo definido de cuarto orden mientras que l_α es la longitud interna característica correspondiente a la fase porosa ($\alpha = p$), y al esqueleto sólido ($\alpha = s$). Al menos tres interpretaciones pueden ser atribuídas a l_α (Svedberg, 1999), la primera de considera que la longitud característica es un parámetro dimensional conveniente para que los tensores H_{ij}^{loc} y H_{ijkl}^{nloc} tengan la misma dimensión, otra interpretación consiste en asumir que l_α es un mecanismo artificial de estabilización numérica, por último, y en coincidencia con otros autores (Pamin, 1994; Vrech y Etse, 2005; Voyiadjis y Deliktas, 2009), l_α puede ser interpretada como una dimensión que caracteriza la microestructura del medio.

2.1.5. Ecuación diferencial del multiplicador plástico

A partir de la condición complementaria de Kuhn-Tucker de ec. (26) y la condición de consistencia plástica, se obtiene la siguiente expresión

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \dot{Q}_i = 0 \quad (34)$$

Considerando las ecs. (27), (28) y (30), la siguiente ecuación diferencial para condiciones no drenadas es obtenida

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = \dot{\lambda} \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^0 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{kl}} - H_{ij}^{loc} \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_j} \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^0 \dot{\epsilon}_{kl} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} B_{ji} \right) \dot{p} \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \left[l_\alpha^2 \left(H_{ijkl}^{nloc} \dot{\lambda}_{,l} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_k} + \dot{\lambda} H_{ijkl}^{nloc} Q_{l,k} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial Q_m \partial Q_m} \right)_{,j} \right] = 0 \quad (35) \end{aligned}$$

o bien, emplenado la expresión (29) en lugar de la ec. (27), se obtiene la siguiente ecuación diferencial más adecuada para condiciones drenadas

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = \dot{\lambda} \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^0 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{kl}} + M \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} B_{ij} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} + M \frac{\partial \Phi}{\partial p} B_{ij} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{ij}} - M \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} - H_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_j} \right] \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^0 \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} B_{ij} \frac{\dot{m}}{\rho_0^{jl}} - M \frac{\partial \Phi}{\partial p} B_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + M \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\dot{m}}{\rho_0^{jl}} \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \left[l_\alpha^2 \left(H_{ijkl}^{nloc} \dot{\lambda}_{,k} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_l} + \dot{\lambda} H_{ijkl}^{nloc} Q_{k,m} \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial Q_m \partial Q_l} \right)_{,j} \right] = 0 \quad (36) \end{aligned}$$

Reagrupando términos, la expresión anterior puede ser escrita en una forma más compacta,

$$-\dot{\Phi}^{nloc} + (h + h^{nloc}) \dot{\lambda} = \dot{\Phi}^e - \dot{\Phi} \quad (37)$$

donde se ha introducido la función de carga elástica local $\dot{\Phi}^e$, el módulo plástico generalizado h , el módulo plástico de gradiente h^{nloc} , y la función de carga no local $\dot{\Phi}^{nloc}$ calculados de acuerdo a

$$\dot{\Phi}^{nloc} = l_\alpha^2 \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \left\{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_j} \left[H_{ijkl}^{nloc} \dot{\lambda}_{,kl} + H_{ijkl}^{nloc} \dot{\lambda}_{,k} \right] + 2 \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial Q_j \partial Q_m} Q_{m,k} H_{ijkl}^{nloc} \dot{\lambda}_{,l} \right\} \quad (38)$$

$$h^{nloc} = -l_\alpha^2 \frac{\partial \Phi}{\partial Q_p} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial Q_p \partial Q_i} \left[H_{ijkl}^{nloc} Q_{j,kl} + H_{ijkl}^{nloc} Q_{j,k} \right] + \frac{\partial^3 \Phi^*}{\partial Q_j \partial Q_m \partial Q_n} Q_{n,m} H_{ijkl}^{nloc} Q_{k,l} \right\} \quad (39)$$

Siguiendo los objetivos planteados en el presente trabajo, la función de carga elástica local y la función de carga no local pueden ser separadas apropiadamente en una parte referida al esqueleto sólido ($\dot{\Phi}_s^e$ y h_s) y otra dependiente de la fase porosa ($\dot{\Phi}_p^e$ y h_p) para ambas condiciones hidráulicas planteadas en este trabajo, drenadas y no drenadas.

$$\dot{\Phi}^e = \dot{\Phi}_s^e + \dot{\Phi}_p^e \quad (40)$$

$$h = h_s + h_p + \bar{H} \quad (41)$$

con

$$\bar{H} = H_{ij}^{loc} \frac{\partial \Phi}{\partial Q_j} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_i} \quad (42)$$

donde, para condiciones drenadas, se tiene

$$\dot{\Phi}_s^{e,d} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}^0 \dot{\epsilon}_{kl} \quad (43)$$

$$\dot{\Phi}_p^{e,d} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} B_{ji} \right) \dot{p} \quad (44)$$

$$h_s^d = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ji}} C_{ijkl}^0 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{lk}} \quad (45)$$

$$h_p^d = 0 \quad (46)$$

y para condiciones no drenadas

$$\dot{\Phi}_s^{e,u} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - M \frac{\partial \Phi}{\partial p} B_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (47)$$

$$\dot{\Phi}_p^{e,u} = \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} \left(M \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} B_{ij} \right) \quad (48)$$

$$h_s^u = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{kl}} \quad (49)$$

$$h_p^u = -M \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} B_{ij} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} B_{ij} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} \right) \quad (50)$$

Cuando todas las variables de estado son espacialmente homogéneas, puede asumirse que $\partial^2 \Phi^* / \partial Q_i \partial Q_j = 0$ (Svedberg, 1999), por lo tanto

$$h^{nloc} = 0 \quad \text{and} \quad \dot{\Phi}^{nloc} = l_\alpha^2 \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_j} H_{ijkl}^{nloc} \dot{\lambda}_{,kl} \quad (51)$$

y la ecuación diferencial que permite obtener el multiplicador plástico se reduce a

$$-\dot{\Phi}^{nloc} + h \dot{\lambda} = \dot{\Phi}^e - \dot{\Phi} \quad (52)$$

2.2. Relación constitutiva elastoplástica de gradiente

Considerando carga plástica, el multiplicador plástico puede ser fácilmente determinado a partir de la ec. (52). Luego, reemplazando en la tasa de la ecuación constitutiva del esqueleto sólido para medios porosos tanto para el caso no drenado de ec. (27), como el drenado de ec. (29), se obtiene

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^0 \dot{\epsilon}_{kl} - B_{ij} \dot{p} - C_{ijkl}^0 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{kl}} \left(\frac{\dot{\Phi}^e + \dot{\Phi}^{nloc}}{h} \right) \quad (53)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - MB_{ij} \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} + \left(MB_{ij} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} - C_{ijkl} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{kl}} \right) \left(\frac{\dot{\Phi}^e + \dot{\Phi}^{nloc}}{h} \right) \quad (54)$$

Teniendo en cuenta las expresiones de Φ^e y Φ^{nloc} para cada caso, y operando algebraicamente se tiene

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^{ep,sd} \dot{\epsilon}_{kl} + E_{ij}^{ep,pd} \dot{p} - E_{ij}^{g,spd} \dot{f}^g \quad (55)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^{ep,su} \dot{\epsilon}_{kl} + E_{ij}^{ep,pu} \dot{m} / \rho_0^{fl} - E_{ij}^{g,spu} \dot{f}^g \quad (56)$$

donde $E^{ep,s}$ y $E^{ep,p}$ son los tensores elastoplásticos del esqueleto sólido y de la fase porosa respectivamente, así como $E^{g,sp}$ es el tensor de elastoplasticidad de gradiente para ambas fases, el superíndice d corresponde condiciones drenadas mientras que el superíndice u se refiere a condiciones no drenadas (undrained). Ambos tensores de orden 4 y 2, para los casos drenados y no drenados son presentados en el Apéndice 1.

3. ANÁLISIS DE FALLA LOCALIZADA EN MEDIOS POROSOS

La falla global en un medio continuo se produce generalmente como consecuencia de fallas locales en zonas o regiones donde se verifica que el material constituyente está sometido a un estado tensional post-pico (Etse, 1992).

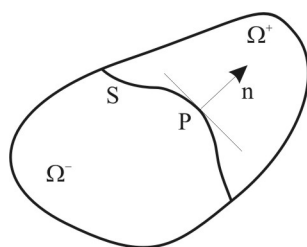
La mecánica de medios continuos cuenta con numerosos estudios sobre el proceso de falla de los materiales, e identifica una sucesión de eventos que se inician en escala microscópica y provocan el deterioro progresivo del medio, que inicialmente es tratado como un continuo, hasta transformarlo en un medio discontinuo.

Dado un dominio Ω , la falla o discontinuidad ∂S que separa los subdominios Ω^+ y Ω^- , queda caracterizada por la normal \mathbf{n} en el punto P (ver Figura 1). Dicha discontinuidad puede ser analizada desde perspectivas diferentes según el enfoque que se desee realizar. Se definen tres tipos de fallas:

- *Falla discreta o frágil:* este tipo de análisis escapa a la mecánica del medio continuo y debe ser abordado por la mecánica de fracturas. La discontinuidad se presenta en el campo de velocidad de desplazamiento, es decir $[[\dot{u}_i]] \neq 0$.
- *Falla localizada:* El campo \dot{u}_i permanece continuo mientras que la discontinuidad se presenta en el campo de sus gradientes, las deformaciones. Es decir $[[\dot{u}_i]] = 0$ y $[[\dot{\epsilon}_{ij}]] \neq 0$.
- *Falla difusa:* Es propia de materiales dúctiles. En este caso tanto el campo \dot{u}_i como $\dot{\epsilon}$ permanecen continuos, es decir $[[\dot{u}_i]] = 0$ y $[[\dot{\epsilon}_{ij}]] = 0$.

En las definiciones anteriores $[[\bullet]]$ es el operador salto, definido por $[[\bullet]] = \bullet^+ - \bullet^-$

Estos conceptos de la mecánica de sólidos pueden ser extrapolados a la mecánica de medios porosos sin mayores dificultades, considerando que el medio está constituido por un esqueleto sólido continuo circundado, en el caso más general, por fluidos de diferentes características. La influencia de cada fase fluida es tenida en cuenta a partir de la presión de poro correspondiente.

Figura 1: Superficie de discontinuidad S

3.1. Análisis de localización en medios porosos continuos locales

Con el objetivo de no perder generalidad en el estudio teórico del análisis de localización en medios porosos no debe restringirse el estudio a alguna fase o componente en particular (Schiva y Etse, 2006). Bajo esta hipótesis, es necesario admitir en principio que la discontinuidad puede estar presente tanto en el esqueleto sólido como en la fase porosa. Por lo tanto, aplicando el operador salto a la tasa del tensor de deformaciones y a la variación del contenido de masa de fluido, las siguientes expresiones son obtenidas

$$[[\dot{\varepsilon}_{ij}]] = 1/2 (g_i n_j + n_j g_i) \quad (57)$$

$$[[\dot{m}]] = - [[M_{i,i}]] = -n_i g_i^M \quad (58)$$

Aplicando la relación de Hadamard de una discontinuidad de primer orden a una magnitud escalar p , y tensorial σ_{ij} , (Coussy, 1995) se tiene

$$c [[p_{,i}]] + [[\dot{p}]] n_i = 0 \quad (59)$$

$$c [[\sigma_{ij,j}]] + [[\dot{\sigma}_{ij}]] n_j = 0 \quad (60)$$

3.1.1. Condición drenada

En el caso completamente drenado los efectos plásticos que introducen posibles localizaciones en el medio poroso conciernen pura y exclusivamente al esqueleto sólido y no al fluido. Asumiendo que la variación del vector de flujo relativo de la masa de fluido M_i , está gobernada por la ley de Darcy y despreciando fuerzas inerciales, resulta

$$M_i = -\rho^{fl} k_{ij} p_{,j} \quad (61)$$

donde k_{ij} es el tensor de permeabilidad del medio poroso. En problemas cuasiestáticos de carga plástica no es posible observar procesos acumulación o localización de energía dentro de la fase fluida en virtud del comportamiento propio de la misma. El fluido sometido a fuertes gradientes de presión experimenta un proceso de difusión espontánea, disipando rápidamente la energía en forma elástica mediante un proceso de conducción del fluido. En consecuencia, el vector de flujo relativo de la masa de fluido debe permanecer continuo,

$$[[M_i]] = -\rho^{fl} k_{ij} [[p_{,j}]] = 0 \quad (62)$$

Así mismo, a partir de la ec. (62) se puede afirmar que el gradiente de la presión de poro no puede presentar un salto o discontinuidad $[[p_{,i}]] = 0$. Teniendo presente esta consideración se

observa que la condición (59) sólo puede ser satisfecha si la tasa de la presión de poro tampoco presenta salto $[[\dot{p}]] = 0$.

Luego, teniendo en cuenta la ecuación de balance de momentum para problemas cuasiestáticos y aplicando el operador salto a la ecuación constitutiva incremental de ec. (55) se tiene

$$[[\dot{\sigma}_{ij}]] = E_{ijkl}^{ep, sd} [[\dot{\epsilon}_{kl}]] \quad (63)$$

siendo $E_{ijkl}^{ep, sd}$ el tensor elastoplástico del esqueleto sólido, presentado en el Apéndice 1.

Luego, introduciendo la ec. (63) en ec. (60) y considerando el operador salto de la tasa del tensor de deformaciones, ec. (57), se tiene

$$[[\dot{\sigma}_{ij}]] n_j = A_{ij}^{d, loc} g_j = 0 \quad (64)$$

donde $A_{ij}^{d, loc} = E_{ijkl}^{ep, sd} n_l n_k$ es el tensor acústico elastoplástico local en condiciones drenadas.

Dado que las soluciones triviales no son de interés, la solución de la ec. (64) implica que si $g_i \neq 0$ se requiere del análisis de las propiedades espectrales de dicho tensor acústico, lo cual constituye la condición necesaria de localización en medios porosos continuos drenados completamente. Como se observa luego del análisis de ec. (64), esta condición ha dejado completamente de lado el efecto de la fase porosa y la discontinuidad está restringida al campo de las velocidades de deformación, por lo cual el tensor acústico de localización coincide con el de los sólidos continuos. La presión de poro contribuye al fenómeno de localización solamente a través de su influencia en el criterio material empleado y en la modificación del módulo plástico generalizado.

3.1.2. Condición no drenada

A continuación se estudia el fenómeno de localización en condiciones no drenadas. Por condiciones no drenadas debe entenderse que tanto el esqueleto sólido como las fases fluidas se mueven solidariamente, es decir que la variación del contenido de masa del poro m , se conserva en el movimiento del esqueleto sólido $\dot{m} = 0$, y el medio se comporta como un material homogéneo cuyas propiedades no corresponden a las del esqueleto sólido ni a las de la fase porosa exclusivamente. Bajo estas consideraciones es posible calcular la presión de poro a través de la cinemática de la fase sólida.

Aplicando el operador salto a la relación constitutiva de ec. (56) y considerando a su vez el operador salto de la tasa del tensor de deformaciones de ec. (57), se tiene

$$[[\dot{\sigma}_{ij}]] n_j = A_{ij}^{u, loc} g_j = 0 \quad (65)$$

donde $A_{ij}^{u, loc} = E_{ijkl}^{ep, su} n_l n_k$ es el tensor acústico elastoplástico local en condiciones no drenadas. Nuevamente, las soluciones no triviales de la ec. (65) serán obtenidas cuando

$$\det \left(A_{ij}^{u, loc} \right) = 0 \quad (66)$$

lo cual constituye la condición necesaria de localización, en cuyo caso se perderá la elipticidad de la ecuación diferencial de gobierno.

De la comparación entre las expresiones (64) y (65) surge inmediatamente que en el análisis del proceso de localización en medios porosos las condiciones de contorno hidráulicas afectan directamente las matrices de acoplamiento sólido-fluido.

3.2. Análisis de localización en medios porosos continuos no locales

En la sección anterior se estudio el problema de localización en medios porosos locales. Este análisis es perfectamente válido cuando la falla de material es frágil, como es el caso de algunos suelos arenosos cementados con óxido de hierro (también conocidos como areniscas) o el homigón sometido a esfuerzos de tracción, donde la localización se generera en una región de espesor nulo $l_\alpha = 0$. Cuando el comportamiendo post-pico del medio se torna dúctil se evidencia una región donde se concentran los efectos plásticos que antecede al colapso del material, cuya medida es la longitud interna de localización l_α (Vrech, 2007).

Es importante recalcar que para el presente análisis se asume que el estado es homogéneo, al menos previo a proceso de localización. Es decir, la ecuación diferencial de consistencia plástica empleada será la ec. (52) que, a diferencia del desarrollo planteado en la sección anterior, depende tanto del multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ como de su laplaciano $\dot{\lambda}_{,ij}$.

Dado que el estudio se restringe al análisis de bifurcación de la solución incremental, el operador salto de la tensión actuante sobre la superficie de discontinuidad debe satisfacer la ecuación de equilibrio

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad (67)$$

donde la expresión del tensor de tensiones incremental está dada por las ecs. (27) o (29), dependiendo de las condiciones de borde hidráulicas del medio.

Se plantean los siguientes campos de soluciones para las variables de estado a partir de la teoría de ondas planas (Svedberg, 1999)

$$\begin{aligned} \dot{u}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathcal{U}}(t) \exp\left(\frac{i2\pi}{\delta} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}\right) \\ \dot{\gamma}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathcal{M}}(t) \exp\left(\frac{i2\pi}{\delta} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}\right) \\ \dot{\lambda}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\mathcal{L}}(t) \exp\left(\frac{i2\pi}{\delta} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}\right) \end{aligned} \quad (68)$$

siendo $\dot{\gamma}$ el contenido de masa, \mathbf{x} es el vector posición (en coordenadas cartesianas), \mathbf{n} es un vector unitario normal a la dirección de la onda y δ es la longitud de onda, mientras que $\dot{\mathcal{U}}$, $\dot{\mathcal{M}}$ y $\dot{\mathcal{L}}$ son las amplitud de ondas.

Reemplazando las ecs. (68) en el sistema de ecuaciones formado por la ecuación diferencial de consistencia plástica (52), la condición de equilibrio (67) y la relación constitutiva incremental (27) o (29), dependiendo nuevamente de las condiciones de borde en la fase porosa, se concluye que la ecuación de equilibrio sobre la superficie de discontinuidad se satisface para todo \mathbf{x} si

$$\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \left\{ C_{ijkl}^0 - \frac{C_{ijmn}^0 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{nm}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{op}} C_{pokl}^0}{h + \bar{h}^{nloc}} \right\} n_l n_k \dot{\mathcal{U}} = 0 \quad (69)$$

en el caso drenado, y

$$\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \left\{ C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{nm}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{op}} C_{pokl}}{h + \bar{h}^{nloc}} - M^2 \frac{\frac{\partial \Phi^*}{\partial p} B_{ij} B_{kl} \frac{\partial \Phi}{\partial p}}{h + \bar{h}^{nloc}} + \right. \\ \left. M \left(\frac{C_{ijmn} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{nm}} B_{kl} \frac{\partial \Phi}{\partial p}}{h + \bar{h}^{nloc}} + \frac{\frac{\partial \Phi^*}{\partial p} B_{ij} C_{mnkl} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{nm}}}{h + \bar{h}^{nloc}} \right) \right\} n_l n_k \dot{U} = 0 \quad (70)$$

en el caso no drenado, donde \bar{h}^{nloc} es el módulo de gradiente generalizado

$$\bar{h}^{nloc} = \bar{h}_s^{nloc} + \bar{h}_p^{nloc} = \left[l_s^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_j} H_{s_{jikl}}^{nloc} \right) n_l n_k + l_p^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_j} H_{p_{jikl}}^{nloc} \right) n_l n_k \right] \left(\frac{2\pi}{\delta} \right)^2 \quad (71)$$

Llamando $A_{ij}^{d,nloc}$ y $A_{ij}^{u,nloc}$ a las expresiones encerradas entre llaves de las ecs. (69) y (70) se obtienen los tensores acústicos de localización de medios porosos no locales en condiciones drenadas y no drenadas, respectivamente. De la comparación entre las condiciones de bifurcación para medios porosos continuos locales, de ecs. (64) y (65), y las correspondientes a medios porosos no locales de gradientes, de ecs. (69) y (70), se observa que la diferencia entre la teoría local y la teoría de gradientes reside únicamente en el módulo de gradiente generalizado \bar{h}^{nloc} , cuya función primordial es regularizadora.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

4.1. Descripción del modelo material Cam Clay modificado

A partir de las investigaciones de Roscoe et al. (1958) en la Universidad de Cambridge se desarrollaron una familia de modelos de plasticidad para suelos saturados al introducir una función de endurecimiento isotrópico en la función de fluencia. Posteriormente surgieron numerosos modelos entre los cuales se encuentra el Cam Clay (Schofield y Wroth, 1968) y el Cam Clay modificado (Roscoe y Burland, 1968). En un principio los modelos basados en el Cam Clay original estaban orientados al análisis de arcillas normalmente consolidadas, sin embargo, en virtud de la considerable capacidad de modelar las características de diferentes tipos de suelos y el reducido número de parámetros, ha sido extendido a una amplia gama de suelos incluyendo los suelos no saturados (Alonso et al., 1990; Bolzon et al., 1996; Mroginski, 2008).

Las principales características del Cam Clay modificado son las siguientes:

- a- La función de fluencia describe una elipse en el plano $(\sigma + \beta p, \tau)$ (ver figura 2).
- b- La componente volumétrica de la deformación plástica sobre la línea de estados críticos es nula (tangente horizontal) y el flujo plástico se produce a volumen constante.
- c- La plasticidad es asociada, con lo cual los estados de rotura quedan definidos por el valor máximo de $\tau = p_{co}/2$ que cumple con la condición de $\tau = M(\sigma + \beta p)$.
- d- La ley de endurecimiento/ablandamiento es una función creciente, convexa y asintótica a un valor determinado, con lo cual se cumple la condición de Prager y no se viola el Segundo principio de la Termodinámica (Atkinson y Bransby, 1978).

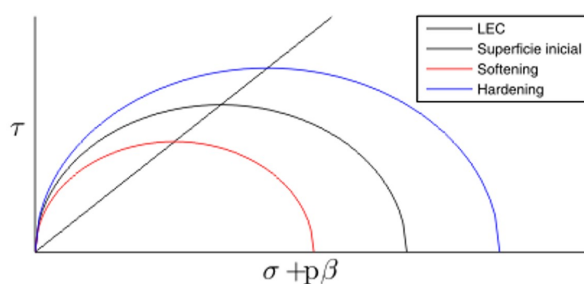


Figura 2: Esquema de la superficie de fluencia Cam Clay modificado

La función de fluencia esta definida por

$$F(\sigma, \tau, p, K) = \left(\sigma + \beta p + \frac{1}{2}K \right)^2 + \left(\frac{\tau}{M} \right)^2 - \frac{1}{4}K^2 \quad (72)$$

donde $\sigma = I_1/3$ es la tensión hidroestática, $\tau = \sqrt{3J_2}$ es la tensión de corte, M es la pendiente de la recta de estados críticos y K es la tensión disipativa termodinámicamente consistente igual a p_{co} . Además I_1 y J_2 son el primero y el segundo invariante del tensor de tensiones y del tensor desviador, respectivamente.

Por otro lado, resultados experimentales mostraron que el modelo de estado crítico convencional, a menudo subestima los valores del coeficiente de compresibilidad volumétrica K_0 (Gens y Potts, 1982; Balmaceda, 1991) por lo tanto resulta necesario emplear un potencial plástico diferente de la función de fluencia ec. (72). Por tal motivo se justifica el análisis de localización del modelo Cam Clay modificado dado que las propiedades espectrales de tensores simétricos, que conduce la plasticidad asociada, son siempre números reales.

En tal sentido, la función potencial plástica adoptada posee un coeficiente η que limita la influencia de la presión volumétrica en la región de ablandamiento, donde la necesidad de emplear un modelo no asociado es superior.

$$Q(\sigma, \tau, p, K) = \eta \left(\sigma + \beta p + \frac{1}{2}K \right)^2 + \left(\frac{\tau}{M} \right)^2 - \frac{1}{4}K^2 \quad (73)$$

con

$$\eta = \eta_0 + \frac{a \left(1 + m \exp \left(\frac{-(\sigma + \beta p)}{v} \right) \right)}{1 + n \exp \left(\frac{-(\sigma + \beta p)}{v} \right)} \quad (74)$$

siendo a , n y m parámetros de ajuste de la función exponencial, $\eta_0 = 1$ y $v = \text{abs}(p_{co}/2)$.

La adopción del potencial plástico de ec. (73) permite no solo reducir el coeficiente de compresibilidad volumétrica sino también mantener la consistencia termodinámica del modelo, la cual no podría ser conseguida empleando reglas de flujo no asociada, como la diseñada por (Alonso et al., 1990; Balmaceda, 1991).

La consistencia termodinámica exige a su vez que la parte disipativa de la energía libre de deformación plástica definida en (21) adopte la siguiente forma

$$\Psi^p(\kappa, \kappa_{,i}) = \Psi^{p,loc}(\kappa) + \Psi^{p,nloc}(\kappa_{,i}) = -\frac{1}{\chi} p_{co}^0 \exp(\chi \kappa) - \frac{1}{2} l_\alpha^2 H^g \kappa_{,ij} \quad (75)$$

donde la variable interna κ correspondiente al Cam Clay modificado es la deformación volumétrica plástica del esqueleto sólido ε^p definida en la ec. (13) que depende de la porosidad plástica ϕ^p , y de la deformación volumétrica de la matriz sólida, ε_s^p . La tensión disipativa K definida en la ec. (20) se descompone en una parte local K^{loc} , y otra no local de gradiente K^{nloc} , y adopta la siguiente forma

$$K^{loc}(\kappa) = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^p} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \phi^p} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_s^p} = (2 - \phi_0) p_{co}^0 \exp(\chi(\phi^p + (1 - \phi_0)\varepsilon_s^p)) \quad (76)$$

$$K^{nloc}(\kappa_{,i}) = -\left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa_{,i}}\right)_{,i} = l_s^2 H_s^{nloc} \nabla^2 \varepsilon_s^p + l_p^2 H_s^{nloc} \nabla^2 \phi^p \quad (77)$$

donde l_s y l_p son las longitudes internas características correspondientes al esqueleto sólido y a la fase porosa, respectivamente.

4.2. Análisis de localización del modelo Cam Clay modificado

En esta sección se analiza la condición de localización en medios porosos empleando el modelo material Cam Clay modificado no asociado descrito en la sección anterior. Las propiedades materiales empleadas son presentadas en la tabla 1

Pendiente de la LEC, M	1.00
Presión de poro, p	-10.00 MPA
Presión de preconsolidación, p_{co}	-100.00 MPA
Porosidad inicial, ϕ_0	0.4
Coficiente de compresibilidad del medio, K_0	1000.00
Coficiente de compresibilidad del sólido, K_s	1500.00
Coficiente de compresibilidad del fluido, K_{fl}	500.00
Coficiente de Biot, $b = 1 - K_0/K_s$	0.33
Coficiente de reducción, β	0.5
Módulo de elasticidad, E	20000.0 MPA
Coficiente Poisson, ν	0.2

Tabla 1: Propiedades materiales

El estudio se llevo a cabo tanto para estado plano de deformaciones (EPD) como para estado plano de tensiones (EPT) donde dominio para I_1 y J_2 fue deducido a siguiendo trabajos anteriores realizados por Parnas (2005), considerando que el sistema de referencia coincide con las direcciones principales.

$$\begin{aligned}
 -242,23 \leq I_1 \leq 14,86 & \text{ para EPD} \\
 0,0269 \leq J_2 \leq 3,4360e + 7 & \text{ para EPD} \\
 -168,76 \leq I_1 \leq 14,48 & \text{ para EPT} \\
 17,46 \leq J_2 \leq 2373,40 & \text{ para EPT}
 \end{aligned} \quad (78)$$

En primer lugar se muestran los resultados correspondientes a plasticidad local. En la figura 3a se grafica en forma perpendicular a la superficie de fluencia el determinante del tensor acústico de localización en condiciones drenadas, correspondiente a la ec. (64).

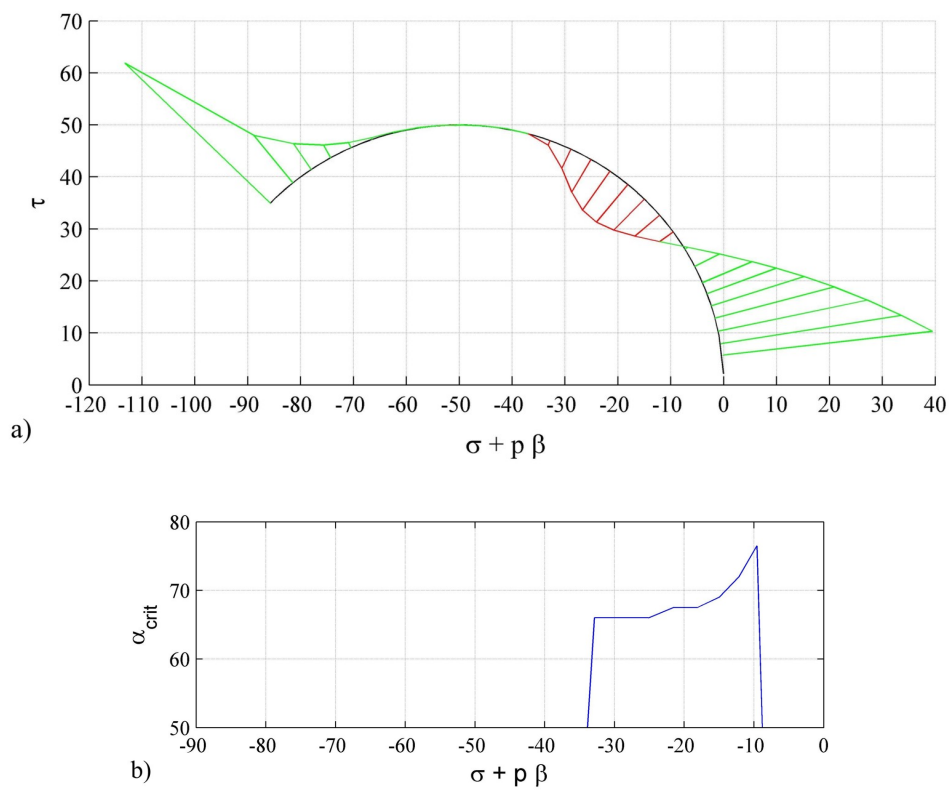


Figura 3: Tensor acústico elastoplástico de localización (Cond. Drenado y EPD)

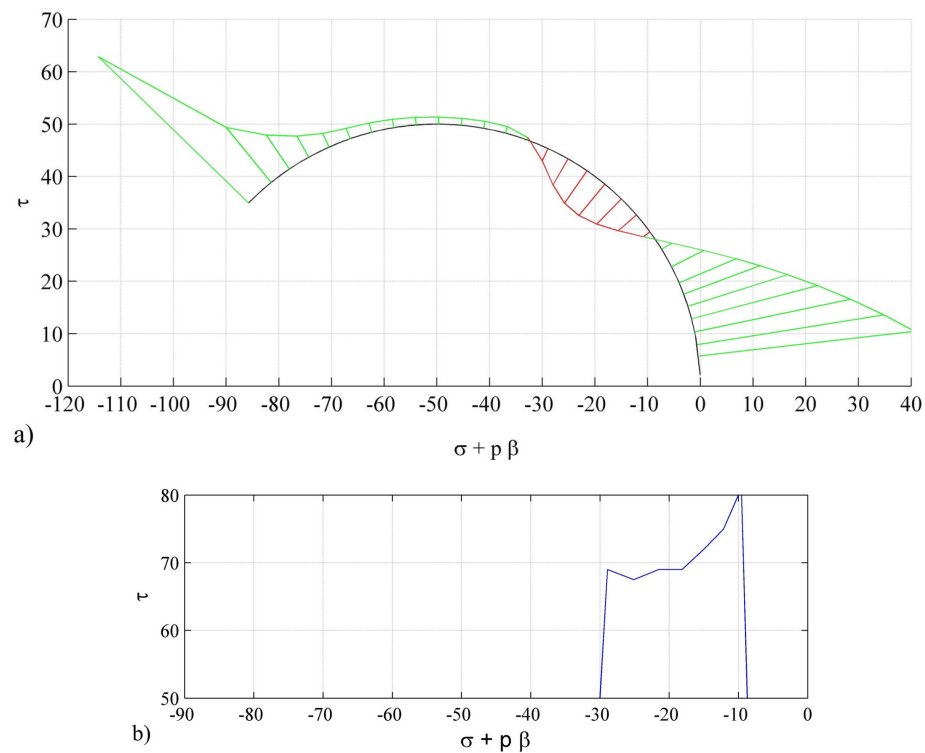


Figura 4: Tensor acústico elastoplástico de localización (Cond. No Drenado y EPD)

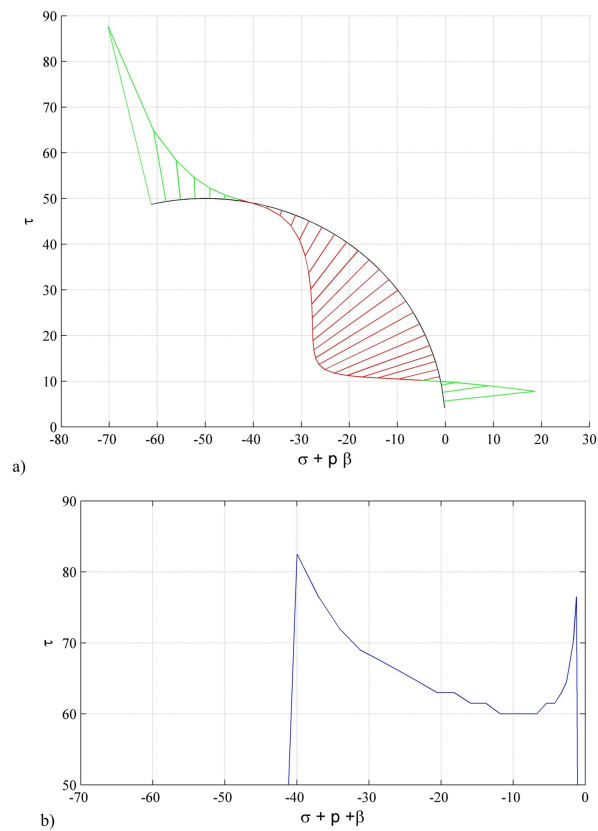


Figura 5: Tensor acústico elastoplástico de localización (Cond. Drenado y EPT)

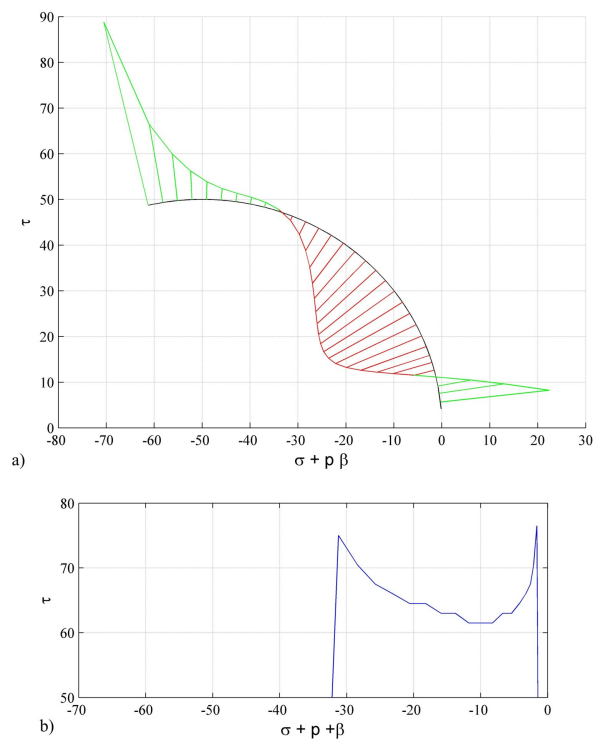


Figura 6: Tensor acústico elastoplástico de localización (Cond. No Drenado y EPT)

A su vez, en la figura 3b se muestra la variación del ángulo crítico de localización θ vs. $(\sigma + \beta p, \tau)$ bajo las mismas condiciones hidráulicas.

En las figuras 4a y 4b se muestran el determinante del tensor acústico de localización en condiciones no drenadas, ec. (66), y la variación del ángulo crítico de localización θ vs. $(\sigma + \beta p, \tau)$, respectivamente.

En las figuras 5a y 5b se muestran resultados para EPT, análogos a las figuras 3a y 3b, respectivamente.

Del mismo modo, en las figuras 6a y 6b se muestran resultados para EPT, análogos a las figuras 4a y 4b, respectivamente.

Prosiguiendo con los resultados numéricos, se muestran en las figuras siguientes los resultados correspondientes a la sección 3.2, es decir, se analiza la condición de bifurcación en medios porosos continuos no locales.

En las figuras 7a y 7b se muestra el determinante del tensor acústico no local para EPD en condiciones drenadas ec. (69), y no drenadas ec. (70), respectivamente. Del mismo modo, en las figuras 8a y 8b se muestra el determinante del tensor acústico no local para EPT en condiciones drenadas y no drenadas.

Puede apreciarse claramente en dichas figuras que el módulo de gradiente generalizado \bar{h}^{nloc} , deducido a partir de la teoría no local de gradiente ec. (71), suprime la falla localizada en todo el dominio de I_1 . Cabe aclarar que se adoptaron los siguientes valores para la definición del módulo de gradiente generalizado del esqueleto sólido \bar{h}_s^{nloc} , y de la fase porosa \bar{h}_p^{nloc} (tabla 2).

Longitud interna característica del esqueleto sólido, l_s	1.00m
Módulo de gradiente del esqueleto sólido, H_s^{nloc}	0.5*E
Longitud interna característica de la fase porosa, l_p	1.00m
Módulo de gradiente de la fase porosa, H_p^{nloc}	0.5*K ₀

Tabla 2: Propiedades materiales no locales

Para finalizar se muestra detalladamente los resultados del tensor acústico drenado de localización en tres puntos característicos de la superficie de fluencia. Estos puntos corresponden a las abscisas -80 , -60 y -20 de la figura 7a para EPD o a las abscisas -60 , -50 y -20 de la figura 8a para EPT. Para dichos puntos se grafica el determinante del tensor acústico drenado no local en las figuras 9 y 10, vs el ángulo de falla. Además, para mostrar el efecto regularizador de la formulación de gradiente en el proceso de falla localizada se presenta las figuras 11 y 12, para EPD y EPT respectivamente, donde se grafica el determinante del tensor acústico drenado local $A_{ij}^{d,loc}$ y no local $A_{ij}^{d,nloc}$. Aquí se aprecia como que el tensor acústico local posee un cambio de signo, en el pto. 3, mientras que en el tensor regularizado no local el determinante de $A_{ij}^{d,nloc}$ es siempre positivo.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo genérico termodinámicamente consistente para el análisis de medios porosos no locales a partir de la teoría de gradientes. De la deducción matemática de dicho modelo surge la posibilidad de definir múltiples longitud internas características que permiten modelar con mejor fundamento los efectos no locales en medios porosos multifásicos.

Así mismo, se dedujeron los tensores acústicos de localización para elastoplasticidad clásica y para plasticidad de gradientes, mostrandose que la diferencia entre la teoría clásica y la teoría no local de gradiente radica en el módulo de gradiente generalizado.

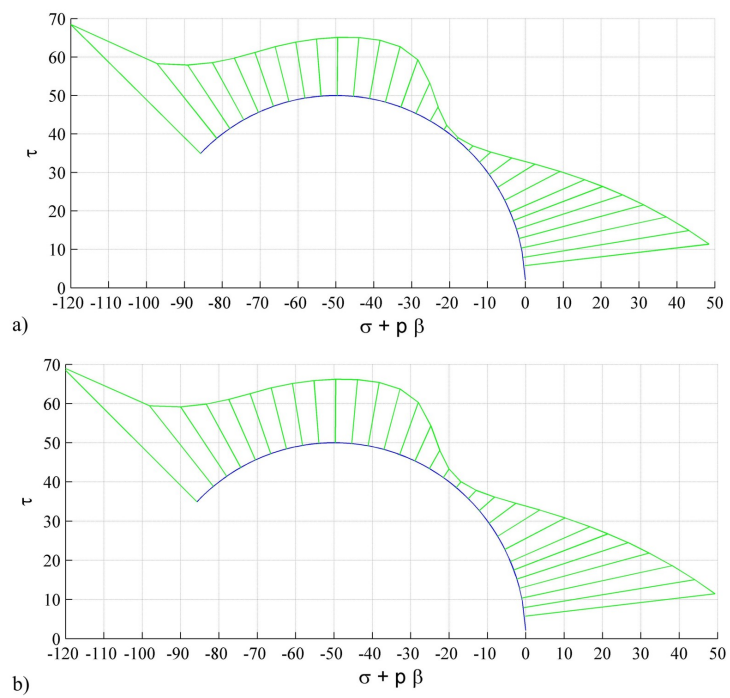


Figura 7: Tensor acústico de localización de gradiente para EPD

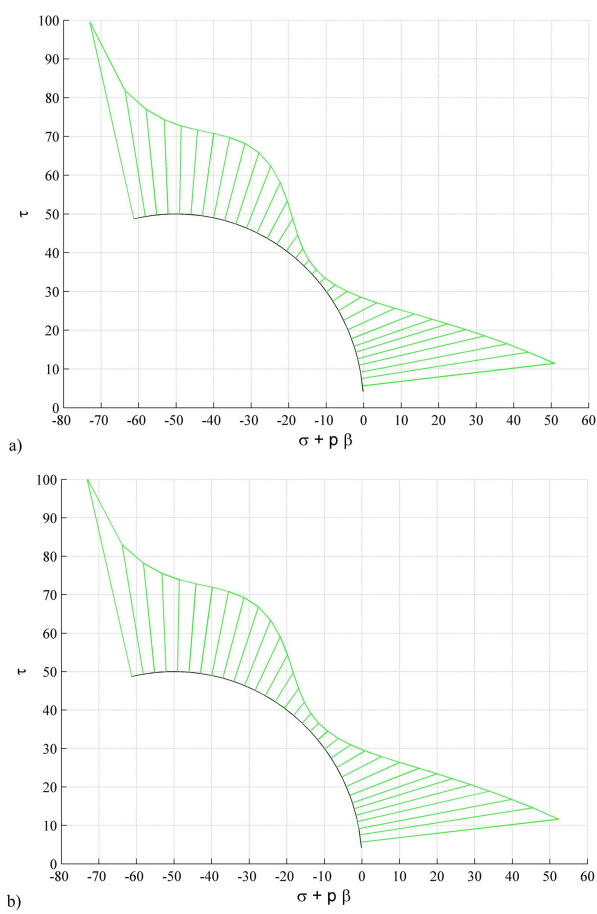


Figura 8: Tensor acústico de localización de gradiente para EPT

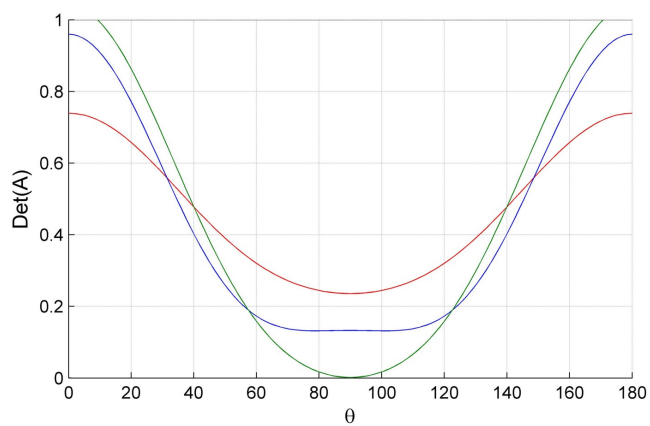


Figura 9: $\text{Det}(A_{ij}^{d,nloc})$ vs. θ para EPD

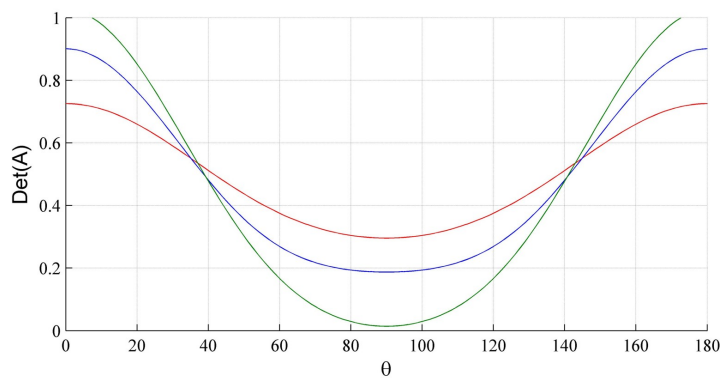


Figura 10: $\text{Det}(A_{ij}^{d,nloc})$ vs. θ para EPT

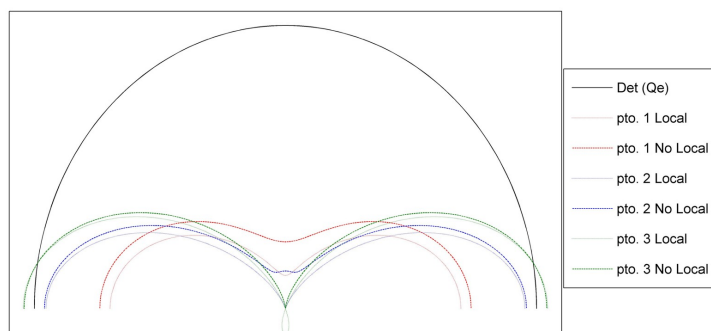


Figura 11: EPD-DrainedNL-FLOR

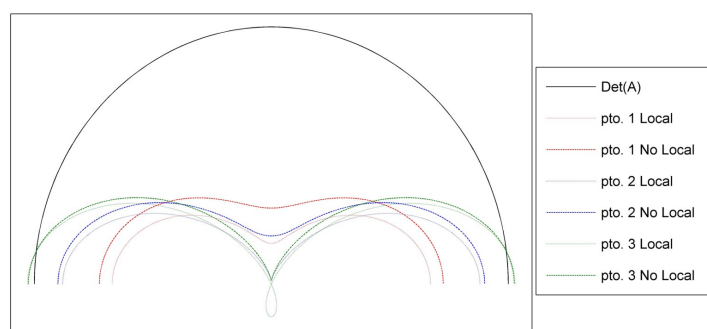


Figura 12: EPT-DrainedNL-FLOR

El modelo material empleado para la demostración de resultados fue el Cam Clay modificado para el cual se propuso un potencial plástico que permite no solo reducir el coeficiente de compresibilidad volumétrica, que a menudo es sobretimado por el modelo Cam Clay, sino también mantener la consistencia termodinámica del modelo, que no ocurre con el empleo de reglas de flujo no asociada.

6. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido financiado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas CONICET por medio del Proyecto PIP 112-200801-00707 y por el Consejo de Investigaciones de la Universidad Nacional de Tucumán CIUNT mediante el Proyecto E26/455.

REFERENCIAS

- Alonso E., Gens A., y Josa A. A constitutive model for partially saturated soils. *Geotechnique*, 40(3):405–430, 1990.
- Atkinson J. y Bransby P. *The mechanics of soils. An introduction to critical state soil mechanics*. University Series in Civil Engineering. McGraw Hill, 1978.
- Balmaceda A. *Suelos compactados, un estudio teorico y experimental*. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Catalunya, 1991.
- Bolzon G., Schrefler B., y Zienkiewicz O. Elastoplastic soil constitutive laws generalized to partially saturated states. *Geotechnique*, 46(2):279–289, 1996.
- Coussy O. *Mechanics of Porous Continua*. John Wiley & Sons, 1995.
- Di Rado H., Beneyto P., Mroginski J., y Awruch A. Influence of the saturation-suction relationship in the formulation of non-saturated soils consolidation models. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(5), 2009.
- Etse G. *Theoretische und numerische untersuchung zum diffusen und lokalisierten versagen in beton*. Ph.D. Thesis, University of Karlsruhe, Germany, 1992.
- Etse G. y Vrech S. Geometrical method for localization analysis in gradient-dependent J2 plasticity. *Journal of Applied Mechanics, ASCE*, 73(6):1026–1030, 2006.
- Gawin D., Baggio P., y Schrefler B. Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media. *International Journal for numerical methods in fluids*, 20:969–987, 1995.
- Gens A. y Potts D. A theoretical model for describing the behaviour of soils not obeying Rendulic's principle. In P.G.S.J. Dungar R., editor, *Int. Sym. on Numerical Models in Geomechanics, Zurich*, páginas 24–32. 1982.
- Gudmundson P. A unified treatment of strain gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52:1379–1406, 2004.

- Khalili N. y Loret B. An elasto-plastic model for non-isothermal analysis of flow and deformation in unsaturated porous media: formulation. *International Journal of solid and structures*, 38(46-47):8305–8330, 2001.
- Larsson J. *On the Modelling of Porous Media with emphasis on localization*. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1999.
- Lewis R. y Schrefler B. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley & Sons, 1998.
- Mroginski J., Vrech S., y Etse G. Formulación del comportamiento mecánico de medios porosos parcialmente saturados a partir de la teoría de gradientes. *Mecánica Computacional*, 27:959–974, 2008.
- Mroginski J.L. *Geomecánica no lineal aplicada a problemas ambientales en medios porosos parcialmente saturados*. Tesis de maestría en ciencias de la ingeniería, Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), 2008.
- Pamin J. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*. TU-Delft, The Netherlands, 1994.
- Parnas J. *Modelación y análisis de falla localizada en hormigón*. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Tucumán, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Argentina, 2005.
- Peet R., Svedberg T., y Runesson K. A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *International Journal of Plasticity*, 13(6):669–696, 1997.
- Roscoe K. y Burland J. *On the generalized stress-strain behaviour of wet clay*. In Engineering Plasticity, eds. J. Heyman and F.A. Leckie. Cambridge, England: Cambridge University Press., 1968.
- Roscoe K., Schofield A., y Wroth. C. On the yielding of soils. *Géotechnique*, 8:22–53, 1958.
- Schiava R. y Etse G. Constitutive modelling and discontinuous bifurcation assessment in unsaturated soils. *Journal of Applied Mechanics. ASME.*, 73(6):1039–1044, 2006.
- Schofield A. y Wroth C. *Critical State Soil Mechanics*. London, England: McGraw-Hill, 1968.
- Schrefler B. y Pesavento F. Multiphase flow in deforming porous material. *Computers and Geotechnics*, 31:237–250, 2004.
- Svedberg T. *On the Modelling and Numerics of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage*. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1999.
- Voyiadjis G. y Deliktas B. Formulation of strain gradient plasticity with interface energy in a consistent thermodynamic framework. *Int. J. Plasticity (in press)* doi:10.1016/j.ijplas.2008.12.014, 2009.
- Vrech S. *Simulación Computacional de Procesos de Falla Localizada basada en Teoría de Gradientes*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Tucumán, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Argentina, 2007.
- Vrech S. y Etse G. Geometrical localization analysis of gradient-dependent parabolic drucker-prager elatoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 22:943–964, 2005.

APENDICE 1

Componentes de la relación constitutiva de elastoplasticidad de gradiente de ec. (55) en condiciones drenadas:

$$E_{ijkl}^{ep,sd} = C_{ijkl}^0 - \frac{C_{ijmn}^0 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{nm}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{op}} C_{pokl}^0}{h} \quad (79)$$

$$E_{ij}^{ep,pd} = -B_{ij} - \frac{C_{ijkl}^0 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{lk}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{nm}} B_{mn} \right)}{h} \dot{p} \quad (80)$$

$$E_{ij}^{g,spd} = \frac{C_{ijkl}^0 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{lk}}}{h} \quad (81)$$

$$\dot{f}^g = l_\alpha^2 \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_j} H_{ijkl}^{loc} \dot{\lambda}_{,lk} \quad (82)$$

Componentes de la relación constitutiva de elastoplasticidad de gradiente de ec. (56) en condiciones no drenadas:

$$E_{ijkl}^{ep,su} = C_{ijkl} - \frac{C_{ijmn} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{nm}} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{op}} C_{pokl}}{h} - M^2 \frac{\frac{\partial \Phi^*}{\partial p} B_{ij} B_{kl} \frac{\partial \Phi}{\partial p}}{h} + M \left(\frac{C_{ijmn} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{nm}} B_{kl} \frac{\partial \Phi}{\partial p}}{h} + \frac{\frac{\partial \Phi^*}{\partial p} B_{ij} C_{mnkl} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{nm}}}{h} \right) \quad (83)$$

$$E_{ij}^{ep,pu} = -M \left(B_{ij} - \frac{\frac{\partial \Phi^*}{\partial p} B_{ij} \left(M \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{nm}} B_{mn} \right)}{h} \right) - \frac{C_{ijkl} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{lk}} \left(M \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{nm}} B_{mn} \right)}{h} \quad (84)$$

$$E_{ij}^{g,spu} = \frac{C_{ijkl} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_{lk}} - M B_{ij} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p}}{h} \quad (85)$$

$$\dot{f}^g = l_\alpha^2 \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_j} H_{ijkl}^{loc} \dot{\lambda}_{,lk} \quad (86)$$