

MODELACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN LATERAL DE VELOCIDADES EN CANALES CON CURVAS

Juan F. Weber^{1,2}, Ángel N. Menéndez^{3,4}

¹ Laboratorio de Hidráulica, Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional, Maestro López esq. Cruz Roja, Ciudad Universitaria, CP 5000, Córdoba, Argentina

² Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1601, Ciudad Universitaria, CP 5000, Córdoba, Argentina(jweber@efn.uncor.edu)

³ Laboratorio de Hidráulica, Instituto Nacional del Agua, AU Ezeiza-Cañuelas, Tramo J. Newbery Km 1,620, CP 1804, Ezeiza, Prov. Buenos Aires, Argentina

⁴ Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Av. Las Heras 2214, CP 1127, Ciudad de Buenos Aires, Argentina (angel.menendez@speedy.com.ar)

Palabras clave: Mecánica de Fluidos, vorticidad, corrientes secundarias.

Resumen. *En este trabajo se presentan los resultados de la aplicación del modelo analítico de distribución lateral de velocidades propuesto por Ervine, Babaeyan-Koopaei y Sellin (método EBKS) (Ervine et al, 2000). Este modelo parte de la ecuación diferencial del Método de la Distribución Lateral (Shiono y Knight, 1991), y mediante una hipótesis simplificativa, cuantifica la intensidad de las corrientes secundarias a través de un parámetro K. Se aplica el método EBKS a los resultados experimentales presentados por Bernard y Schneider (1992) de 5 secciones de un canal de laboratorio de doble curvatura (Bend Channel Facility – BCF), donde se observa un marcado efecto de las corrientes secundarias sobre el perfil lateral de velocidades. Se observa una variación lateral y longitudinal del coeficiente K, y se plantean hipótesis sobre su comportamiento. En base a estas hipótesis, se extiende la aplicación del método EBKS a la longitud completa de la BCF y se comparan los resultados con los obtenidos por el modelo numérico bidimensional RMA2 mejorado a través de la corrección por vorticidad (bendway correction) presentada por Finnie et al (1999). Se considera que, a pesar de que el modelo EBKS es de más simple aplicación que este último, los resultados obtenidos lo muestran como una adecuada alternativa a los modelos bidimensionales, a la hora de predecir la distribución de velocidades en flujos curvilíneos.*

1 INTRODUCCION

Uno de los problemas de mayor interés en la Mecánica de Fluidos aplicada a los flujos geofísicos es la representación adecuada del movimiento del agua en cauces naturales (ríos y arroyos). Estos cuerpos de agua se caracterizan por no tener, en general, un desarrollo rectilíneo, sino presentar curvas (también llamados meandros) en su desarrollo.

En general se puede afirmar que no es posible llegar a una adecuada descripción del flujo en las curvas a partir de modelos unidimensionales e incluso bidimensionales clásicos, como las ecuaciones de Saint-Venant o las de Aguas Poco Profundas, respectivamente¹, debido al carácter esencialmente tridimensional del flujo.

Sin embargo, en muchas aplicaciones de la ingeniería es suficiente conocer la distribución lateral de velocidades promediadas en la vertical. Ejemplo de ello puede ser la estimación de los procesos de erosión del lecho en una curva. Debido a esto, surge como atractiva la posibilidad de contar con un modelo unidimensional, sencillo, que permita lograr una aceptable estimación de la distribución lateral de velocidades en una curva de un canal, sin necesidad de recurrir a modelos teóricos más completos y complejos como los tridimensionales.

2 PLANTEO DEL PROBLEMA

Hace más de un siglo, Thomson² sugirió que el flujo a superficie libre en una curva se puede pensar como la superposición de dos movimientos: un flujo principal, en la dirección dominante, y un flujo secundario, contenido en el plano de la sección, que se desarrolla debido a la acción de la fuerza centrípeta. La superposición de ambos movimientos da lugar al desarrollo de un flujo helicoidal, que en términos generales es descendente en la margen exterior de la curva y ascendente en la margen interior. Debido a este proceso, aún para una sección simétrica, el perfil lateral de velocidades no será simétrico (como sería de esperar en una canal rectilíneo) y se sesgará hacia el lado convexo de la curva. El incremento de presión sobre la margen exterior (y la consecuente disminución en la margen interior) provocará una sobre elevación de la superficie libre en el lado convexo (Figura 1).

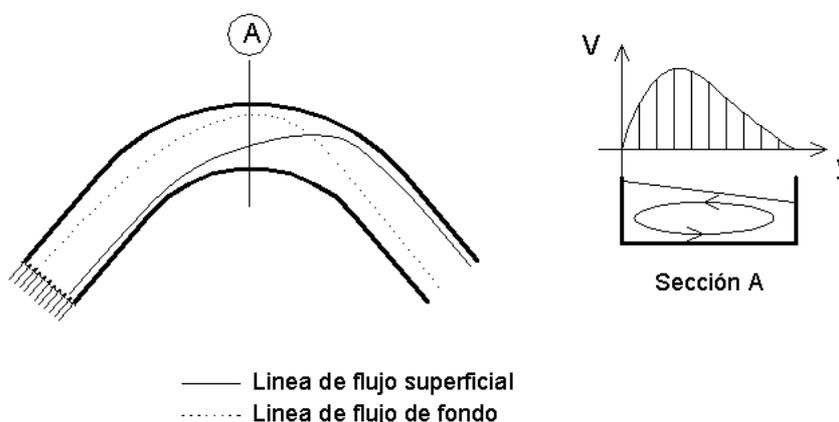


Figura 1: modelo conceptual del flujo en una curva

Si el sistema aguas abajo de la curva fuera ideal (conservativo) aún cuando el canal tome una alineación recta el movimiento vorticoso adquirido por el flujo se mantendría indefinidamente y los perfiles sesgados de velocidad serían idénticos aguas abajo. Debido a la disipación de la energía cinética, originada por la resistencia impuesta por el contorno rígido y en menor medida por efectos viscosos, la vorticidad del flujo deberá decaer una vez iniciado el tramo recto aguas abajo de la curva, de modo que una distancia razonable el perfil vuelva a ser simétrico. Siguiendo el mismo razonamiento, es de esperar que la vorticidad del flujo no se incremente indefinidamente dentro de la curva, y por lo tanto si el desarrollo de ésta es lo suficientemente largo, se alcance un perfil lateral de velocidades de equilibrio.

En general, se pueden plantear tres aproximaciones a la solución del problema:

- a) una aproximación unidimensional, a través de la integración de las ecuaciones de Navier-Stokes en la dirección vertical, conservando algún término que cuantifique la intensidad de las corrientes secundarias.
- b) una aproximación bidimensional, a través de las Ecuaciones de Aguas Poco Profundas¹, acoplado al sistema de ecuaciones una ecuación de producción, transporte y disipación de la vorticidad, y
- c) una aproximación tridimensional basada en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes junto con un modelo de turbulencia.

3 OBJETIVO

El objetivo del presente trabajo es implementar un modelo que permita predecir la distribución lateral de velocidades en una curva de un canal, desde una aproximación unidimensional, y comparar dicha estimación con la obtenida por un modelo bidimensional y con datos experimentales. En lo que sigue se describirán:

- a) el modelo unidimensional a implementar
- b) el modelo bidimensional utilizado
- c) la información experimental disponible
- d) la calibración del modelo unidimensional a los datos experimentales
- e) la aplicación del modelo bidimensional
- f) la comparación de resultados entre los modelos 1D y 2D

4 MODELO UNIDIMENSIONAL

4.1 Descripción

Con el objeto de obtener una ecuación diferencial que permita determinar la distribución lateral de velocidades V promediadas en la vertical a lo largo de la coordenada lateral, se resuelve la ecuación de movimiento en la dirección dominante del flujo, junto con la ecuación de continuidad, para un flujo uniforme y estacionario, lo que permite llegar a la siguiente ecuación:

$$\mathbf{r} \left[\frac{\partial \overline{UV}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{UW}}{\partial z} \right] = \mathbf{r} g S_0 + \frac{\partial \overline{\mathbf{t}}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\mathbf{t}}_{zx}}{\partial z} \quad (1)$$

Donde:

| | |
|--|---|
| x, y, z | Direcciones longitudinal, lateral y vertical |
| $\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$ | Medias temporales de las componentes de la velocidad según x, y, z |
| $\overline{\mathbf{t}}_{yx}, \overline{\mathbf{t}}_{zx}$ | Tensiones de Reynolds en los planos perpendiculares a y y a z respectivamente |
| \mathbf{r} | Densidad del fluido |
| g | Aceleración de la gravedad |
| S_0 | Pendiente longitudinal del lecho |

Shiono y Knight³ integraron la ecuación (1) a lo largo de la profundidad H de flujo, basándose en el modelo de Boussinesq de turbulencia de la viscosidad de torbellino y obtuvieron la ecuación (2):

$$\mathbf{r} g S_0 Y - \frac{f}{8} \mathbf{r} V^2 \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + \frac{d}{dy} \left[\mathbf{r} l \sqrt{\frac{f}{8}} Y^2 V \frac{\partial V}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} [Y (\mathbf{r} \overline{UV})_d] \quad (2)$$

En esta ecuación:

| | |
|---|---|
| Y | Profundidad de flujo (en general una función de y) |
| f | Factor de fricción de Darcy-Weisbach |
| V | Velocidad promediada en la vertical |
| l | Viscosidad adimensional de torbellino |
| $(\mathbf{r} \overline{UV})_d = \frac{1}{Y} \int_0^Y \mathbf{r} \overline{UV} dz$ | Tensión de corte promediada en la vertical |

El factor de fricción f está relacionado con el coeficiente n de Manning por

$$f = \frac{8 g n^2}{\sqrt[3]{Y}} \quad (3)$$

El parámetro adimensional λ se puede expresar como:

$$\mathbf{e}_{yx} = l Y \sqrt{\frac{f}{8}} V \quad (4)$$

Donde ϵ_{yx} es la viscosidad de torbellino de Boussinesq.

El segundo miembro de la igualdad (2) representa el gradiente lateral de la fuerza aparente de corte en el plano vertical por unidad de longitud, y está relacionado a la intensidad de las

corrientes secundarias.

Shiono y Knight⁴ encuentran una solución analítica a la ecuación (2) para el caso de canal rectilíneo, es decir cuando el segundo término de dicha ecuación es 0. Posteriormente, estos mismos autores³ encuentran una solución analítica a la (2), incluyendo el término de corrientes secundarias, pero cuya aplicabilidad se halla limitada al caso de canales rectilíneos de sección compuesta. En las referencias puede encontrarse un gran número de aplicaciones de esta solución analítica^{5,6}

La principal limitación del modelo de Shiono y Knight está basada en suponer que el segundo miembro de (2) se mantiene constante. Eso hace que su aplicabilidad se limite a regiones restringidas, por ejemplo el pie del talud del canal principal de una sección compuesta.

Una aproximación más general fue planteada por Ervine, Babaeyan-Koopaei y Sellin⁷. Estos autores asumen que las medias temporales de las componentes de la velocidad, \bar{U}, \bar{V} , se pueden considerar proporcionales a la velocidad promediada en la vertical V . Es decir,

$$\bar{U} = K_1 V \quad ; \quad \bar{V} = K_2 V \quad (5)$$

y por lo tanto,

$$\overline{UV} = KV^2 \quad (6)$$

en la cual K es un coeficiente empírico que varía con la geometría de los contornos, y que cuantifica la intensidad de las corrientes secundarias. Reemplazando la ecuación (6) en la (2) y reordenando, se llega a

$$rgYS_0 - \frac{1}{8} rfV^2 + \frac{d}{dy} \left(rIY^2 \sqrt{\frac{f}{8}} V \frac{dV}{dy} - YrKV^2 \right) = 0 \quad (7)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, no lineal en V pero linealizable en V^2 , no homogénea, que constituye la ecuación del método propuesto por Ervine, Babaeyan-Koopaei y Sellin (en adelante, método *EBKS*). Al ser lineal en V^2 , es posible obtener una solución analítica, si se conoce la función $Y(y)$. Los autores mencionados obtuvieron la solución analítica para fondo plano (Y constante) y lineal.

Fondo plano

$$V^2 = \frac{8}{rf} \left(b + C_1 e^{a_1 y} + C_2 e^{a_2 y} \right) \quad (8)$$

Fondo lineal

$$V^2 = \frac{8}{rf} \left(\frac{b'}{M+N} Y + C_1 Y^{h_1} + C_2 Y^{h_2} \right) \quad (9)$$

Donde

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{e - \sqrt{4a + e^2}}{2a} ; & q_2 &= \frac{e + \sqrt{4a + e^2}}{2a} \\
 h_1 &= \frac{L + M - \sqrt{(L + M)^2 + 4LN}}{2L} ; & h_2 &= \frac{L + M + \sqrt{(L + M)^2 + 4LN}}{2L} \\
 L &= \frac{l}{2s^2} \sqrt{\frac{8}{f}} ; & M &= -2L - \frac{8k}{fs} ; & N &= \sqrt{1 + \frac{1}{s^2} - \frac{8k}{fs}} \\
 b' &= rgS_0 ; & a &= \frac{lH^2}{2} \sqrt{\frac{8}{f}} ; & b &= rgHS_0 ; & e &= \frac{8KH}{f} \\
 Y &= Y(y) = H_0 - \frac{y - y_0}{s} \text{ función profundidad} & & & & & & (10)
 \end{aligned}$$

Los coeficientes C_1 y C_2 surgen de imponer las condiciones de contorno al problema, que como en todo problema de segundo orden deben ser dos. En lo que sigue se detallan dichas condiciones.

4.2 Condiciones de contorno y compatibilidad

La condición de no deslizamiento impuesta en las márgenes transforma la ecuación (7) en un problema de contorno de solución trivial (a excepción del caso en que las márgenes estén constituidas por paredes verticales). Para evitar esta singularidad, se ha propuesto^{5,8} imponer en un punto cercano a la margen (a una distancia dy) una velocidad baja (dx). Se ha mostrado⁶ que la influencia de estos parámetros arbitrarios es sólo local, en las cercanías de las márgenes, y no afecta significativamente el grueso del perfil de velocidades.

Si la sección geométrica tuviera algún tipo de discontinuidad (como por ejemplo un cambio de dirección), deben plantarse dos ecuaciones de compatibilidad en el punto de discontinuidad: continuidad en la propia función $V(y)$ y continuidad en la fuerza de corte aparente en la interfaz vertical; esta última se puede expresar, según Abril⁹ como:

$$m_1 \frac{dV_1}{dy} = m_2 \frac{dV_2}{dy} \quad \text{con} \quad m = l\sqrt{f} \quad (11)$$

En la ecuación anterior, los subíndices 1 y 2 hacen referencia a los dos tramos contiguos al punto en cuestión. Esto da lugar a que, existiendo n tramos en la sección transversal considerada, existan $2n$ coeficientes incógnita C . Al existir $n-1$ puntos de discontinuidad, se disponen de $2n-2$ ecuaciones de compatibilidad, las que sumadas a las 2 ecuaciones que surgen de las condiciones de contorno, totalizan las $2n$ ecuaciones necesarias. Por lo que los coeficientes C_1 y C_2 de cada tramo se obtienen de la resolución del sistema lineal de $2n$ ecuaciones con $2n$ incógnitas.

Cabe destacar que el método EBKS fue desarrollado para canales de sección compuesta,

pero las hipótesis en que se basa no lo hace restrictivo a este tipo de geometrías, por lo que se lo ha asumido en este trabajo como un modelo unidimensional adecuado para la descripción del fenómeno en estudio.

Una de las grandes limitaciones del modelo EBKS radica en una de sus hipótesis fundamentales: la superficie libre del fluido se mantiene horizontal en la dirección lateral, es decir, no existe un gradiente de presión según y , lo cual se contrapone con lo indicado en la Figura 1. Sin embargo, y en adelante, se asume que el radio de curvatura es importante, y por lo tanto la sobre-elevación (*setup*) de la margen exterior de la curva no es importante.

5 MODELO NUMERICO BIDIMENSIONAL

5.1 Descripción

El modelo numérico bidimensional utilizado se basa en las ecuaciones de aguas poco profundas (shallow water equations), que surgen de la integración en la vertical de las ecuaciones de Reynolds:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

$$h \frac{\partial u}{\partial t} + hu \frac{\partial u}{\partial x} + hv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{h}{\mathbf{r}} \left(E_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + E_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + gh \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{gun^2}{h^{1/3}} (u^2 + v^2)^{1/2} = 0 \quad (13)$$

$$h \frac{\partial v}{\partial t} + hu \frac{\partial v}{\partial x} + hv \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{h}{\mathbf{r}} \left(E_{yx} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + E_{yy} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + gh \left(\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{gvn^2}{h^{1/3}} (u^2 + v^2)^{1/2} = 0 \quad (14)$$

La ecuación (12) es la de conservación de masa, en tanto que la (13) y la (14) son las ecuaciones de cantidad de movimiento en las direcciones x e y , respectivamente, donde:

- h Profundidad de flujo
- u, v Componentes de la velocidad en las direcciones cartesianas
- x, y, t Coordenadas cartesianas y tiempo
- \mathbf{r} Densidad del fluido
- E Coeficiente de viscosidad turbulenta
 - xx : dirección normal al plano xz - yy : dirección normal al plano yz
 - xy e yx : dirección de corte en cada superficie
- g Aceleración de la gravedad
- a Cota del fondo
- n Coeficiente de rugosidad de Manning

El modelo numérico utilizado es el RMA2¹⁰ (U.S. Army Corps of Engineers – Waterways Experiment Station – Hydraulics Laboratory). En éste, las ecuaciones (12), (13) y (14) son

resueltas por el método de los elementos finitos usando el método de Galerkin de los residuos ponderados. Las funciones de forma son cuadrática para la velocidad y lineal para la profundidad. La integración en el espacio se realiza por integración gaussiana. Las derivadas temporales son reemplazadas por una aproximación no lineal en diferencias finitas. Se asume que las variables varían a lo largo de cada intervalo de tiempo en la forma:

$$f_{(t)} = f_{(0)} + at + bt^c \quad t_0 \leq t < t_0 + \Delta t \quad (15)$$

La cual es derivada respecto del tiempo, y termina en una forma en diferencias finitas. Los parámetros a, b y c son constantes.

La solución es totalmente implícita y el conjunto de ecuaciones simultáneas es resuelto por el método de Newton Raphson.

5.2 Corrección por vorticidad

Como puede observarse en las ecuaciones (12) a (14), no existen en estas ecuaciones términos que permitan considerar el efecto de las corrientes secundarias sobre el campo bidimensional de velocidades resultado. De hecho, la distribución de velocidades que se obtiene en una curva por la aplicación del modelo numérico RMA2 (como de cualquier otro modelo basado en las ecuaciones 12 a 14) muestra un máximo de la velocidad sobre la margen interior o lado cóncavo, lo cual es a las claras irreal.

Bernard y Schneider¹¹ y posteriormente Finnie et al¹² presentan una corrección al modelo de Aguas Poco Profundas por efecto de la vorticidad. Dicha corrección consiste en una cuarta ecuación diferencial (acoplada a las tres anteriores) de transporte de la vorticidad W , de la forma:

$$u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{A_s \sqrt{C_f} |\bar{u}|^2}{rh \left(1 + 9 \frac{h^2}{r^2} \right)} - D_s \sqrt{C_f} \Omega \frac{|\bar{u}|}{h} + \frac{1}{h} \bar{\nabla} \cdot (\mathbf{n} h \bar{\nabla} \Omega) \quad (16)$$

con

| | |
|------------------|---|
| W | Vorticidad |
| r | Radio de curvatura de la línea de corriente |
| h | Profundidad local de flujo |
| $\overline{C_f}$ | Coefficiente de fricción de Fanning |
| \bar{u} | Vector velocidad |
| \mathbf{n} | Viscosidad |
| A_s, D_s | Parámetros empíricos del modelo |

Los parámetros empíricos A_s y D_s han mostrado como valores adecuados 5 y 0.5, respectivamente¹¹.

Con el objeto de reducir el tamaño de los sistemas de ecuaciones a resolver (y por lo tanto del almacenamiento necesario), la vorticidad se resuelve en forma desacoplada de las

ecuaciones de flujo. Las velocidades y las profundidades se mantienen constantes durante el cálculo de la vorticidad, y la vorticidad se mantiene constante durante el cálculo de las velocidades y profundidades. Una vez convergidas las velocidades y profundidades, se pasa al cálculo de la vorticidad. Una vez convergido el cálculo de la vorticidad, se pasa al cálculo de velocidades y profundidades. El proceso se repite hasta que ambas fases convergen o se alcanza un límite prefijado (por el usuario) de iteraciones.

6 DATOS EXPERIMENTALES

La información experimental utilizada en el presente trabajo se obtuvo de la publicación de Bernard y Schneider¹¹. Los trabajos experimentales fueron llevados a cabo por Maynard en un canal experimental denominado *Channel Bend Facility* (CBF en adelante), ubicado en la *US Army Engineer Waterways Experiment Station*, Vicksburg, MS. La CBF tiene dos curvas inversas en forma de S y sección trapecial (Figuras 2 y 3).

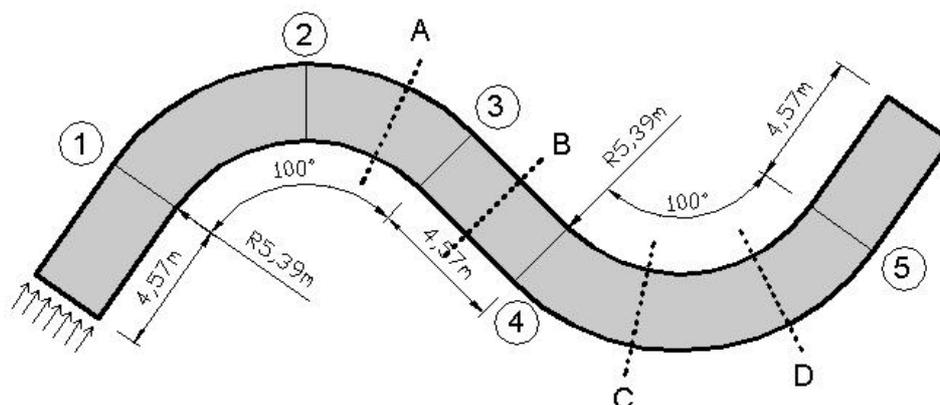


Figura 2: Planimetría de la Channel Bend Facility (CBF)

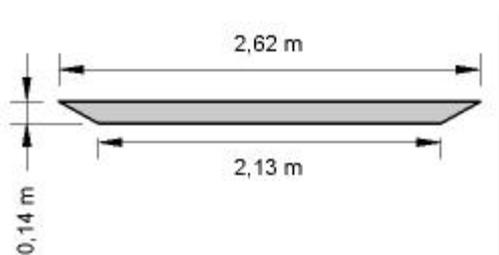


Figura 3: Sección transversal de la Channel Bend Facility (CBF)

Para el experimento a considerar, el caudal erogado es de 191 l/s, la pendiente longitudinal es de 2 ‰ y el coeficiente n de Manning de 0,019. La velocidad media del flujo de 0,58 m/s.

Las mediciones se efectuaron en las estaciones 1 a 5 indicadas en la Figura 2, y consistieron en 8 puntos en la dirección lateral en cada una de ellas.

7 CALIBRACION DEL MODELO EBKS

Como primer paso se plantea la calibración de los valores de K en las secciones 1 a 5 en base a los valores observados de la velocidad. Para el parámetro de Manning se asume el valor de $n = 0,019$, y para la viscosidad adimensional de torbellino, $I = 0,12$ en todos los casos.

Se trabajó con tres valores de K , el del talud de margen izquierda, el del canal central y el del talud de margen derecha, denominados K_1 , K_2 y K_3 respectivamente.

Es importante destacar que debido a la naturaleza de las ecuaciones (8) y (9), las mismas tienen un dominio restringido en el parámetro K , por lo que fue posible aplicar técnicas de optimización automática sólo en forma restringida. En la mayoría de los casos el ajuste finalizó en forma manual, minimizando la función objetivo estándar consistente en la suma de los errores cuadráticos.

En las Figuras 4 a 8 se muestran los perfiles laterales de velocidades obtenidos por la aplicación del método EBKS con los parámetros K calibrados, junto con los datos experimentales, para cada una de las estaciones de medición. En general puede verse un ajuste aceptable. En la Tabla 1 se muestran los valores calibrados de K_1 , K_2 y K_3 .

8 APLICACIÓN DEL MODELO NUMERICO RMA2

Se aplicó el modelo numérico RMA2 con la corrección por vorticidad a la *Channel Bend Facility*. Cabe destacar que Bernard y Schneider¹¹ aplicaron a esta geometría el modelo STREMR con la misma corrección por vorticidad. El modelo STREMR es un modelo en volúmenes finitos para resolver las Ecuaciones de Aguas Poco Profundas (12 a 14) con la corrección por vorticidad de la ecuación (16). Utiliza una malla rectangular de tipo estructurada y resuelve el problema sólo bajo condiciones de flujo subcrítico.

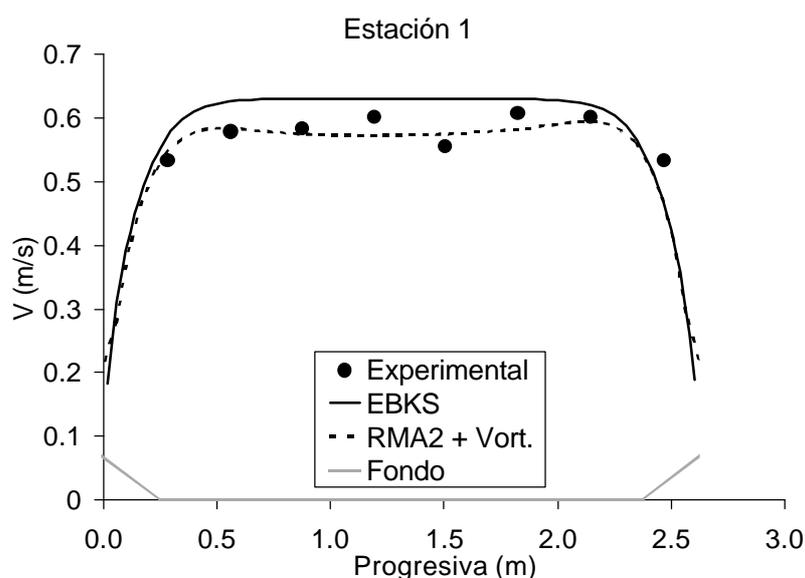


Figura 4: Velocidades predichas por EBKS, RMA2 y medidas en Estación 1

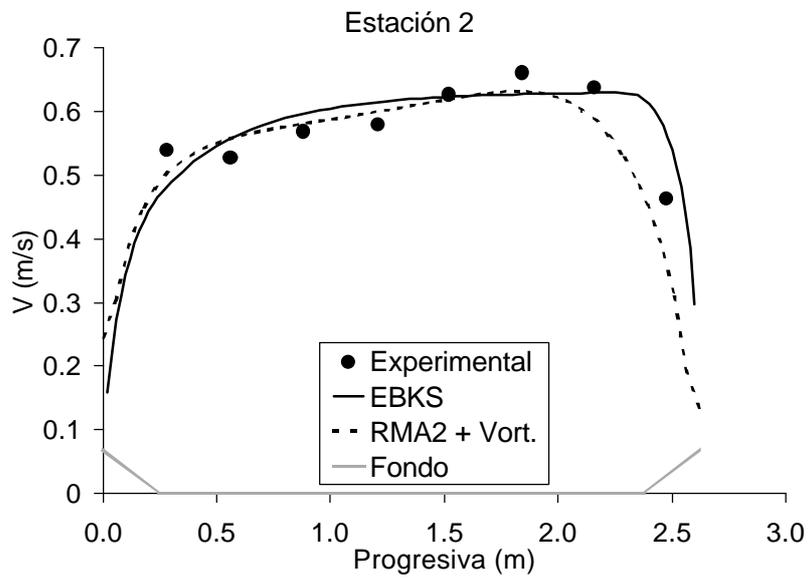


Figura 5: Velocidades predichas por EBKS, RMA2 y medidas en Estación 2

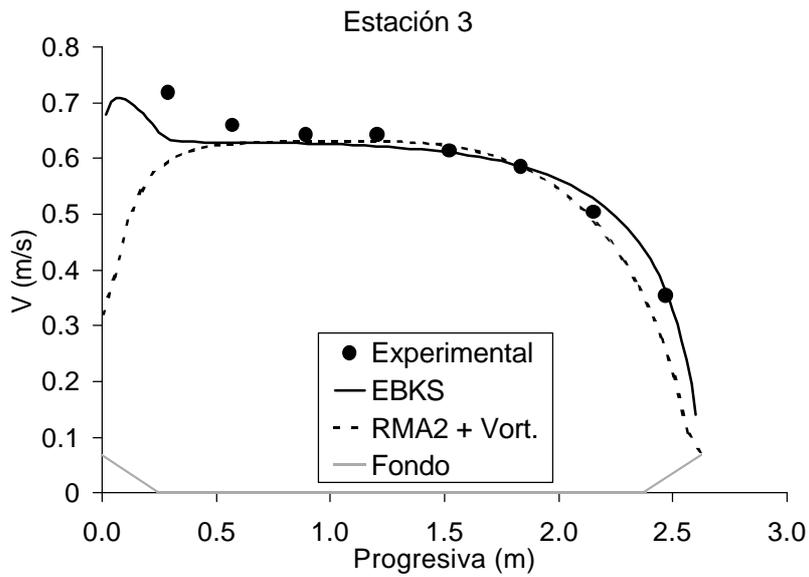


Figura 6: Velocidades predichas por EBKS, RMA2 y medidas en Estación 3

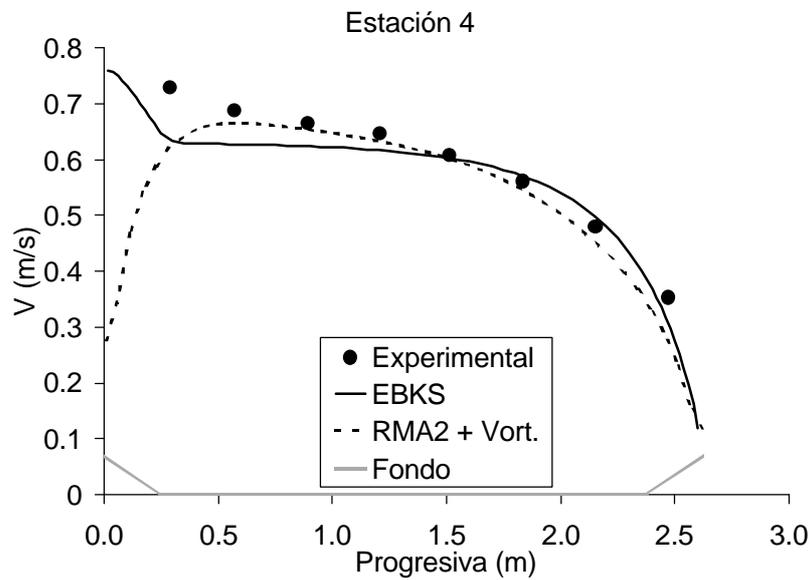


Figura 7: Velocidades predichas por EBKS, RMA2 y medidas en Estación 4

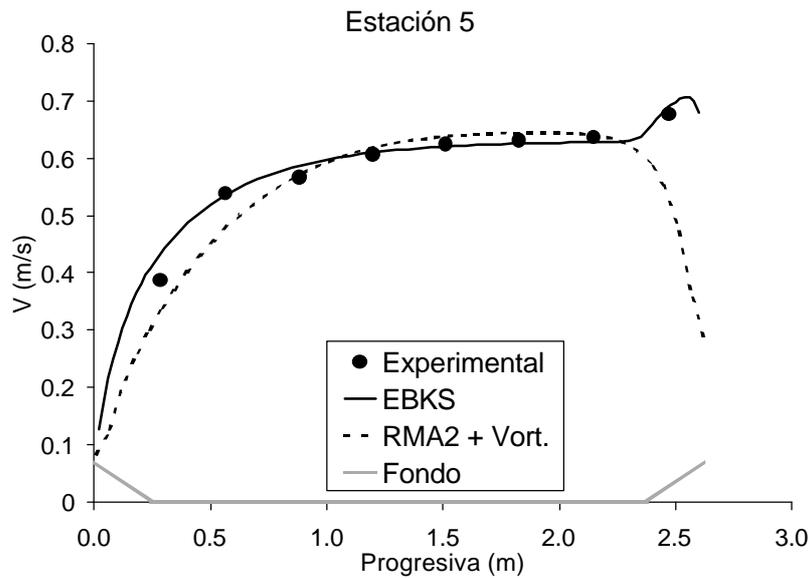


Figura 8: Velocidades predichas por EBKS, RMA2 y medidas en Estación 5

| estación | progresiva (m) | K1 | K2 | K3 |
|----------|----------------|--------|--------|--------|
| 1 | 2.9913 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 10.5807 | 0.002 | 0.020 | 0.005 |
| 3 | 16.2754 | -0.015 | -0.018 | -0.005 |
| 4 | 20.0114 | -0.017 | -0.020 | -0.010 |
| 5 | 33.4781 | 0.007 | 0.020 | 0.015 |

Tabla 1. Valores calibrados de K

Para la aplicación del modelo numérico RMA2, se construyó una malla rectangular estructurada (a través de un código *ad hoc*) de 5566 elementos cuadráticos, lo que dio como resultado un total de 17033 nodos (ver Figura 9). Las condiciones de contorno impuestas fueron: nivel fijo de la superficie libre en la descarga, distribución de velocidades proporcionales a la profundidad en la entrada. En forma automática, RMA2 impone como condición de contorno en las márgenes la de derivada nula en la dirección normal. Esto (como se comprobó experimentalmente) provoca una redistribución de velocidades debido a que el modelo no es capaz *per se* de reproducir la capa límite que se desarrolla en la vecindad de las márgenes. Con el objeto de lograr la caída de la velocidad en esta zona, se asignó (tal como sugiere el Manual de Referencia del programa¹⁰) a la faja de elementos contiguos una rugosidad elevada, con $n = 0,250$.

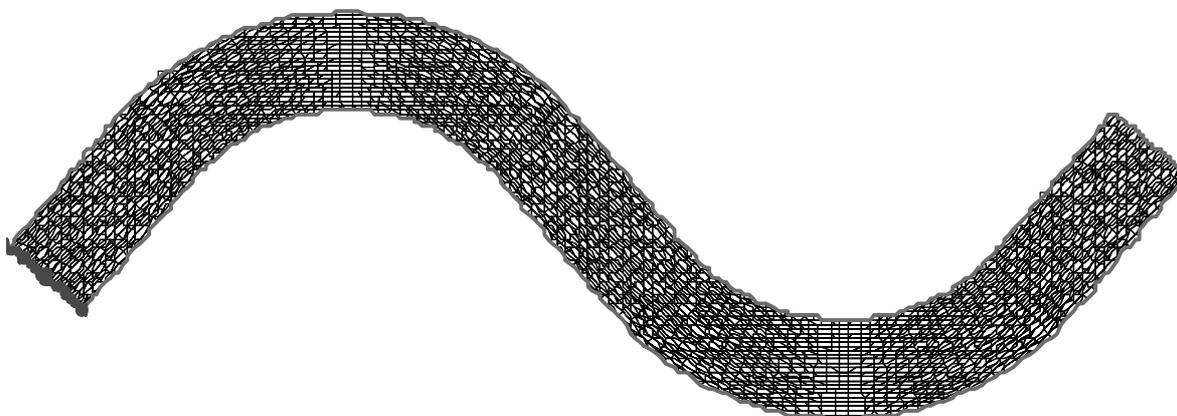


Figura 9: Malla de elementos finitos generada por RMA2

Como ya se describiera en trabajos previos^{5,13} el programa RMA2 presenta problemas de convergencia en aquellos casos en que la profundidad de flujo toma un valor pequeño, en términos absolutos (del orden de los cm) ya que el programa está pensado para resolver problemas a gran escala (ríos). En el caso de la *Channel Bend Facility*, si bien el modelo converge para una modelación sin la corrección por vorticidad para un número de Peclet de 15 (lo que da una viscosidad de torbellino entre 3 y 27 Pa.s), no ocurre lo mismo si se agrega esta corrección. En efecto, el cálculo se inestabiliza y finalmente para profundidades del orden de 16 cm se excede el límite de convergencia.

Con el objeto de evitar este inconveniente, se propuso una metodología basada en una analogía con la modelación física, a través de las leyes de semejanza. Siendo el caso de estudio un problema de flujo a superficie libre, se aplicó un criterio de semejanza basado en el número de Froude. Se consideró a la *Channel Bend Facility* como el “prototipo”, en tanto que el “modelo” se “construyó” con una escala de longitudes de 100, es decir todas las dimensiones lineales se multiplicaron por este factor. Siendo $E_L = 100$ la escala de longitudes, las leyes de semejanza¹⁴ para un modelo de Froude establecen las escalas de caudales, rugosidades y velocidades como

$$\begin{aligned}
 E_Q &= E_L^{5/2} \\
 E_n &= E_L^{1/6} \\
 E_V &= E_L^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Siendo

| | |
|-------|---|
| E_Q | Escala de caudales |
| E_n | Escala de los parámetros n de Manning |
| E_V | Escala de velocidades |

Para el caso en cuestión, los valores obtenidos fueron: $E_Q = 100000$, $E_n = 2.1544$ y $E_V = 10$. De modo que en el modelo, se trabajó con un caudal de $19113.87 \text{ m}^3/\text{s}$ y un n de Manning de 0.04093 . Los valores de velocidad obtenidos en el modelo finalmente fueron divididos por 10 para obtener los correspondientes valores en prototipo. Dado que las viscosidades de torbellino (asignadas automáticamente a través del número de Peclet) variaron en un rango entre 300 y 4200 Pa.s, no se observaron problemas de convergencia en esta aplicación.

Debido a la forma en que se define la condición inicial en RMA2, y como es costumbre, se realizó una evolución pseudodinámica del nivel de la superficie libre aguas abajo, desde 20 a 13.87 m (en modelo), lo que implicó un tiempo de cálculo de aproximadamente 30 minutos para el modelo sin vorticidad y de 75 minutos para el modelo con vorticidad en una laptop con 256 Mb de RAM y un procesador VIA C3 de 1.2 GHz.

En la Figura 10 se muestra un gráfico de isolíneas de igual intensidad del vector velocidad predichas por el modelo numérico RMA2 con y sin la corrección por vorticidad. Se aprecia la diferencia en la posición e intensidad de la velocidad máxima sección a sección.

En las Figuras 4 a 8 se muestra la predicción del modelo RMA2 con la corrección por vorticidad de la distribución lateral de velocidades en las Estaciones 1 a 5, en las que se dispone de información experimental. Como puede verse, el ajuste es bueno en todas las secciones, tal como ya lo habían mostrado Bernard y Schneider utilizando el modelo STREMR¹¹.

9 VARIACION LONGITUDINAL DE K

En la Figura 11 se muestra una gráfica con la evolución longitudinal de los tres valores del parámetro K del modelo EBKS calibrados en las Estaciones 1 a 5. Puede verse un cierto patrón de comportamiento, aunque debido a la complejidad de la geometría analizada, no resulta simple identificar una ley de variación general de este parámetro.

Como una primera aproximación al problema, se planteó analizar la solución del EBKS en cuatro secciones intermedias (denominadas A, B, C y D – ver Figura 2) y compararla con la solución del modelo numérico bidimensional – RMA2 en estas secciones, en este último caso tanto la solución con la corrección por vorticidad como sin ella. En la figura 10 se observa la posición de las secciones A a D en la gráfica de evolución de los parámetros K . Los valores de K para estas secciones se obtuvieron por interpolación lineal y se presentan en la Tabla 2.

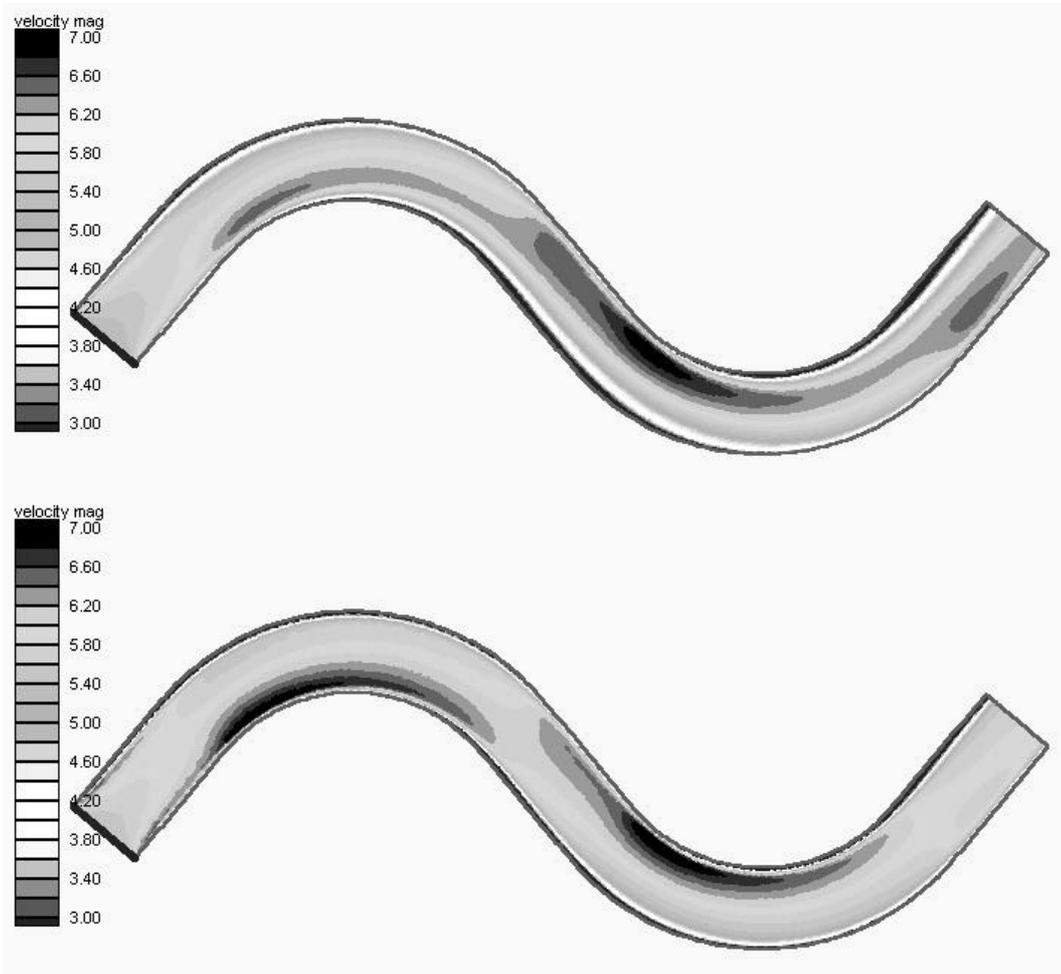


Figura 10: Intensidad de las velocidades predichas por RMA2 con vorticidad (arriba) y sin vorticidad (abajo)

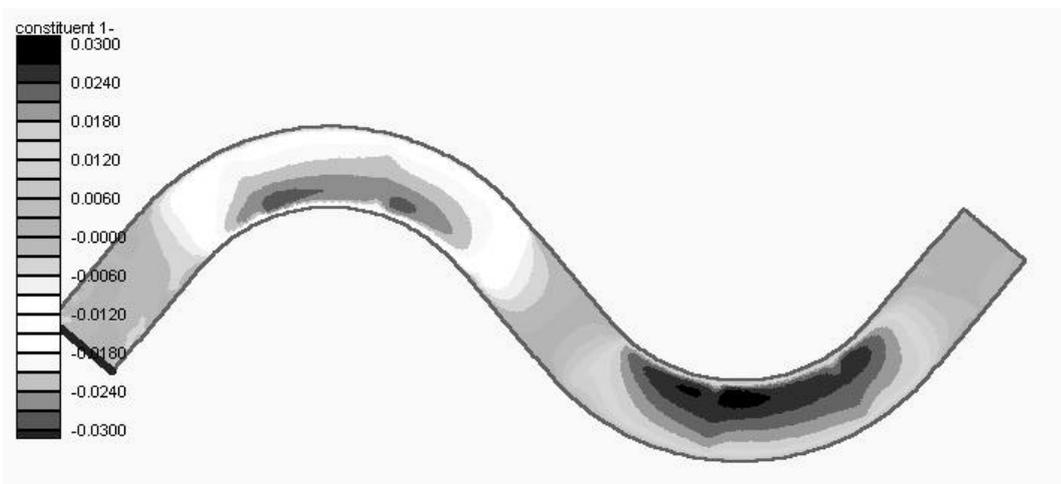
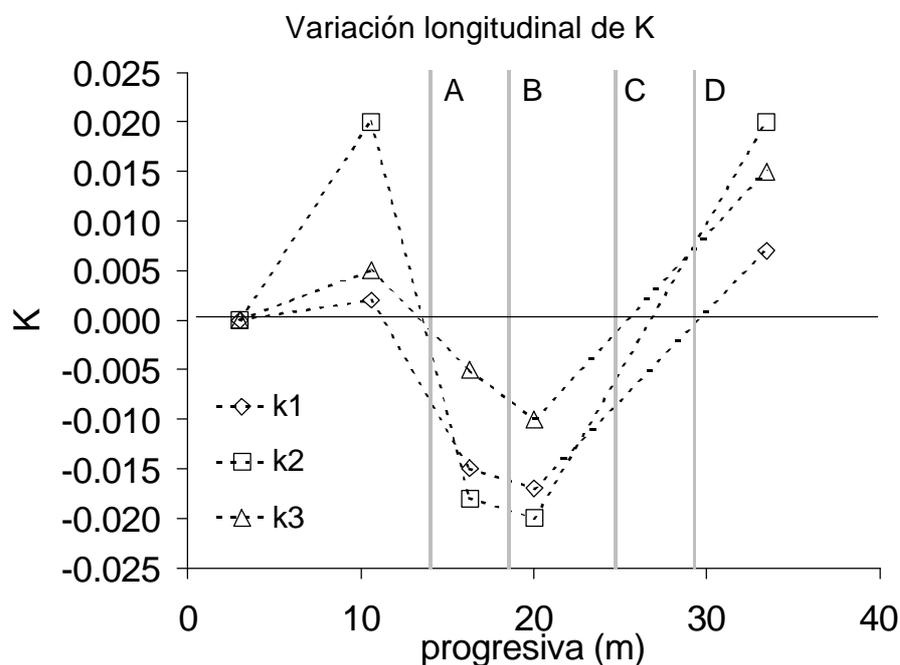


Figura 11: Campo de vorticidades predicho por RMA2

Figura 11: Variación longitudinal del parámetro K

| Sección | Progresiva (m) | K1 | K2 | K3 |
|---------|----------------|----------|----------|----------|
| A | 14.00 | -0.00821 | -0.00282 | -0.00100 |
| B | 18.56 | -0.01622 | -0.01922 | -0.00806 |
| C | 24.71 | -0.00863 | -0.00604 | -0.00128 |
| D | 29.31 | -0.00043 | 0.00762 | 0.00726 |

Tabla 2. Valores interpolados de K

En las Figuras 12 a 15 se muestran los perfiles laterales de velocidades predichos por el modelo EBKS y el modelo numérico RMA2 con y sin la corrección por vorticidad para las cuatro secciones intermedias consideradas.

En términos generales puede verse que el acercamiento entre los perfiles laterales de velocidad predichos por EBKS y RMA2 + vorticidad es mayor en el caso de las secciones A y B que en el de las C y D. Esto se podría explicar por el hecho de que la longitud del tramo de interpolación lineal que dio origen a los parámetros K para el EBKS es menor en el caso de las dos primeras secciones, con lo que el error entre los valores verdaderos (desconocidos) de K y los valores interpolados es menor. En el caso de las secciones C y D, sus valores de K se obtienen como interpolación entre los de las estaciones 4 y 5, con una longitud mayor (de hecho, toda la segunda curva), por lo que la incertidumbre en los valores de K aumenta. Esto sugiere que la evolución longitudinal de los parámetros K ha de ser fuertemente no lineal.

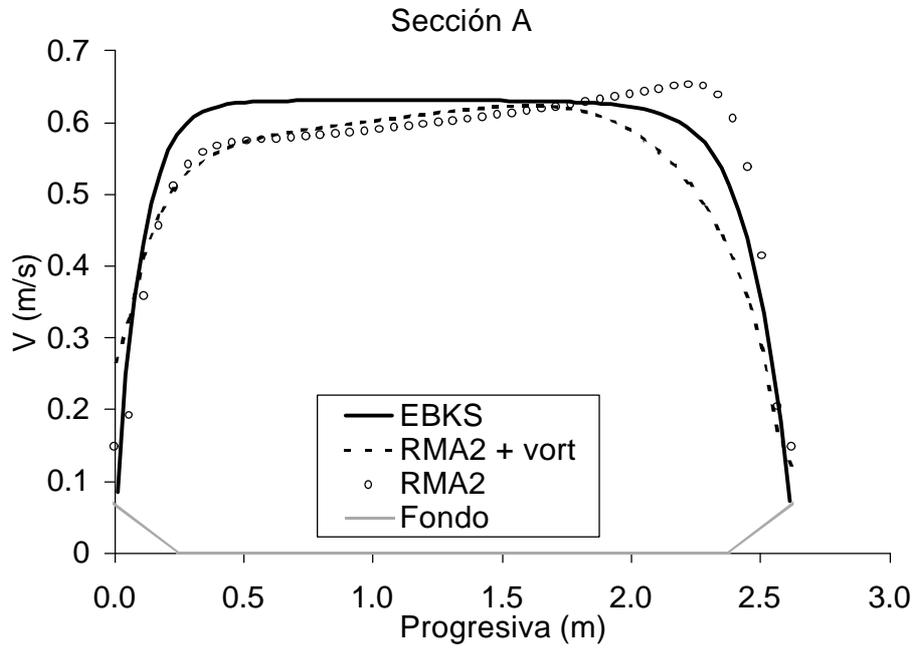


Figura 12: perfiles de velocidad predichos – sección A

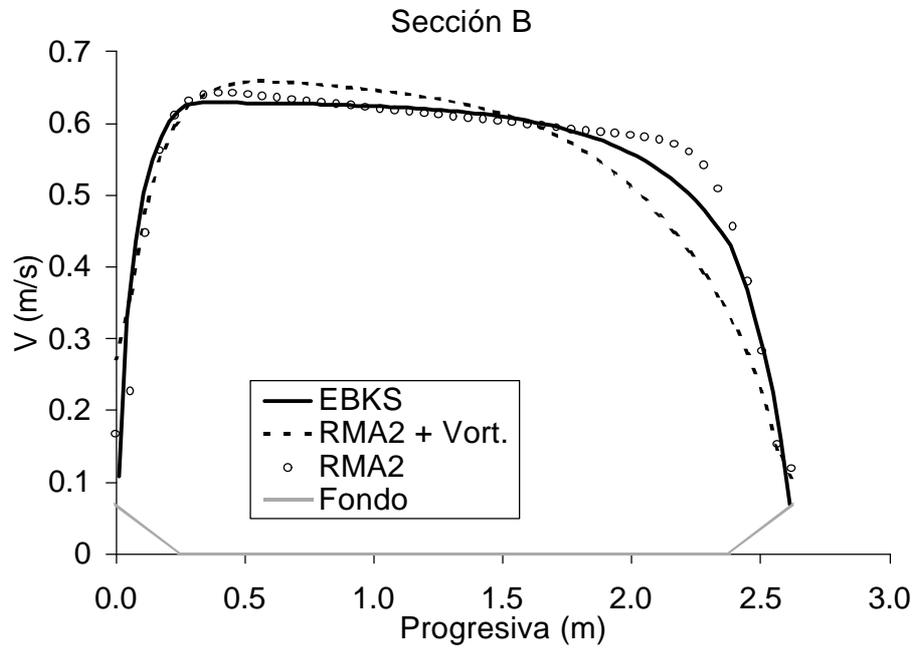


Figura 13: perfiles de velocidad predichos – sección B

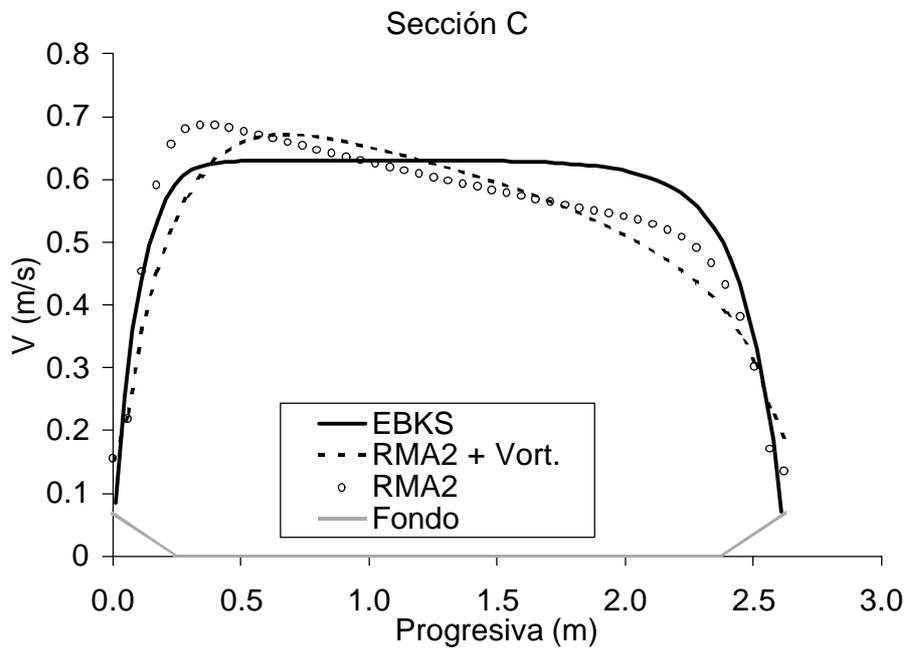


Figura 14: perfiles de velocidad predichos – sección C

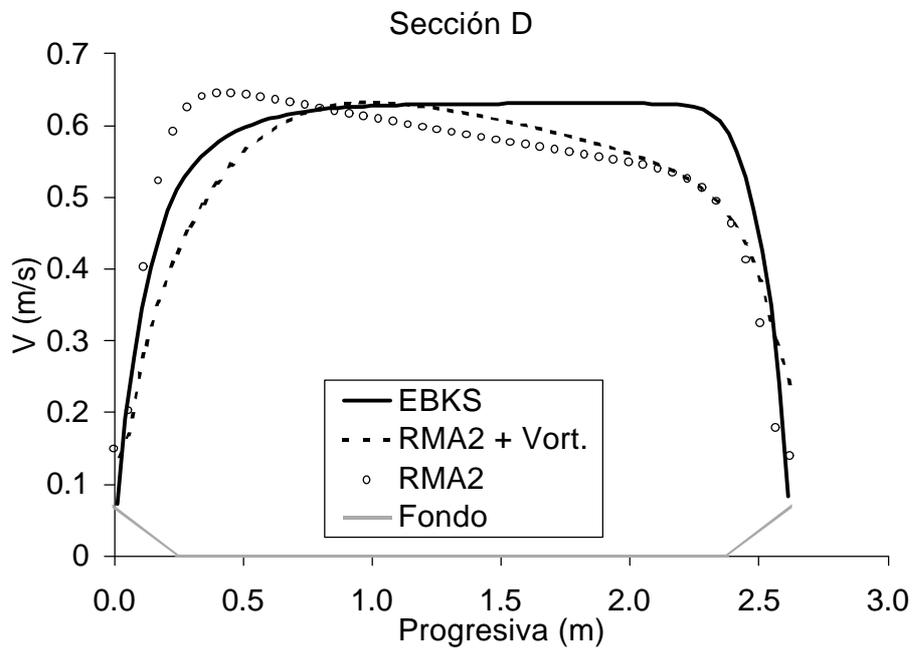


Figura 15: perfiles de velocidad predichos – sección D

10 CONCLUSIONES

En este trabajo se muestran los resultados preliminares de la aplicación de un modelo simplificado para la descripción del flujo a superficie libre en canales con curvas o meandros. Se pueden enunciar las siguientes conclusiones:

- Ha sido posible implementar la solución analítica propuesta por Ervine, Babaeyan-Koopaei y Sellin⁷ a la ecuación diferencial del LDM modificada para considerar el efecto de las corrientes secundarias, originalmente desarrollada para el problema del canal de sección compuesta (modelo EBKS), a un caso experimental¹¹ de cierta complejidad geométrica en planta y de sección transversal simple (trapezoidal), interpretando al parámetro K como un cuantificador del efecto de las corrientes secundarias sobre el flujo principal.

- Se han mejorado las ecuaciones de compatibilidad de la solución analítica del EBKS a partir de las correcciones efectuadas por Abril⁹ al LDM.

Los valores calibrados de los parámetros K son compatibles con los descritos en la literatura.

- Ha sido posible además aplicar el modelo numérico de aguas poco profundas RMA2 con la corrección por vorticidad propuesta por Finnie et al¹², pero a través de un escalamiento del problema por medio de las leyes de semejanza, lo que permitió asegurar la convergencia de la solución numérica. Bajo estas condiciones, los resultados del modelo se ajustan adecuadamente a los datos experimentales.

- Es considerable el costo computacional que implica la aplicación del modelo numérico RMA2 más la corrección por vorticidad frente a la solución analítica del modelo EBKS. De contarse con los parámetros K adecuados, la calidad de la predicción de este último modelo es similar a la del primero, pero con un costo computacional prácticamente nulo.

- Con la finalidad de desarrollar un modelo que pueda describir la distribución del flujo en *todas* las secciones del canal, se impone la necesidad del desarrollo de una formulación que contemple la variabilidad longitudinal de los parámetros K . Si bien se ha podido inferir la continuidad de esta función, también resulta evidente la fuerte no linealidad de la misma. El trabajo futuro se basará en el desarrollo de esta línea de investigación.

11 AGRADECIMIENTOS

El primer autor desea agradecer a la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional por el apoyo recibido, y al Dr. Bob Bernard por facilitar la información utilizada.

12 REFERENCIAS

- [1] Chaudhry, M. H. *Open-Channel Flow*. Prentice Hall, New Jersey. (1993).
- [2] Thomson, J. J. On the windings of rivers in alluvial plains. *Proc. Roy. Soc. London*. **25**, 5-8. (1876).
- [3] Shiono, K., Knight, D. W. Turbulent open-channel flows with variable depth across the

- channel. *Journal of Fluid Mechanics*, **222**, 617-646, Great Britain. (1991).
- [4] Shiono, K., Knight, D. W. Two-dimensional analytical solution for a compound channel. *Proceedings of 3rd International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, Tokyo, Japan, July (Ed. Y. Iwasa, N. Tamai y A. Wada), pp. 503-510. (1988).
- [5] Weber, J. F. *Modelación integrada uni y bidimensional de flujo en planicies de inundación*. Tesis de Maestría en Ciencias de la Ingeniería – mención en Recursos Hídricos. Universidad Nacional de Córdoba. (2003).
- [6] Tarrab, L. *Estimación de la distribución lateral de velocidades: ríos argentinos*. Trabajo Final de Ingeniería Civil. Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba. (2004).
- [7] Ervine, A., Babaeyan-Koopaei, K., Sellin, R. Two-dimensional solution for straight and meandering overbank flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, Vo. 126, No. 9, pp. 653-669. (2000).
- [8] Weber, J. F., Menéndez, A. N. Modelo LATERAL para simular la distribución lateral de velocidades en cauces naturales. *Mecánica Computacional*, XXII, 399-409. Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Bahía Blanca. ISSN: 1666-6070 (2003).
- [9] Abril, J. B. *Benchmark comparisons of the analytical and finite element solutions of the SKM*. Technical Report EPSRC Research Grant – GR/R54880/01. University of Birmingham, UK. (2003).
- [10] Donnell, B.P. (Ed.). *User's Guide to RMA2 WES Version 4.3*. U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station – Hydraulic Laboratory (1996).
- [11] Bernard, R. S., Schneider, M. L. *Depth-averaged Numerical Modeling for Curved Channels*. Technical Report HL 92-9, U.S. Army Corps of Engineers, Hydraulics Laboratory, Vicksburg, Mississippi (1992).
- [12] Finnie, J., Donnell, B., Letter, J., Bernard, R. S. Secondary Flow Correction for Depth-Averaged Flow Calculations. *Journal of Engineering Mechanics*, Vo. 125 No. 7, pp. 848-863. (1999).
- [13] Weber, J. F., Menéndez, A. N., Elaskar, S. A. Modelación numérica y comparación de la distribución del flujo a superficie libre en secciones compuestas. *Mecánica Computacional*, XXI, 476-494. Asociación Argentina de Mecánica Computacional, Santa Fe. ISSN: 1666-6070. (2002).
- [14] Vergara Sánchez, M. A. *Técnicas de Modelación en Hidráulica*. Alfaomega, México (1995).