

## **UN ELEMENTO FINITO ESPECTRAL PARA VIGAS DE PAREDES DELGADAS CONSTRUIDAS CON MATERIALES COMPUESTOS**

**Marcelo T. Piovan<sup>†</sup> y Víctor H. Cortínez<sup>†</sup>**

<sup>†</sup>Grupo Análisis de Sistemas Mecánicos  
Facultad Regional Bahía Blanca, Universidad Tecnológica Nacional  
11 de abril 461, B8000LMI Bahía Blanca, Argentina. TE: 54-0291-4555220 FAX: 0291 4555311  
e-mail: [mpiovan@frbb.utn.edu.ar](mailto:mpiovan@frbb.utn.edu.ar), web page: <http://www.frbb.utn.edu.ar/gasm>

**Key words:** Vigas Paredes Delgadas. Materiales Compuestos. Elemento Finito Espectral.

**Abstract.** *En este artículo se desarrolla un elemento finito espectral para vigas de paredes delgadas construidas con materiales compuestos. En primer lugar se describe la teoría de vigas de paredes delgadas de materiales compuestos sobre la base de modelos que consideran la flexibilidad por corte completa, desarrollados previamente por los autores. Luego, se obtienen las funciones de forma espectrales y se plantea la matriz del elemento finito espectral para finalmente efectuar estudios de validación del elemento obtenido.*

## 1 INTRODUCCION

Los materiales compuestos poseen muchas ventajas con respecto a los materiales isótropos, por lo cual son empleados cada vez con mayor frecuencia en aplicaciones estructurales. Entre las características más conocidas de los materiales compuestos se pueden citar, su alta resistencia estructural frente a su bajo peso, su alta resistencia a la corrosión, mejor durabilidad a la fatiga, baja expansión térmica<sup>1</sup>. A estas propiedades se le añade su muy bajo costo de maquinado<sup>2</sup>. El empleo de los materiales compuestos en la ingeniería estructural tiene un especial campo de aplicación en las vigas de paredes delgadas. En estas circunstancias es necesario de contar con herramientas de análisis apropiadas para predecir el comportamiento estructural de tales vigas en diferentes condiciones de solicitación estáticas o dinámicas.

Bauld y Tzeng<sup>3</sup> desarrollaron uno de los primeros modelos de vigas de paredes delgadas de materiales compuestos, empleando las hipótesis de Vlasov, es decir sin considerar efectos de flexibilidad por corte. Este efecto comenzó a emplearse en formas particulares a partir de mediados de los ochenta con trabajos de Giavotto y colaboradores<sup>4</sup> y Bachau y colaboradores<sup>5</sup>. En estos trabajos, el efecto de deformabilidad por corte completa se tuvo en cuenta en una forma sencilla y aplicado a secciones bisimétricas cerradas. Durante los años noventa, varios autores han presentado modelos de vigas de paredes delgadas de materiales compuestos incorporando de diferentes maneras algunos efectos de deformabilidad por corte. Los modelos de Librescu y colaboradores<sup>6,7</sup> consideran solamente la flexibilidad por corte debida a la flexión pero no consideraron la deformabilidad por corte debida al alabeo por torsión no uniforme. Merece particular atención la investigación de Cesnik y colaboradores<sup>8</sup> quienes empleando el método denominado por ellos VABSA (Variational Asymptotical Beam Section Analysis), analizaron algunos aspectos dinámicos de vigas de paredes delgadas de materiales compuestos, aunque sin considerar los efectos de las tensiones iniciales en la dinámica de tales estructuras. Los autores<sup>9</sup> emplearon el principio de Hellinger-Reissner para desarrollar una teoría de vigas de material compuesto y secciones de paredes delgadas con laminados simétricos balanceados y contemplando efectos de flexibilidad por corte completo. En este modelo se cubrieron aspectos de la dinámica bajo estados de tensiones iniciales normales, contabilizando además la flexibilidad por corte en el espesor y el alabeo secundario.

La mayoría de los modelos mencionados anteriormente fueron empleados para analizar la respuesta estática y para la extracción de autovalores de las vigas. Aún así, la importancia de predecir las vibraciones estructurales de alta frecuencia es algo muy común para problemas caracterizados por fuerzas excitadoras que poseen un ancho de banda importante como en el caso de impactos o choques sónicos. Este tipo de excitación estructural (especialmente los impactos) puede causar gradientes de tensión discontinuos entre las láminas de un laminado, conduciendo eventualmente a la aparición de patrones de falla denominados “debonding” o “delamination”. Aun cuando se han presentado varias aplicaciones y metodologías para vibraciones de alta frecuencia en vigas de material compuesto de paredes delgadas, como en las estructuras reticulares y en rotores de helicópteros, todavía se necesita desarrollar esquemas de modelación eficientes para analizar este tipo de problemas. En este contexto los

elementos finitos espectrales surgen de la necesidad de predecir vibraciones estructurales de alta frecuencia. La introducción de este tipo de elementos fue propuesta por Doyle<sup>10</sup> como forma de predecir la propagación de ondas en estructuras. La principal característica de tales elementos reside en la posibilidad de emplear funciones de forma exactas, lo que redundaría en la representación exacta de la distribución de las propiedades del elemento, especialmente su masa. La matriz resultante del elemento finito espectral tiene similitud con la denominada “matriz de rigidez dinámica” en cuanto a que relaciona fuerzas generalizadas con los desplazamientos nodales del elemento. Sin embargo el principio deductivo empleado en la obtención de la Matriz del Elemento Finito Espectral, se sustenta en suponer una propagación de ondas a lo largo del elemento. En cambio para la deducción de la Matriz de rigidez dinámica se supone un movimiento armónico, reduciendo el problema a contemplar solo variables espaciales. El empleo de elementos finitos espectrales tiene la ventaja computacional de facilitar el análisis estructural en el dominio de altas frecuencias, donde las longitudes de onda son muy pequeñas. En contrapartida se necesita una gran cantidad de elementos finitos convencionales para reproducir el problema con pequeñas longitudes de onda.

Así pues Ruotolo<sup>11</sup>, Ostoja-Starzewski y Wood<sup>12</sup> desarrollaron metodologías de análisis basadas en elementos finitos espectrales, con el fin de estudiar las vibraciones transitorias de vigas de materiales compuestos pero de sección maciza siguiendo modelos provenientes de la teoría de Timoshenko. Nag y colaboradores<sup>13</sup> introdujeron un elemento finito espectral en el que consideraron una fisura con un patrón de “delamination” para modelar la dispersión de ondas en vigas de material compuesto de sección maciza. Mahapatra y Gopalakrishnan<sup>14</sup> desarrollaron un elemento finito espectral para el análisis de tubos de material compuesto. En el elemento se consideró la flexibilidad por corte debida a la deformación flexional y se despreció la flexibilidad por corte debida al alabeo por torsión no uniforme. Aun cuando este último efecto tiene una influencia relativamente escasa en el comportamiento dinámico de vigas de material compuesto con secciones cerradas, se ha probado<sup>9</sup> que es muy importante en secciones abiertas.

Hasta el momento y según el conocimiento de los autores existen elementos finitos espectrales para unos pocos modelos estructurales de viga, normalmente basados en las teorías de Bernoulli-Euler y de Timoshenko. Sin embargo elementos espectrales para el caso de vigas de paredes delgadas con secciones generales no están todavía disponibles. En el presente artículo se desarrolla un elemento finito espectral para el análisis de dispersión de ondas en vigas de paredes delgadas de materiales compuestos considerando la flexibilidad por corte completa. La base teórica del modelo se discute sucintamente para poder plantear las ecuaciones de equilibrio y empleando un esquema de deducción similar al de Ruotolo<sup>11</sup>, obtener las funciones de forma y hallar la matriz de rigidez. El elemento se valida con resultados frecuencias naturales tomados de las publicaciones científicas.

## 2 FORMULACION DEL ELEMENTO FINITO ESPECTRAL

### 2.1 Ecuaciones de movimiento y condiciones de borde asociadas

En la Figura 1.a se muestra un esquema de la viga de material compuesto, con los dos sistemas de referencia ubicados en los puntos  $C$  y  $A$ . El sistema de referencia principal es  $\{C: x, y, z\}$  y el secundario es  $\{A: x, s, n\}$ . En el sistema de referencia principal se describe la cinemática global de la viga según se aprecia en la Figura 1.b, mientras que en el sistema secundario se describen las ecuaciones constitutivas de las paredes de material compuesto.

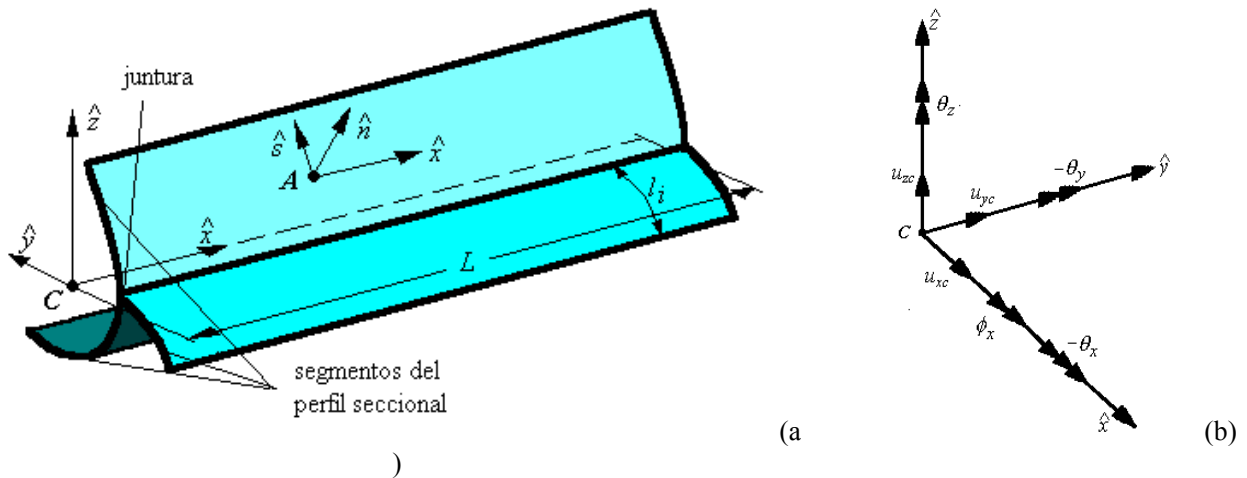


Figura 1: Descripción del elemento estructural

La teoría de viga flexible por corte de paredes delgadas de material compuesto se desarrolló apelando a las siguientes hipótesis<sup>9,15</sup>:

- La sección transversal es indeformable en su propio plano.
- Se desprecia el radio de curvatura de cada punto de las cáscaras que forman la pared.
- La función de alabeo se normaliza con respecto del centro de referencia  $C$ .
- Se considera una secuencia de laminación simétrica balanceada o especialmente ortótropa, uniforme para cada segmento de la sección. A su vez se supone constante la densidad del material a lo largo de la viga y en el espesor.
- Se consideran las tensiones  $\{\sigma_{xx}, \sigma_{xs}\}$ , y deformaciones  $\{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xs}\}$ , mientras que el resto se desprecian o se consideran nulas frente a las anteriores.

En este contexto se puede plantear el siguiente campo de desplazamientos para la viga:

$$\begin{aligned} u_x^L(x,t) &= u_{xc}(x,t) - y\theta_z(x,t) - z\theta_y(x,t) - \omega\theta_x(x,t) \\ u_y^L(x,t) &= u_{yc}(x,t) - z\phi_x(x,t) \\ u_z^L(x,t) &= u_{zc}(x,t) + y\phi_x(x,t) \end{aligned} \quad (1)$$

Nótese que en (1),  $u_{xc}(x,t)$  es el desplazamiento axial,  $\theta_z(x,t)$  y  $\theta_y(x,t)$  son las

rotaciones flexionales,  $u_{yc}(x,t)$  y  $u_{zc}(x,t)$  son los desplazamientos transversales de la sección,  $\phi_x(x,t)$  es la rotación torsional y  $\theta_x(x,t)$  es la variable que pondera el alabeo. Además la función de alabeo  $\omega$  y las coordenadas de un punto genérico de la sección vienen dados por:

$$\omega(s,n) = \omega_p(s) + \omega_s(s,n) \quad (2)$$

$$y(s) = Y(s) - n \frac{dZ}{ds}, \quad z(s) = Z(s) + n \frac{dY}{ds} \quad (3)$$

En (2),  $\omega_p$  y  $\omega_s$  son las funciones de alabeo primario y secundario respectivamente, que se describen como:

$$\begin{aligned} \omega_p(s) &= \int_s [r(s) + \psi(s)] ds - D_C \\ \omega_s(s,n) &= -n l(s) \end{aligned} \quad (4)$$

siendo  $r(s)$ ,  $l(s)$ ,  $\psi(s)$  y  $D_C$  se definen de la siguiente forma:

$$r(s) = Z(s) \frac{dY}{ds} - Y(s) \frac{dZ}{ds}, \quad l(s) = Y(s) \frac{dY}{ds} + Z(s) \frac{dZ}{ds} \quad (5)$$

$$\psi(s) = \frac{I}{\bar{A}_{66}(s)} \left[ \frac{\int_s r(s) ds}{\oint_s \frac{1}{\bar{A}_{66}(s)} ds} \right], \quad D_C = \frac{\oint_s [r(s) + \psi(s)] \bar{A}_{11}(s) ds}{\oint_s \bar{A}_{11}(s) ds} \quad (6)$$

Donde las funciones  $\bar{A}_{11}(s)$  y  $\bar{A}_{66}(s)$  son propiedades elásticas normal y tangencial respectivamente. La función  $\psi(s)$  es una representación del flujo de corte debido a torsión y normalizado respecto del giro torsional, en tanto que  $D_C$  es una constante de normalización.

Empleando el campo de desplazamiento (1) se pueden obtener las siguientes expresiones de las componentes de deformación de las paredes en el sistema de referencia secundario:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^L + n \kappa_{xx}^L \\ \gamma_{xs} &= 2\varepsilon_{xs} = \gamma_{xs}^L + n \kappa_{xs}^L \end{aligned} \quad (7)$$

En las cuales se usan las siguientes formas:

$$\varepsilon_{xx}^L = \varepsilon_{D1} - Y(s)\varepsilon_{D3} - Z(s)\varepsilon_{D2} - \omega_p(s)\varepsilon_{D4}, \quad \kappa_{xx}^L = \frac{dZ}{ds}\varepsilon_{D3} - \frac{dY}{ds}\varepsilon_{D2} - l(s)\varepsilon_{D4} \quad (8 \text{ a,b})$$

$$\gamma_{xs}^L = \frac{dY}{ds}\varepsilon_{D5} + \frac{dZ}{ds}\varepsilon_{D6} + [r(s) + \psi(s)]\varepsilon_{D7} + \psi(s)\varepsilon_{D8}, \quad \kappa_{xs}^L = -2\varepsilon_{D8} + \varepsilon_{D7} \quad (8 \text{ c,d})$$

Donde, para mayor simplicidad se definieron las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{D1} = \frac{\partial u_{xc}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{D2} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \quad \varepsilon_{D3} = \frac{\partial \theta_z}{\partial x}, \quad \varepsilon_{D4} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (9.a,b,c,d)$$

$$\varepsilon_{D5} = \left( \frac{\partial u_{yc}}{\partial x} - \theta_z \right), \quad \varepsilon_{D6} = \left( \frac{\partial u_{zc}}{\partial x} - \theta_y \right), \quad \varepsilon_{D7} = \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x \right), \quad \varepsilon_{D8} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad (9.c,d e,f)$$

Las  $e_{Di}$  se pueden interpretar como deformaciones generalizadas. De manera que  $e_{D1}$  es la deformación axial generalizada;  $e_{D2}$  y  $e_{D3}$  son las deformaciones flexionales generalizadas;  $e_{D4}$  es la deformación por alabeo;  $e_{D5}$  y  $e_{D6}$  son las deformaciones por corte debido a flexión;  $e_{D7}$  es la deformación por corte debido al alabeo por torsión no uniforme y finalmente  $e_{D8}$  es la deformación por corte debido a torsión pura.

El trabajo virtual de las fuerzas internas se puede obtener a partir de la expresión general de trabajos virtuales<sup>15</sup> o mediante el principio de Hellinger-Reissner<sup>9</sup> como:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = & \int_L [\mathbf{Q}_X \delta \varepsilon_{D1} - \mathbf{M}_Y \delta \varepsilon_{D3} - \mathbf{M}_Z \delta \varepsilon_{D2} - \mathbf{B} \delta \varepsilon_{D4}] dx + \\ & + \int_L [\mathbf{Q}_Y \delta \varepsilon_{D5} + \mathbf{Q}_Z \delta \varepsilon_{D6} + \mathbf{T}_{SV} \delta \varepsilon_{D8} + \mathbf{T}_W \delta \varepsilon_{D7}] dx + \\ & + \int_L [\mathbf{M}_1 \delta u_{xc} + \mathbf{M}_3 \delta \theta_z + \mathbf{M}_5 \delta \theta_y + \mathbf{M}_7 \delta \theta_x] dx + \\ & + \int_L [\mathbf{M}_2 \delta u_{yc} + \mathbf{M}_4 \delta u_{zc} + \mathbf{M}_6 \delta \phi_x] dx - \\ & - [\bar{\mathbf{Q}}_X \delta u_{xc} + \bar{\mathbf{Q}}_Y \delta u_{yc} + \bar{\mathbf{Q}}_Z \delta u_{zc} - \bar{\mathbf{M}}_Y \delta \theta_y + \bar{\mathbf{M}}_X \delta \phi_x - \bar{\mathbf{M}}_Z \delta \theta_z - \bar{\mathbf{B}} \delta \theta_x]_{x=0}^{x=L} \end{aligned} \quad (10)$$

En la expresión (10),  $\mathbf{Q}_X, \mathbf{M}_Y, \mathbf{M}_Z, \mathbf{B}; \mathbf{Q}_Y, \mathbf{Q}_Z, \mathbf{T}_{SV}$  y  $\mathbf{T}_W$  son la fuerza axial, los momentos flectores en las direcciones y, z, el bimomento, las fuerzas de corte en y y z, el momento de torsión de Saint Venant y el momento flexotorsor, respectivamente. Las funciones  $\mathbf{M}_i, i = 1, \dots, 7$  son funciones másicas definidas en términos de las aceleraciones. Los esfuerzos se pueden representar en función de las deformaciones generalizadas como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_X \\ \mathbf{M}_Y \\ \mathbf{M}_Z \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{Q}_Y \\ \mathbf{Q}_Z \\ \mathbf{T}_W \\ \mathbf{T}_{SV} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{J}_{22}^{11} & \mathbf{J}_{23}^{11} & \mathbf{J}_{24}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{J}_{33}^{11} & \mathbf{J}_{34}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mathbf{J}_{44}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \mathbf{J}_{55}^{66} & \mathbf{J}_{56}^{66} & \mathbf{J}_{57}^{66} & 0 \\ & & & & & \mathbf{J}_{66}^{66} & \mathbf{J}_{67}^{66} & 0 \\ & & & & & & \mathbf{J}_{77}^{66} & \mathbf{J}_{78}^{66} \\ & & & & & & & \mathbf{J}_{88}^{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{D1} \\ -e_{D2} \\ -e_{D3} \\ -e_{D4} \\ e_{D5} \\ e_{D6} \\ e_{D7} \\ e_{D8} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

siendo

$$\mathbf{J}_{ij}^{kh} = \int_S \bar{A}_{kh} (\bar{\mathbf{g}}_i^{(b)} \bar{\mathbf{g}}_j^{(b)}) ds + \int_S \bar{D}_{kh} (\bar{\mathbf{g}}_i^{(d)} \bar{\mathbf{g}}_j^{(d)}) ds \quad (12)$$

para  $\{i, j\} = \{1, \dots, 8\}$  y  $\{h, k\} = \{1, 6\}$  y con los vectores:

$$\bar{\mathbf{g}}^{(b)} = \left\{ 1, Z(s), Y(s), \omega_p(s), \frac{dY}{ds}, \frac{dZ}{ds}, r(s) + \psi(s), \psi(s) \right\} \quad (13.a)$$

$$\bar{\mathbf{g}}^{(d)} = \left\{ 0, \frac{dY}{ds}, -\frac{dZ}{ds}, l(s), 0, 0, 1, -2 \right\} \quad (13.b)$$

Nótese que los coeficientes definidos en (12) son reducidos<sup>15</sup>, debido a que por la simetría balanceada de los laminados, las constantes  $B_{ij}$  de acoplamiento elásticas del material compuesto son nulas.

Las funciones de masa se obtienen de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{M}_1(x) \\ \mathbf{M}_2(x) \\ \mathbf{M}_3(x) \\ \mathbf{M}_4(x) \\ \mathbf{M}_5(x) \\ \mathbf{M}_6(x) \\ \mathbf{M}_7(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11}^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \mathbf{J}_{11}^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \mathbf{J}_{33}^p & 0 & \mathbf{J}_{23}^p & 0 & \mathbf{J}_{34}^p \\ & & & \mathbf{J}_{11}^p & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \mathbf{J}_{22}^p & 0 & \mathbf{J}_{24}^p \\ & sim & & & & \mathbf{J}_{22}^p + \mathbf{J}_{33}^p & 0 \\ & & & & & & \mathbf{J}_{44}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{xc} \\ \ddot{u}_{yc} \\ \ddot{\theta}_z \\ \ddot{u}_{zc} \\ \ddot{\theta}_y \\ \ddot{\phi}_x \\ \ddot{\theta}_x \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Donde

$$\mathbf{J}_{ij}^p = \int_A \rho \bar{\mathbf{g}}_i^{(a)} \bar{\mathbf{g}}_j^{(a)} dA \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{g}}^{(a)} = \left\{ 1, Z + n \frac{dY}{ds}, Y - n \frac{dZ}{ds}, \omega_p - n l(s) \right\} \quad (16)$$

En el caso de secciones con simetría axial doble las matrices (11) y (14) son diagonales, desacoplando los movimientos flexionales entre sí y del movimiento torsional. En el caso de que la sección posea un solo eje de simetría, convenido en el eje  $y$ , se desacoplará el movimiento flexional en tal dirección de los restantes, mientras que el movimiento flexional en la dirección  $z$ , quedará acoplado con el movimiento torsional<sup>9,15</sup> (Esto puede apreciarse en los dos conjuntos de ecuaciones representados en la (17)).

Ahora bien, teniendo en cuenta (9) y operando variacionalmente en (10) se pueden obtener las expresiones (17) de las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \mathbf{Q}_x}{\partial x} + \mathbf{M}_1(x) = 0 & \quad -\frac{\partial \mathbf{Q}_z}{\partial x} + \mathbf{M}_4(x) = 0 \\
 -\frac{\partial \mathbf{Q}_y}{\partial x} + \mathbf{M}_2(x) = 0, & \quad \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial x} + \mathbf{M}_5(x) = 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{M}_z}{\partial x} + \mathbf{M}_3(x) = 0 & \quad -\frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{T}_{sv} + \mathbf{T}_w] + \mathbf{M}_6(x) = 0 \\
 & \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} - \mathbf{T}_w + \mathbf{M}_7(x) = 0
 \end{aligned} \tag{17}$$

Que están sometidas a las siguientes condiciones de borde

$$\begin{aligned}
 -\overline{\mathbf{Q}}_x + \mathbf{Q}_x = 0 \text{ o } \delta u_{xc} = 0 & \quad -\overline{\mathbf{Q}}_z + \mathbf{Q}_z = 0 \text{ o } \delta u_{zc} = 0 \\
 -\overline{\mathbf{Q}}_y + \mathbf{Q}_y = 0 \text{ o } \delta u_{yc} = 0, & \quad \overline{\mathbf{M}}_y - \mathbf{M}_y = 0 \text{ o } \delta \theta_y = 0 \\
 \overline{\mathbf{M}}_z - \mathbf{M}_z = 0 \text{ o } \delta \theta_z = 0 & \quad -\overline{\mathbf{M}}_x + \mathbf{M}_x = 0 \text{ o } \delta \phi_x = 0 \\
 & \quad \overline{\mathbf{B}} - \mathbf{B} = 0 \text{ o } \delta \theta_x = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

En el elemento finito espectral<sup>10-14</sup> las condiciones de borde están asociadas a la prescripción de desplazamientos y/o fuerzas generalizadas en los extremos del mismo, según se aprecia en la Figura 2.a (téngase presente la Figura 1.b para la orientación espacial y significado de los grados de libertad), de tal manera que las condiciones de borde naturales se pueden describir en función de las fuerzas generalizadas como se ve en la expresión (19).

$$\{\mathbf{F}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_x(0) \\ \mathbf{Q}_y(0) \\ -\mathbf{M}_z(0) \\ \mathbf{Q}_z(0) \\ -\mathbf{M}_y(0) \\ \mathbf{M}_x(0) \\ -\mathbf{B}(0) \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{F}^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{14} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_x(L) \\ \mathbf{Q}_y(L) \\ -\mathbf{M}_z(L) \\ \mathbf{Q}_z(L) \\ -\mathbf{M}_y(L) \\ \mathbf{M}_x(L) \\ -\mathbf{B}(L) \end{Bmatrix} \tag{19}$$



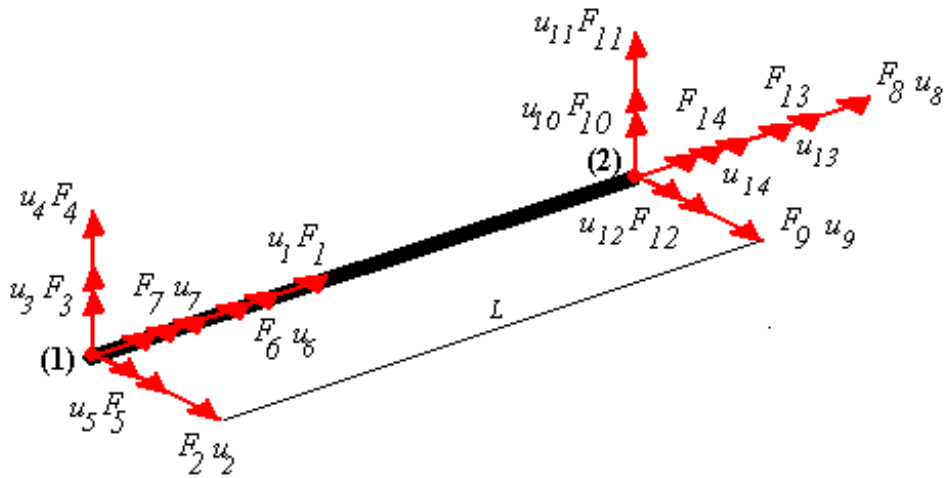


Figura 2: Descripción del elemento finito espectral, con sus fuerzas y desplazamientos asociados

## 2.2 Ecuaciones de onda y su solución

Para resolver las ecuaciones de equilibrio se supone que los desplazamientos generalizados están representados por una forma de propagación de ondas, que puede representarse de la siguiente manera:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_{xc}(x,t) \\ u_{yc}(x,t) \\ \theta_z(x,t) \\ u_{zc}(x,t) \\ \theta_y(x,t) \\ \phi_x(x,t) \\ \theta_x(x,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \end{Bmatrix} e^{i.k.x} e^{i.\omega.t} \quad (20)$$

donde  $k$  y  $\omega$  son el número de onda y la frecuencia circular respectivamente.

Ahora bien, empleando (20) en las ecuaciones (17) se pueden hallar los valores del número  $k_n$  y la forma de las ondas de propagación para cada valor de la frecuencia  $\omega$ . Así pues, fijando un valor determinado de frecuencia se puede obtener el número de onda, resolviendo un problema de autovalores. Al reemplazar (20) en (17) se presentan coeficientes  $k^j$ ,  $j=0,\dots,2$ , lo cual permite describir las ecuaciones de onda de la siguiente manera matricial

$$\left( \sum_{j=0}^2 [M_j] k^j \right) \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

siendo

$$[M_2] = \begin{bmatrix} J_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & J_{55}^{66} & 0 & J_{56}^{66} & 0 & J_{57}^{66} & 0 \\ & & J_{33}^{11} & 0 & J_{23}^{11} & 0 & J_{34}^{11} \\ & & & J_{66}^{66} & 0 & J_{67}^{66} & 0 \\ & & & & J_{22}^{11} & 0 & J_{24}^{11} \\ & sim & & & & J_{77}^{66} + 2J_{78}^{66} + J_{88}^{66} & 0 \\ & & & & & & J_{44}^{11} \end{bmatrix} \quad (22.a)$$

$$[M_1] = i. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{55}^{66} & 0 & J_{56}^{66} & 0 & J_{57}^{66} \\ 0 & -J_{55}^{66} & 0 & -J_{56}^{66} & 0 & -J_{57}^{66} & 0 \\ 0 & & J_{56}^{66} & 0 & J_{66}^{66} & 0 & J_{67}^{66} \\ 0 & -J_{56}^{66} & 0 & -J_{66}^{66} & 0 & -J_{67}^{66} & 0 \\ 0 & 0 & J_{57}^{66} & 0 & J_{67}^{66} & 0 & J_{77}^{66} + J_{78}^{66} \\ 0 & -J_{57}^{66} & 0 & -J_{67}^{66} & 0 & -J_{77}^{66} - J_{78}^{66} & 0 \end{bmatrix} \quad (22.b)$$

$$[M_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & J_{55}^{66} & 0 & J_{56}^{66} & 0 & J_{57}^{66} & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & J_{66}^{66} & 0 & J_{67}^{66} & 0 \\ sim & & & & 0 & 0 & J_{77}^{66} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} J_{11}^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & J_{11}^p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & J_{33}^p & 0 & J_{23}^p & 0 & J_{34}^p \\ & & & J_{11}^p & 0 & 0 & 0 \\ & & & & J_{22}^p & 0 & J_{24}^p \\ & & & & & J_{22}^p + J_{33}^p & 0 \\ & & & & & & J_{44}^p \end{bmatrix} \quad (22.c)$$

Ahora bien, la ecuación (21) se puede resolver como problema de autovalores, apelando al siguiente concepto:

$$([S_1] - k_n [S_2]) \{\bar{G}_n\} = \{0\} \quad (23)$$

siendo

$$[S_1] = \begin{bmatrix} [0_7] & [I_7] \\ [M_0] & [M_1] \end{bmatrix}, \quad [S_2] = \begin{bmatrix} [I_7] & [0_7] \\ [0_7] & -[M_2] \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\{\overline{\mathbf{G}}_n\}^T = \{\{\mathbf{G}_n\}^T, k_n \{\mathbf{G}_n\}^T\}^T \quad \text{con} \quad \{\mathbf{G}_n\}^T = \{A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}, A_{5n}, A_{6n}, A_{7n}\} \quad (25)$$

En la expresión (24), las matrices  $[\mathbf{0}_m]$  y  $[\mathbf{I}_m]$  son respectivamente las matrices nula e identidad de orden  $m$ . Ahora bien, (23) se puede fácilmente transformar en la siguiente

$$([\mathbf{S}_2]^{-1}[\mathbf{S}_1] - k_n [\mathbf{I}_{14}])\{\overline{\mathbf{G}}_n\} = \{\mathbf{0}\} \quad (26)$$

De esta manera, para cada valor de frecuencia, se pueden obtener catorce números de onda como solución del problema de autovalores, y sus correspondientes autovectores, de forma tal que los coeficientes  $A_j, j=1, \dots, 7$  vienen dados por  $\{\mathbf{G}_n\}^T$ . Luego se obtiene la solución para los desplazamientos a la frecuencia determinada, superponiendo las ondas de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} u_{xc}(x,t) \\ u_{yc}(x,t) \\ \theta_z(x,t) \\ u_{zc}(x,t) \\ \theta_y(x,t) \\ \phi_x(x,t) \\ \theta_x(x,t) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{14} b_n \begin{pmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \\ A_{4n} \\ A_{5n} \\ A_{6n} \\ A_{7n} \end{pmatrix} e^{i.k.x} e^{i.\omega.t} = [\mathbf{A}][\mathbf{B}(x)]\{\mathbf{b}\}e^{i.\omega.t} \quad (27)$$

siendo  $\{\mathbf{b}\}^T = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}, b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}\}^T$ , un vector cuyos elementos deben obtenerse en función de condiciones de borde especificadas, y las matrices  $[\mathbf{A}]$  y  $[\mathbf{B}]$  dadas por:

$$[\mathbf{A}] = [\{\mathbf{G}_1\}, \dots, \{\mathbf{G}_{14}\}], \quad [\mathbf{B}(x)] = \begin{pmatrix} e^{i.k_1.x} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{i.k_{14}.x} \end{pmatrix} \quad (28)$$

### 2.3 Obtención de las funciones de Forma

Para la obtención de las funciones de forma del elemento espectral se deben considerar los grados de libertad en los nodos tal como se muestra en la Figura 2. Así pues, evaluando con la expresión genérica (27) los desplazamientos en los dos nodos se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{Bmatrix} = [A] \{b\}, \quad \begin{Bmatrix} u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}_1] e^{i.k_1.x}, \dots, [\mathbf{G}_{14}] e^{i.k_{14}.x} \{b\} = [\bar{A}] \{b\} \quad (29)$$

De manera que el vector de desplazamientos generales del elemento

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} [A] \\ [\bar{A}] \end{Bmatrix} \{b\} = [D] \{b\} \quad (30)$$

Siendo  $\{U\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{14}\}$ . Luego de (30) se halla el vector  $\{b\}$  que se reemplaza en la (27), de manera que se obtienen en definitiva las funciones de forma del elemento espectral:

$$\{f\} = [A][B][D]^{-1} \quad (31)$$

## 2.4 Obtención de la matriz espectral

La matriz espectral del elemento se puede deducir evaluando en conjunto los esfuerzos generalizados definidos en (11) y empleando las condiciones de borde naturales (19). Sin embargo hay que notar que en las (19) se tiene el momento torsor total  $M_X (=T_{SV}+T_W)$ , de tal manera que la (11) debe reescribirse de la siguiente forma:

$$\{\bar{Q}\} = [\bar{J}_I] \{\Delta\} \quad (32)$$

con  $\{\bar{Q}\} = \{Q_X, Q_Y, M_Z, Q_Z, M_Y, M_X, B\}^T$ ,  $\{\Delta\} = \{\varepsilon_{D1}, -\varepsilon_{D2}, -\varepsilon_{D3}, -\varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\}^T$  y  $[\bar{J}_I]$  dada por:

$$[\bar{J}_I] = \begin{bmatrix} J_{11}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{55}^{66} & J_{56}^{66} & J_{57}^{66} & 0 \\ 0 & J_{23}^{11} & J_{33}^{11} & J_{34}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{56}^{66} & J_{66}^{66} & J_{67}^{66} & 0 \\ 0 & J_{22}^{11} & J_{23}^{11} & J_{24}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{57}^{66} & J_{67}^{66} & J_{77}^{66} + J_{78}^{66} & J_{78}^{66} + J_{88}^{66} \\ 0 & J_{24}^{11} & J_{34}^{11} & J_{44}^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

Ahora bien, teniendo presente la (20) y considerando (30) y (31), el vector de deformaciones generalizadas se puede plantear de la siguiente manera:

$$\{\Delta\} = [\mathbf{R}_1] \frac{\partial}{\partial x} \{U\} + [\mathbf{R}_2] \{U\} = ([\mathbf{R}_1][\mathbf{A}][\mathbf{B}'(x)] + [\mathbf{R}_2][\mathbf{A}][\mathbf{B}(x)])[\mathbf{D}]^{-1} \{U\} \quad (34)$$

siendo

$$[\mathbf{R}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{R}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{B}'(x)] = \frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{B}(x)] \quad (35)$$

Reemplazando (34) en (32) se obtiene la siguiente forma:

$$\{\bar{Q}\} = [\bar{J}_1] ([\mathbf{R}_1][\mathbf{A}][\mathbf{B}'(x)] + [\mathbf{R}_2][\mathbf{A}][\mathbf{B}(x)])[\mathbf{D}]^{-1} \{U\} = [\mathbf{E}(x)][\mathbf{D}]^{-1} \{U\} \quad (36)$$

Teniendo en cuenta (36) y reemplazando en (19) se obtiene:

$$\begin{aligned} \{F^{(0)}\} &= -[\mathbf{R}_3][\mathbf{E}(0)][\mathbf{D}]^{-1} \{U\} \\ \{F^{(L)}\} &= [\mathbf{R}_3][\mathbf{E}(L)][\mathbf{D}]^{-1} \{U\} \end{aligned} \quad (37)$$

Siendo  $[\mathbf{R}_3] = \text{Diag}[1, 1, -1, 1, -1, 1, -1]$ .

Finalmente, de la expresión (37) se puede extraer la matriz de rigidez dinámica del elemento finito espectral que tendrá la siguiente forma:

$$[\mathbf{K}_d] = \begin{bmatrix} -[\mathbf{R}_3][\mathbf{E}(0)] \\ [\mathbf{R}_3][\mathbf{E}(L)] \end{bmatrix} [\mathbf{D}]^{-1} \quad (38)$$

En definitiva para cualquier problema se tendrá para el elemento finito espectral la siguiente forma matricial:

$$\{F\}_e = [\mathbf{K}_d] \{U\}_e \quad (39)$$

Siendo  $\{F\}_e$  y  $\{U\}_e$  los vectores de fuerzas y desplazamientos en los nodos respectivamente. Téngase presente que los vectores y matriz de la expresión (39) se hallan definidos en el dominio de frecuencias, de tal forma que si se desea obtener la respuesta temporal es necesario efectuar una transformación inversa de Fourier discreta.

### 3 ANALISIS NUMERICO

#### 3.1 Comparaciones y validaciones

Con el objeto de validar el elemento finito espectral se efectúa una comparación de los valores de frecuencias naturales calculados por el método de elementos finitos y de cuadratura diferencial. Se considera una viga de perfil I como la que se muestra en la Figura 2, la cual es construida con el material compuesto cuyas propiedades se indican en la Tabla 1. La viga se halla empotrada en ambos extremos y tiene una longitud de  $L = 1 \text{ m}$ . La sección se halla compuesta por cuatro capas de material laminado orientado en un ángulo  $\alpha = 0^\circ$ .

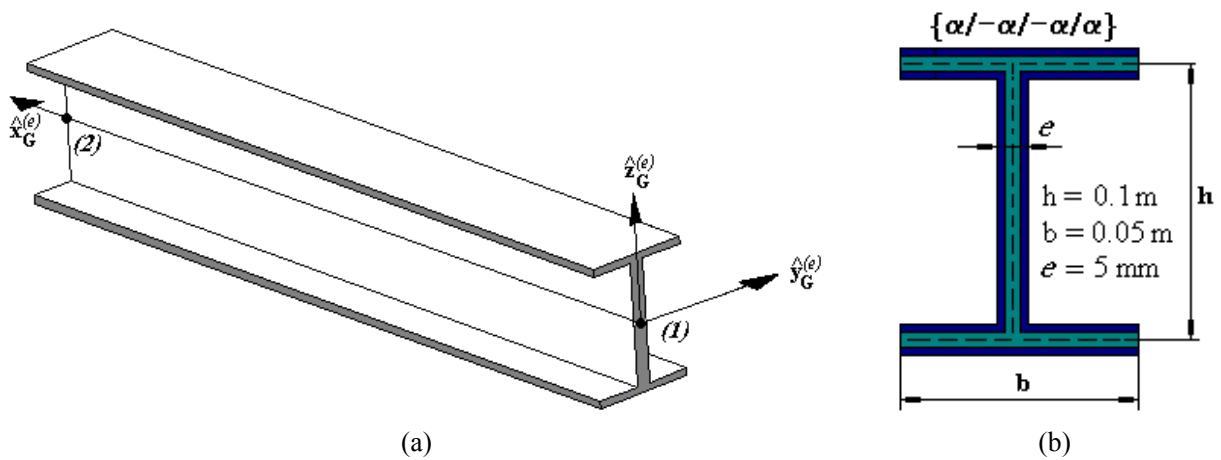


Figura 2: Viga de sección abierta bisimétrica.

Para el cálculo de las frecuencias con el elemento espectral, se emplea un esquema similar al planteado por Lee y colaboradores<sup>16</sup> que está basado en el algoritmo de Wittrick-Williams, el cual propone la solución al problema de autovalores derivado de (39), resolviendo la ecuación (40) para la condición en que los desplazamientos en los extremos del elemento finito espectral son nulos. Esto significa la condición de borde doblemente empotrada.

$$Det[\mathbf{K}_a] = 0 \quad (40)$$

Cuando se apliquen otras condiciones de borde en los elementos espectrales, se tendrá que reducir la matriz de rigidez espectral para considerar los grados de libertad efectivos en los extremos, obteniendo luego una ecuación característica como la (40).

Tabla 1: Datos del Material.

<p><i>Material: Fibras de carbono en Resina Epoxy</i>  <math>E_{11} = 141.96 \text{ Gpa}</math>, <math>E_{22} = E_{33} = 9.79 \text{ Gpa}</math>  <math>G_{12} = G_{13} = 6.00 \text{ Gpa}</math>, <math>G_{23} = 4.83 \text{ Gpa}</math>  <math>\nu_{12} = \nu_{13} = 0.24</math>, <math>\nu_{23} = 0.5</math></p>
---

Tabla 2: Comparación del elemento Finito Espectral y un elemento finito convencional.

Tipo de elemento	Cantidad de elementos	Frecuencia [Hz]				
		1°	2°	3°	4°	5°
Convencional	2	340.68	410.09	712.69	1275.71	1517.92
	4	332.49	400.09	672.15	846.82	1011.45
	16	330.56	397.79	659.24	819.29	978.80
	64	330.48	397.69	658.45	817.75	976.88
	128	330.46	397.66	658.41	817.67	976.97
Espectral	1	330.45	397.66	658.40	817.65	976.86

En la Tabla 2 se muestra una comparación de las primeras cinco frecuencias obtenidas con el elemento finito espectral y con un elemento finito desarrollado por los autores<sup>17</sup>. Nótese que para lograr el valor de la frecuencia de un solo elemento finito espectral, es necesario emplear 128 o más elementos finitos convencionales. Esto es de sustancial importancia cuando se tienen que analizar espectros de alta frecuencia donde las longitudes de onda son muy pequeñas y se necesita una gran cantidad de elementos finitos convencionales para un estudio relativamente detallado. En cambio solo se precisa un solo elemento finito espectral para reproducir la dinámica de una simple viga.

#### 4 CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un nuevo elemento finito espectral para analizar la dinámica de vigas con deformabilidad por corte completa, con sección de paredes delgadas y construidas con materiales compuestos. Se ha mostrado las propiedades de dispersión de las ondas en algunas configuraciones geométricas diferentes. A su vez se han cotejado los valores de frecuencia naturales obtenidas con el elemento finito espectral y los elementos finitos convencionales. Se debe destacar que este tipo de elemento, aun cuando exija calcular para cada frecuencia, los autovalores y autovectores de la onda, es sumamente útil para representar estructuras de barras más complejas<sup>13-14</sup>. En estos casos, un segmento de una estructura reticulada se puede modelar con tan solo un elemento espectral, lo cual es muy ventajoso para situaciones complejas donde deban medirse altas frecuencias. Téngase presente que el modelo estructural empleado, al considerar la flexibilidad por corte en forma completa, permite analizar con mayor detalle y precisión la dinámica de estructuras unidimensionales simples<sup>9,15,16</sup>. En consecuencia la potencial aplicación de los elementos espectrales con deformabilidad por corte completa a estructuras más complejas es sumamente prometedora. Tal aplicación es un trabajo que aún se halla en desarrollo.

#### 5 REFERENCIAS

- [1] E.J.Barbero. *Introduction to Composite Material Design*. Taylor and Francis Inc. (1999)
- [2] R.M. Jones. *Mechanics of Composite Materials*. Taylor and Francis Inc.(1999)
- [3] N.R.Bauld Jr. and L.S. Tzeng. "A Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross sections". *Int. J. Solids and Structures*, **20**(3), 277-297. (1984)
- [4] V. Giavotto M. Borri, L. Mantegaza and others. "Anisotropic Beam Theory and Applications" *Computers and Structures* **16**, 403-413. (1983)
- [5] O.A. Bauchau. "A Beam Theory for Anisotropic Materials". *Journal of Applied Mechanics* **52**(2), 416-422 (1985)
- [6] O. Song and L. Librescu "Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed cross-section contour". *Journal of Sound and Vibration*, **167**(1), 129-147. (1993)
- [7] S Na and L Librescu. "Dynamic response of elastically tailored adaptive cantilevers of non-uniform cross section exposed to blast pressure pulses". *International Journal of Impact Engineering* **25**(9), 847-867. (2001)
- [8] C.E. Cesnik, V.G. Sutyryn and D. Hodges "Refined Theory of Composite Beams -The Role of Short- Wavelength Extrapolation". *International Journal Solids and Structures* **33**(10) 1387-1408 (1996)
- [9] V.H.Cortínez and M.T.Piovan "Vibration and buckling of composite thin-walled beams with shear deformability". *Journal of Sound and Vibration*, **258**(4), 701-723. (2002)
- [10] J.F. Doyle, *Wave propagation in structures – spectral analysis using fast discrete fourier transforms*. 2nd Edition, Springer, Berlin (1997).
- [11] R. Ruotolo "A spectral finite element for laminates composite beams: theory and application to pyroshock analysis". *Journal of Sound and Vibration*, 270(1-2) 149-169. (2004)
- [12] M Ostoja-Starzeswski and A Woods "A spectral finite element for vibrating rods and beams with random field properties". *Journal of Sound and Vibration*, 268(4) 779-797. (2003)
- [13] A. Nag, D.R. Mahapatra, S Gopalakrishnan and T.S. Sankar "A spectral finite element with embedded delamination for modeling of wave scattering in composite beams". *Composites Science and Technology* 63 2187-2200. (2003)
- [14] D.R. Mahapatra and S Gopalakrishnan "A spectral finite element for analysis of wave propagation in uniform composite tubes". *Journal of Sound and Vibration*, 268(3) 429-463 (2003)
- [15] M.T. Piovan. "Estudio Teórico y Computacional sobre la mecánica de vigas curvas de materiales compuestos con secciones de paredes delgadas considerando efectos no convencionales". Tesis Doctoral. Universidad Nacional del Sur. (2003)
- [16] U. Lee, J. Kim, J. Shin and A.Y.T. Leung. "Development of a Wittrick-Williams algorithm for the spectral element model of elastic-piezoelectric two-layer active beams". *International Journal of Mechanical Sciences* 44, 305-318 (2002).
- [17] Piovan M.T., Cortínez V.H. y Rossi R.E. "Estática y dinámica de vigas Anisótropas de paredes delgadas deformables por corte". *Mecánica Computacional XX*, 258-265 (2001).