

UNA METODOLOGÍA ADAPTIVA MEDIANTE ALGORITMOS GENÉTICOS APLICADA AL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS

L. Pérez Pozo^a, O. Duran^b and F. Perazzo^a

^a*Departamento de Ingeniería Mecánica, Aula UTFSM-CIMNE, Universidad Técnica Federico Santa María, Av. España 1680, Valparaíso, Chile, luis.perez@usm.cl - franco.perazzo@usm.cl, <http://www.mec.utfsm.cl>*

^b*Escuela de Ingeniería Mecánica, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Av. Los Carrera 01567, Quilpué, Chile, orlando.duran@ucv.cl, <http://www.mecanica.ucv.cl>*

Palabras Clave: Métodos sin malla, colocación puntual, puntos finitos, algoritmos genéticos, adaptividad.

Resumen.

En este trabajo se presenta una nueva técnica adaptiva para un método sin malla aplicada a la resolución de ecuaciones diferenciales parciales en todo ámbito de la ingeniería. El método propuesto combina el uso de técnicas de optimización y búsqueda basadas en Algoritmos Genéticos, las características propias del método sin malla de Puntos Finitos y una estrategia de corrección de la ubicación de los nodos de la discretización. El proceso señalado permite mejorar una solución inicial obtenida a partir de una discretización de puntos realizada en forma aleatoria. Los resultados de los diferentes test desarrollados muestran un correcto comportamiento de la solución numérica al implementar la técnica propuesta en el presente trabajo.

1 INTRODUCCIÓN

Los *métodos sin malla* o libres de malla comprenden un conjunto de nuevas técnicas numéricas que, a diferencia de los métodos tradicionales como el de Elementos Finitos (MEF) [Zienkiewicz and Taylor \(2000\)](#), no requieren de una subdivisión del dominio en una malla. Estas técnicas han sido utilizadas ampliamente para resolver ecuaciones diferenciales parciales a partir de distribuciones de puntos regulares o irregulares.

Aspectos generales, clasificación, ventajas y desventajas de estos métodos pueden encontrarse en las referencias [Duarte and Oden \(1996\)](#); [Belytschko et al. \(1996\)](#); [Oñate et al. \(1996b\)](#); [Fries and Matthies \(2003\)](#); [Liu \(2002\)](#); [Li and Liu \(2004\)](#); [Gu \(2005\)](#); [Chen et al. \(2006\)](#).

Con el propósito de obtener soluciones numéricas eficientes y de alta precisión y por otro lado, distribuir adecuadamente los puntos en las regiones importantes del problema, se han creado procedimientos adaptivos de resolución tanto para métodos con malla [Park et al. \(2003\)](#); [Dwyer et al. \(1980\)](#); [Liou \(1993\)](#), como sin malla [Duarte and Oden \(1996\)](#); [Atluri and Kim \(2000\)](#); [Liu and Tu \(2002\)](#); [Ma and Chen \(2005\)](#); [Rabczuk and Belytschko \(2005\)](#); [Perazzo et al. \(2007\)](#); [Angulo et al. \(2009\)](#); [ans R.L. Wang and Lin \(2006\)](#).

La mayoría de los trabajos señalados, consideran la inclusión de nuevos puntos en el dominio con el consiguiente aumento del costo computacional debido a la generación de nuevos subdominios de interpolación. El cálculo de magnitudes basadas en gradientes y las sucesivas revisiones del error, o de algún estimador de este, en cada punto del dominio, también provocan dicho aumento.

En este trabajo se presenta una nueva técnica adaptiva para un método sin malla aplicada a la resolución de ecuaciones diferenciales parciales usando el Método de Puntos Finitos (MPF) [Oñate et al. \(1996a,b\)](#). La metodología propuesta combina el uso de técnicas de optimización y búsqueda basadas en Algoritmos Genéticos (AG) [Goldberg \(1989\)](#); [Holland](#); [Haupt and Haupt \(2004\)](#), las características propias del MPF y una estrategia de corrección de la ubicación de los nodos de la discretización.

2 EL MÉTODO DE PUNTOS FINITOS

El MPF fue propuesto por [Oñate et al. \(1996a,b\)](#) inicialmente con el propósito de resolver problemas de transporte convectivo y fluidos. Posteriormente su aplicación se extendió a transporte difusivo advectivo [Oñate and Idelsohn \(1998\)](#) y fluidos incompresibles [Oñate et al. \(2000\)](#). En el contexto de la mecánica de sólidos el MPF ha sido aplicado exitosamente en problemas de elasticidad [Oñate et al. \(2001\)](#), [Perazzo \(2002\)](#), [Perazzo et al. \(2006\)](#), [Martin \(2006\)](#), dinámica de sólidos [Perazzo et al. \(2004\)](#), refinamiento adaptivo [Perazzo et al. \(2007\)](#); [Angulo et al. \(2009\)](#) y recientemente en comportamiento no-lineal de materiales [Pérez-Pozo and Perazzo \(2007\)](#); [Pérez-Pozo et al. \(2009\)](#).

En el MPF, la aproximación local de la función incógnita $u(\mathbf{x})$ en el subdominio o *nube* Ω_I se construye de la siguiente forma

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x})\alpha_i = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\alpha \quad \forall \mathbf{x}_I \in \Omega, \forall \mathbf{x} \in \Omega_I \quad (1)$$

siendo $\alpha^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_m]$ un vector de parámetros constantes, es decir, válidos únicamente en la respectiva *nube* Ω_I y que no dependen de las coordenadas espaciales \mathbf{x} , y $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ la *base de interpolación* que contiene típicamente monomios. Tal como en una interpolación por mínimos cuadrados, la condición de que el número de puntos n en la *nube* sea mayor que el número de términos m de la *base de interpolación*, impide que la aproximación $\hat{u}(\mathbf{x})$ se ajuste a todos los valores nodales $u(\mathbf{x}_j) = u_j^h$ con $j = 1, \dots, n$. Para solventar esto se recurre a la minimización de la suma del error en cada punto,

ponderado por una función fija como

$$J_I = \sum_{j=1}^n w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) (u_j^h - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j)\alpha)^2 \quad (2)$$

cuya forma compacta matricial es

$$J_I = (\mathbf{u}^h - \mathbf{P}(\mathbf{x}_I)\alpha)^T \mathbf{W}_I (\mathbf{u}^h - \mathbf{P}(\mathbf{x}_I)\alpha) \quad (3)$$

donde

$$\mathbf{u}^h = [u_1^h \ u_2^h \ \dots \ u_n^h]^T, \in Vec(n)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_I) = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \in Mat(n \times m) \quad (4)$$

$$\mathbf{W}_I = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \in Mat(n \times n) \quad (5)$$

siendo $w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j)$ la función de ponderación fija de Gauss [Oñate et al. \(1996a,b\)](#); [Oñate \(1996\)](#) dada por

$$w(x_I - x_j) = \begin{cases} \frac{\exp(-(d_j/c)) - \exp(-(r/c))}{(1 - \exp(-(r/c)))} & \text{si } d_j \leq r \\ 0 & \text{si } d_j > r \end{cases} \quad (6)$$

con $d_j = \|x_I - x_j\|$, $r = q \max_{x_j \in \Omega_I} \|x_I - x_j\|$ y $c = \beta r$. El soporte de esta función es isotropico, circular y esférico en dos y tres dimensiones respectivamente. Una descripción detallada de los efectos de los parámetros q y β junto con algunos comentarios para su elección se presenta en [Ortega et al. \(2007\)](#).

La minimización estándar del funcional Ec. 2 respecto del vector α permite obtener

$$\alpha = \mathbf{C}_I^{-1} \mathbf{u}^h, \quad \text{con } \mathbf{C}_I^{-1} = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \quad (7)$$

con $\mathbf{A}_I = \mathbf{A}(\mathbf{x}_I)$ (matriz de momentos), y $\mathbf{B}_I = \mathbf{B}(\mathbf{x}_I)$ respectivamente

$$\mathbf{A}_I = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{W}_I \mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \quad (8)$$

$$[A_I]_{ij} = \sum_{k=1}^n p_i(\mathbf{x}_k) w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_k) p_j(\mathbf{x}_k) \quad i, j = 1, \dots, m \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_I = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{W}_I \quad (10)$$

$$[B_I]_{ij} = p_i(\mathbf{x}_j) w(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad (11)$$

La aproximación final en el MPF se consigue reemplazando la expresión Ec. 7 en 1, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) &\cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{C}_I^{-1}\mathbf{u}^h \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) [A_I]_{kj}^{-1} [B_I]_{ji} u_i^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I
\end{aligned} \tag{12}$$

siendo las *funciones de forma*

$$\begin{aligned}
\phi_I^i(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{C}_I^{-1} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}_I^{-1}\mathbf{B}_I \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) [A_I]_{kj}^{-1} [B_I]_{ji} \quad , i = 1, \dots, n
\end{aligned} \tag{13}$$

Si en Ec. 2 se elige una *función de ponderación* igual a la unidad, se obtiene una aproximación por mínimos cuadrados estándar. Se debe notar, de acuerdo con la expresión Ec. 1, que la aproximación se define para cada subdominio de interpolación Ω_I . En consecuencia, un punto i que pertenezca a dos *nubes* Ω_I y Ω_J respectivamente, y entre las cuales exista cierto traslape, tendrá asociadas diferentes funciones de forma según si se adscribe a una u otra nube, lo que significa $\phi_I^i(\mathbf{x}) \neq \phi_J^i(\mathbf{x})$. La interpolación resulta ahora multievaluada en i , por lo que es preciso tomar alguna decisión que limite la elección a un único valor. En el MPF, por ejemplo, esta disyuntiva se resuelve utilizando un procedimiento de *colocación puntual* Oñate et al. (1996a,b); Oñate (1996).

Un estudio más extenso de esta técnica, sus propiedades y características respecto de las aproximaciones utilizadas en otros métodos sin malla, ha sido desarrollada en Oñate et al. (1996a,b); Oñate (1996); Perazzo (2002).

3 ALGORITMOS GENÉTICOS

Un Algoritmo Genético, es una técnica de la Inteligencia Artificial que imita a la evolución biológica como estrategia para resolver problemas Goldberg (1989); Holland; Haupt and Haupt (2004). Ellos forman parte de los llamados Algoritmos Evolutivos (AE). Dado un problema específico a resolver, la entrada del AG es un conjunto de soluciones potenciales a ese problema, codificadas de alguna manera, y que permite evaluar cuantitativamente a cada opción. Luego el AG evalúa cada candidata de acuerdo con la *función de aptitud* (fitness). En un conjunto de candidatas generadas aleatoriamente, algunas no funcionarán en absoluto, y serán eliminadas, pero habrá otras que pueden ser prometedoras hacia la solución del problema. Estas candidatas prometedoras se conservan realizándose múltiples copias de ellas. Dichas copias no perfectas, debido a que se introducen cambios aleatorios (operaciones de cruzamiento y mutación) durante el proceso, formando un nuevo conjunto de soluciones candidatas, siendo sometidas a una nueva ronda de evaluación de aptitud. Las candidatas que han empeorado o no han mejorado con los cambios en su código son eliminadas; pero, el subconjunto de la población que vio mejorada su aptitud es considerado como el de mejores soluciones del problema, más completas o más eficientes. De nuevo, se seleccionan y copian estos individuos vencedores hacia la siguiente generación con cambios aleatorios y el proceso se repite hasta que una cierta condición de término se alcance.

4 IMPLEMENTACIÓN DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA

Se presentan a continuación los tópicos principales de la técnica propuesta en este trabajo.

4.1 Selección de puntos a reubicar

Con el propósito de presentar la metodología propuesta, en este trabajo se utiliza el error relativo e_r como indicador de la calidad de la posición del punto.

$$e_r = \frac{|u_I^T - \hat{u}_I|}{u_I^T} \quad (14)$$

siendo u_I^T , \hat{u}_I , la solución teórica y numérica en el punto I de la partición del dominio, el cual se ha discretizado mediante un número finito de N puntos.

Se eligen los N_{reub} puntos con mayor error relativo, Fig. 1 -a). y se inician las operaciones evolutivas del AG. Estas operaciones se repiten un número de N_{gen} veces hasta que se realiza una nueva revisión de puntos a reubicar, repitiéndose nuevamente el proceso.

4.2 Creación de población inicial

Una vez identificados los puntos a reubicar, se genera una población inicial de N_{ind} individuos que representan las posibles nuevas coordenadas de dichos puntos. Se define la posible nueva posición del punto I dentro de una banda circular de ancho aleatorio t_I , Fig. 1- b), teniendo como límites las distancias máximas y mínimas de la correspondiente *nube* de puntos. La elección de esta banda produce correcciones graduales de la posición de los puntos y a su vez permite optimizar la generación de *nubes* en la próxima generación.

4.3 Función de aptitud

Con el objetivo de controlar en forma simultánea tanto el error global como el relativo, se ha definido una *función de aptitud*, Fig. 1- c), que considera ambos indicadores

$$F_{Aptitud} = e_g \cdot \| e_r \| \quad (15)$$

siendo el error global

$$e_g = \sqrt{\frac{\sum_{I=1}^N (u_I^T - \hat{u}_I)^2}{\sum_{I=1}^N (u_I^T)^2}} \quad (16)$$

4.4 Selección de individuos

En este trabajo se utiliza un proceso de selección de individuos mediante Elitismo y Torneos, Fig. 1- c). El Elitismo garantiza la selección de los miembros más aptos de cada generación. Por otro lado, en los Torneos se enfrentan aleatoriamente una pareja de soluciones, pasando a la siguiente etapa, aquel individuo mejor adaptado, en este caso, con un valor menor de $F_{Aptitud}$.

4.5 Codificación

Se utiliza una codificación discreta decimal. Por tanto, en un caso 2-D para un largo del gen $l_{gen} = 2$, las coordenadas del punto a reubicar (fenotipo) $[0, 56 \ 0.31]$ se codifican como $[5631]$ (genotipo).

4.6 Operadores genéticos

En este trabajo se consideran los siguientes operadores genéticos, Fig. 1- c):

Cruzamiento , con 1 o 2 puntos de cruce escogidos en forma aleatoria.

Mutación , con lo que se escoge al azar un lugar del cromosoma, reemplazando aleatoriamente el valor de este.

4.7 Decodificación

En este proceso se obtienen las coordenadas de los puntos a reubicar a partir de las operaciones genéticas previas. Estas coordenadas deben ser revisadas para asegurar valores dentro del rango de estudio.

La Fig. 1 muestra un esquema de la presente metodología.

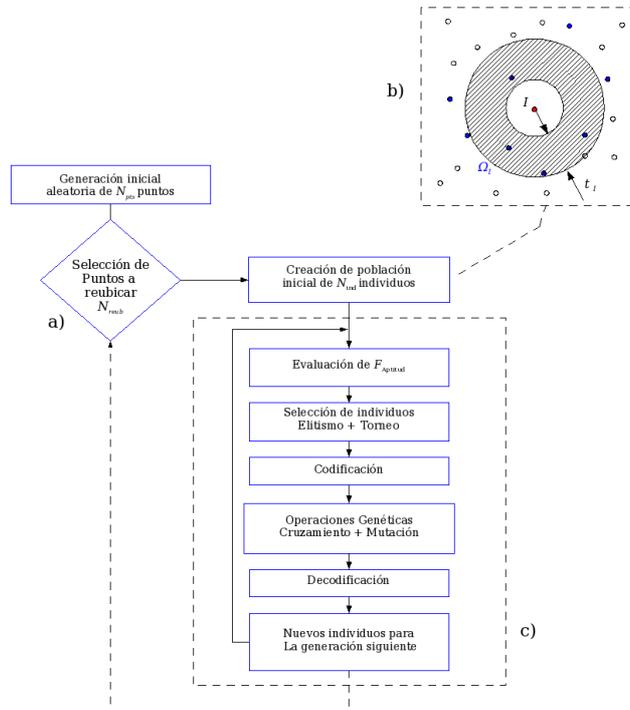


Figure 1: Esquema de la metodología propuesta.

La referencia [Haupt and Haupt \(2004\)](#) entrega características más detalladas de los AG así como diferentes aplicaciones prácticas de estos.

5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Se presentan a continuación dos ejemplos numéricos que permiten comprobar el buen funcionamiento de la metodología propuesta.

5.1 Ecuación de Poisson 1-D

Este problema fue extraído de la referencia [Park et al. \(2003\)](#). Se resuelve la ecuación diferencial

$$-u_{xx} = f(x) \quad x \in [-1, 1] \quad (17)$$

con las condiciones de equilibrio esenciales

$$u(-1) = 2 + e^{-100}, \quad u(1) = e^{-100} \quad (18)$$

cuya solución teórica es

$$u^T(x) = 1 - x^3 - e^{-100x^2} \quad (19)$$

la cual cambia abruptamente en la vecindad de $x = 0$.

A modo de ejemplo, para $N = 15$ puntos, Fig. 2 a), la discretización uniforme alcanza un valor de $F_{\text{Aptitud}}^{\text{inicial}} = 7.1392$ y $F_{\text{Aptitud}}^{\text{final}} = 0.01268$ cuando se corrige la posición de los puntos. Por otro lado, con $N = 21$ puntos, Fig. 2 b), se obtiene $F_{\text{Aptitud}}^{\text{inicial}} = 0.0105$ y $F_{\text{Aptitud}}^{\text{final}} = 0.00243$.

En la Fig. 2 se observa como la reubicación de puntos ajusta en mejor forma la aproximación con la solución teórica buscada.

Los parámetros utilizados en la resolución por MPF y en el AG, luego de un análisis exploratorio para el algoritmo programado, se muestran en la tabla 1.

Tabla 1: Parámetros MPF + AG, Ecuación de Poisson 1-D

MPF		
Puntos discretización	N	15,21
Puntos nube	n	5
Polinomio base de interpolación	m	3
Parámetros función de ponderación	q, β	1.1 y 0.25
Puntos a reubicar	N_{reub}	3
AG		
Individuos	N_{ind}	100
Revisiones	N_{rev}	5
Generaciones de evolución	N_{gen}	5
Probabilidad cruzamiento	P_{cru}	0.9
Probabilidad mutación	P_{mut}	0.25
Largo gen	l_{gen}	2

5.2 Ecuación de Laplace 2-D

Se resuelve la ecuación diferencial parcial

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1] \quad (20)$$

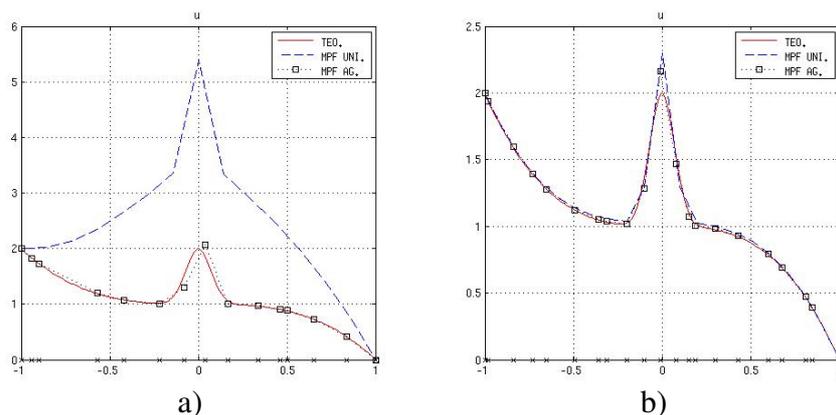


Figure 2: Ecuación de Poisson 1-D, MPF con discretización uniforme v/s MPF+AG : a) $N = 15$ puntos, b) $N = 21$ puntos.

con las condiciones de equilibrio esenciales

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0 \quad , \quad u(x, 1) = \sin(2\pi x) \quad & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, y) = 0 \quad , \quad u(1, y) = \sin(2\pi y) \quad & 0 \leq y \leq 1 \end{aligned} \tag{21}$$

cuya solución teórica es

$$u^T(x, y) = \sin(2\pi x) \frac{e^{2\pi y} - e^{-2\pi y}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} + \sin(2\pi y) \frac{e^{2\pi x} - e^{-2\pi x}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} \tag{22}$$

5.2.1 Test con discretización inicial fija

Un primer test consiste en generar y luego mantener fija una discretización inicial aleatoria de N nodos, Fig. 3. Se aplica la metodología propuesta variando el número de puntos a reubicar N_{reub} y los individuos de la población N_{ind} .

El valor de aptitud inicial para la discretización usada es $F_{Aptitud}^{inicial} = 11.29$. Los resultados del presente test se entregan en la tabla 2.

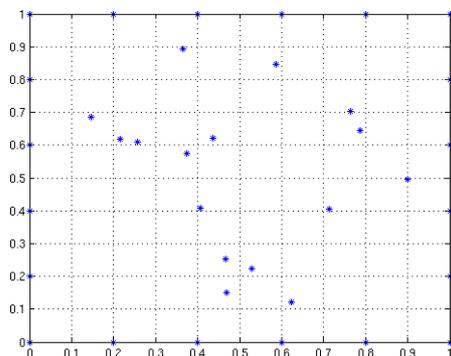


Figure 3: Discretización inicial aleatoria de $N = 36$ puntos.

Tabla 2: Resultados test con discretización inicial fija, $F_{Aptitud}^{inicial} = 11.29$.

N_{ind}	$N_{reub} = 3$	$N_{reub} = 4$	$N_{reub} = 5$
		$F_{Aptitud}^{final}$	
25	0.1839	0.1495	0.1806
50	0.0787	0.1122	0.1336
100	0.0546	0.0807	0.1079
150	0.0345	0.0792	0.0512
200	0.0208	0.0681	0.0430

5.2.2 Test con discretización inicial libre

En este test se genera una discretización inicial aleatoria de N nodos en cada ejecución del algoritmo. Se aplica la metodología propuesta variando el número de puntos a reubicar N_{reub} y los individuos de la población N_{ind} . Los resultados de este test se entregan en la tabla 3.

Tabla 3: Resultados test con discretización inicial libre.

N_{ind}	$N_{reub} = 3$		$N_{reub} = 4$		$N_{reub} = 5$	
	$F_{Aptitud}^{inicial}$	$F_{Aptitud}^{final}$	$F_{Aptitud}^{inicial}$	$F_{Aptitud}^{final}$	$F_{Aptitud}^{inicial}$	$F_{Aptitud}^{final}$
25	9.9481	0.1314	50.15	0.1141	266.4089	0.1488
50	2.1897	0.0506	7.1882	0.1702	2.1300	0.0526
100	5.1132	0.0621	3.9658	0.0830	6.6594	0.0535
150	13.5283	0.0272	5.1110	0.0586	4.7612	0.0648
200	59.7744	0.0831	13.4076	0.0412	0.4036	0.0448

Los parámetros utilizados en ambos tests, tanto en la resolución por MPF como en el AG se han escogido luego de un análisis exploratorio para el algoritmo programado, tabla 4.

6 CONCLUSIONES

Se ha presentado una nueva técnica adaptiva para un método sin malla aplicada a la resolución de ecuaciones diferenciales parciales.

A través de la corrección de la ubicación de los nodos de la discretización, se ha permitido posicionar puntos en las regiones importantes del problema.

La presente metodología no considera la inclusión de nuevos puntos en el dominio, permitiendo eventualmente optimizar la generación de subdominios de interpolación en la próxima generación, con la consiguiente disminución del costo computacional.

La técnica señalada sólo actúa sobre un número reducido de puntos a reubicar (N_{reub}), lo cual también disminuye el costo computacional asociado a la resolución de problema.

Agradecimientos

Los autores agradecen el auspicio de la Dirección General de Investigación y Postgrado de la Universidad Técnica Federico Santa María a través del proyecto de investigación USM-250979 y al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y su red de Aulas CIMNE.

Tabla 4: Parámetros MPF+AG, Ecuación de Laplace 2-D

MPF		
Puntos discretización	N	36
Puntos nube	n	9
Polinomio base de interpolación	m	6
Parámetros función de ponderación	q, β	1.1 y 0.25
AG		
Puntos a reubicar	N_{reub}	3,4,5
Individuos	N_{ind}	25,50,100,150,200
Revisiones	N_{rev}	5
Generaciones de evolución	N_{gen}	5
Probabilidad cruzamiento	P_{cru}	0.9
Probabilidad mutación	P_{mut}	0.25
Largo gen	l_{gen}	2

REFERENCES

- Angulo A., Pérez-Pozo L., and Perazzo F. A posteriori error estimator and an adaptive technique in meshless finite point method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33:1322–1338, 2009.
- ans R.L. Wang G.N. and Lin Z. Adaptive distribution of particles in a meshfree method. *Chinese J. Comput. Phys*, 23:419–424, 2006.
- Atluri S. and Kim H. Arbitrary placement of secondary nodes, and error control, in the meshless local petrov-galerkin (mlpg) method. *Computer modeling in Engineering and Sciences*, 3:11–32, 2000.
- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., and Krysl P. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–47, 1996.
- Chen Y., Lee J., and Eskandarian A. *Meshless methods in solids mechanics*. Springer, New York, 2006.
- Duarte C. and Oden J. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:237–262, 1996.
- Dwyer H., Kee R., and Sanders B. Adaptive grid method for problems in fluid mechanics and heat transfer. *AIAA J*, 18:1205–1212, 1980.
- Fries T. and Matthies H. Clasificación and overview of meshfree methods. *Department of Mathematics and Computer Science, Technical University of Braunschweig*, 2003.
- Goldberg D. *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- Gu Y. Meshfree methods and their comparisons. *International Journal of Computational Methods*, 4:477–515, 2005.
- Haupt R. and Haupt S. *Practical Genetic Algorithms*. Wiley-Interscience, 2004.
- Holland J. Adaptation in natural and artificial systems. *MIT Press*, pages 90–110, ????
- Li S. and Liu W. *Meshfree particle methods*. Springer, Berlin, 2004.
- Liou M.S. An extended lagrangian method. *AIAA Paper*, pages 1993–3305, 1993.
- Liu G. *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC press, USA, 2002.
- Liu G. and Tu Z. An adaptive procedure based on background cells for meshless methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:1923–1943, 2002.
- Ma Z. and Chen H. Mesh free adaptive algorithm for solving euler equations on structured-grid point. *Trans. Nanjing Univ. Aeronaut. Astronaut*, 22:271–275, 2005.

- Martin A. *Análisis y formulación de un estimador del error en el método sin malla de puntos finitos*. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso Chile, 2006. Trabajo de Título.
- Ortega E., Oñate E., and Idelsohn S. An improved finite point method for three-dimensional potential flows. *Computational Mechanics*, 40:949–963, 2007.
- Oñate E. On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *CIMNE*, 81, 1996.
- Oñate E. and Idelsohn S. A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Computational Mechanics*, 21:283–292, 1998.
- Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O., Taylor R., and Sacco C. A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:315–346, 1996a.
- Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O., and Taylor R. A finite point methods in computational mechanics, application to convective transport and fluid flow. volume 39, pages 3839–3866. 1996b.
- Oñate E., Perazzo F., and J.Miquel. A finite point method for elasticity problems. *Computer and Structures*, 79:2151–2163, 2001.
- Oñate E., Sacco C., and Idelsohn S. A finite point method for incompressible flow problems. *Computer Visual Science*, 3:67–75, 2000.
- Park S., Kwon K., and Youn S. A posteriori error estimates and an adaptive scheme of least-square meshfree method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:1213–1250, 2003.
- Perazzo F. *Una metodología numérica sin malla para la resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el método de puntos finitos*. Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona España, 2002. Tesis Doctoral.
- Perazzo F., Lohner R., and Perez-Pozo L. Adaptive methodology for meshless finite point method. *Advances in Engineering Software*, 22:153–168, 2007.
- Perazzo F., Miquel J., and Oñate E. El método de puntos finitos para problemas de la dinámica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 20:235–246, 2004.
- Perazzo F., Oller S., Miquel J., and Oñate E. Avances en el método de puntos finitos para la mecánica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 22:153–168, 2006.
- Pérez-Pozo L. and Perazzo F. Non-linear material behaviour analysis using meshless finite point method. In *2nd ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods*, pages 251–268. Porto, Portugal, 2007.
- Pérez-Pozo L., Perazzo F., and Angulo A. A meshless fpm model for solving nonlinear material problems with proportional loading based on deformation theory. *Advances in Engineering Software*, 40:1148–1154, 2009.
- Rabczuk R. and Belytschko T. Adaptativity for structured meshfree particle methods in 2d and 3d. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63:1559–1582, 2005.
- Zienkiewicz O. and Taylor R. *El método de los elementos finitos*, volume 1. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona España, 2000.