

APLICACIONES DEL KERNEL DE UN POLÍGONO A PROBLEMAS DE EDICIÓN DE MALLAS

Nestor A. Calvo^{a,b} y Pablo J. Novara^b

^a*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería. CIMEC – CONICET.
Parque Tecnológico Litoral Centro – Barrio “El Pozo” – Santa Fe (3000) – Argentina.
ncalvo@santafe-conicet.gov.ar – <http://www.cimec.org.ar>*

^b*Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas. FICH-UNL.
Ciudad Universitaria - Barrio “El Pozo” – Santa Fe (3000) – Argentina.
<http://fich.unl.edu.ar>*

Palabras Clave: kernel, capa límite, normal por vértice, suavizado, mallas.

Resumen: El kernel de un polígono es la región interna desde la cual todo el perímetro es visible. En este trabajo se explora la utilización de este concepto, y algunos derivados, para diversos problemas de edición de mallas: determinación de una normal por nodo para capa límite y ubicación óptima de un nodo para suavizado. Se presenta la relación entre estos problemas y el centro de la máxima circunferencia que se puede inscribir en el kernel, tanto para polígonos esféricos como planos y la solución algorítmica para obtener dicho centro en tiempo lineal.

1 INTRODUCCIÓN

Resulta siempre interesante cuando un mismo problema, o su solución algorítmica, tiene diversas aplicaciones, sobretodo cuando hay varias en el mismo campo. En éste trabajo se analizan las propiedades de una construcción basada en un polígono o poliedro que tiene diversas aplicaciones en la generación y optimización de mallas para usos generales, en particular para el Método de Elementos Finitos (FEM).

La optimización de mallas para FEM consiste en editarlas para mejorar su “calidad”. La malla tiene cierta responsabilidad en la magnitud de los errores numéricos; la calidad, antes aludida, es una medida inversa del grado de responsabilidad de la malla. Gruesamente dicho: cuando la forma o el tamaño de los elementos no son adecuados a los requerimientos del cálculo, la malla es de “mala calidad”. La medida, el valor numérico concreto de dicha calidad, es materia de cien papers (Knupp99). De todos modos, hay una taxonomía básica en los métodos de optimización de las mallas; por un lado tenemos los métodos iterativos locales versus los métodos globales, que mejoran toda la malla a la vez; por otro lado tenemos los métodos con y sin cambios topológicos (de conectividades). La edición sin cambios topológicos se suele denominar suavizado; consiste en un reposicionamiento de los nodos (global o iterativo) de modo de mejorar alguna medida de la calidad.

Otro problema, y totalmente distinto, es la generación de mallas en la capa límite de un fluido que roza un objeto sólido. Se trata de mallas fuertemente anisotrópicas, de elementos aplastados contra la superficie sólida. Por esa característica se suele recurrir a una generación estructurada de elementos prismáticos a partir de múltiples copias paralelas de la superficie y cercanas entre sí; los triángulos darán prismas triangulares y los cuadriláteros darán hexaedros (ladrillos). Para lograrlo se recurre a la “propagación de los nodos” por líneas perpendiculares a la superficie, dado que los elementos están muy aplastados en esa dirección los problemas de posibles cruces se resuelven fácilmente. Cabe aclarar que el aplaste anisotrópico es deseable en este caso, a diferencia de lo requerido en una malla normal, isotrópica.

Un problema de otro campo, pero relacionado con este último, es la simulación de las condiciones de iluminación en un objeto virtual, representado en la computadora mediante una malla de superficie. La iluminación no debe “reflejar” las discontinuidades del plano tangente al pasar de un elemento de superficie al vecino. Para lograr una iluminación suave se calcula un versor normal en cada vértice, promedio normalizado de los normales de las caras adyacentes al vértice (Angel06)

En la generación y edición de mallas también se requieren normales nodales para diversas aplicaciones. Al igual que en el problema de iluminación, aquí son necesarias en todos los casos en que se necesite reconstruir localmente la superficie suave a partir de la malla discreta. Por ejemplo para el suavizado de mallas de superficies no euclídeas (no planas), donde los nodos deben moverse, pero no sobre el plano de los elementos sino sobre la supuesta superficie, la interpolante de los nodos. Otro caso es cuando se requiere discriminar elementos exteriores/interiores en algunos métodos (Delaunay) que generan una malla del envoltorio convexo del dominio, obligando a recuperar la frontera y descartar los elementos exteriores. Las normales por nodo dan, en ese caso, una pista de la dirección exterior; más útil a veces, que la otorgada por las normales de los elementos de frontera.

Los problemas antes mencionados se pueden dividir en dos: la búsqueda de un versor normal por nodo y la búsqueda de la mejor posición para un nodo en el contexto de sus elementos. Ambos problemas (y otros de otras áreas) requieren entender el kernel de un polígono plano o esférico o bien de un poliedro (euclídeo, en este caso).

2 DEFINICIONES

Intentaremos precisar los términos. Es un impreciso ejercicio que, como toda ley, presenta algunos huecos que se rellenarían con más páginas que las que conviene utilizar aquí.

El *convex-hull* (envoltorio, cápsula o casco convexo) de un conjunto d -dimensional de puntos, continuo o discreto, es la intersección de todos los semiespacios (limitados, cada uno, por un hiperplano $(d-1)$ -dimensional) que contienen al conjunto de puntos. En 2D, dado un conjunto de puntos y/u objetos, se puede ver como la figura convexa que forma una banda elástica que envuelve el conjunto, la intersección de todos los semiplanos que contienen al conjunto; en 3D será una superficie tensa. No se distingue entre el interior y la frontera, el mismo término se utiliza indistintamente para ambos.

Cualquier objeto formado por intersección común de semiespacios es convexo.

Un *símplice* d -dimensional es la generalización del triángulo 2D y el tetraedro 3D, es el envoltorio convexo de $d+1$ puntos con independencia afín: no hay tres puntos colineales, ni cuatro coplanares, ni $k+1$ en un subespacio afín k -dimensional con $k < d$. Sus detalles (caras, aristas, vértices) son subsímplices de dimensiones menores¹.

Se suele utilizar el término “politopo” para referirse a la generalización dimensional de polígono/poliedro, pero la definición es muy imprecisa y variable (puede verse la discusión semántica en <http://en.wikipedia.org/wiki/Polytope>). Aquí utilizaremos directamente polígono o poliedro, otra definición polisémica pero mas usual². Entenderemos por tal a cualquier objeto simplemente conexo³, d -dimensional que se obtiene como unión de símplexes (complejo simplicial), todos de igual dimensión d y de modo que dos símplexes compartan un subsímplice completo o nada. Con ello intentamos evitar los polígonos y poliedros autointerceptados y otras monstruosidades que no vale la pena analizar, pero sí admitimos los objetos cóncavos. En particular, las caras son subsímplices $(d-1)$ -dimensionales, pueden ser compartidos por hasta dos símplexes d -dimensionales o bien son caras de frontera del poliedro, cuando pertenecen solo a uno. Llamaremos caras (a secas) a las caras de frontera del poliedro.

Un ángulo, en 2D, es una de las dos porciones de plano separadas por dos semirrectas con origen común. La selección, de cual de las dos porciones se trata, se define mediante un punto interior o una dirección. La generalización dimensional es mediante una pirámide infinita a la que seguiremos llamado ángulo (ángulo sólido).

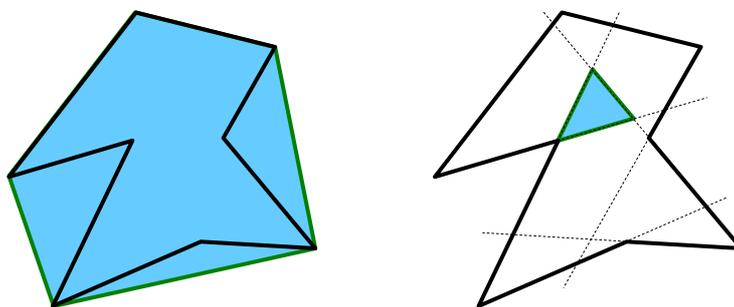


Figura 1: Izquierda: Envoltorio Convexo de un polígono cóncavo. Derecha: Kernel del mismo polígono.

¹ Se suele definir al conjunto vacío como un símplex de dimensión -1 presente en cualquier símplex. También se suele denominar “caras”, en general, a los $d+1$ subsímplices de dimensión $d-1$.

² Imre Lakatos, a través de los problemas que presenta justamente esta definición, y en torno a la característica de Euler, genera uno de los textos fundamentales de la epistemología de la matemática (Lakatos 76).

³ Un complejo simplicial es conexo, en d dimensiones, cuando tiene una frontera cerrada: la unión de las caras no compartidas no tiene caras no compartidas. Es simplemente conexo cuando la frontera es isomorfa a una esfera.

El kernel de un poliedro es la intersección de todos los ángulos interiores, los que contienen un punto interior del poliedro en cualquier entorno del vértice. También se puede definir como la intersección de todos los semiespacios orientados hacia el interior, los que están definidos por los planos de las caras de frontera y que contienen un punto interior en cualquier entorno de cualquier punto de la cara⁴. El kernel también es convexo por ser intersección de semiespacios. Se puede entender como la zona desde la cual toda la frontera es visible: desde cada ángulo interno o semiespacio interior hay una porción visible, desde la intersección común, todo es visible.

Es sencillo de ver que no todo polígono/poliedro tiene un kernel, puede que haya dos (o más) ángulos internos sin intersección. En tal caso, no hay ningún punto desde el cual se puede ver todo el polígono.

En la superficie esférica en 3D, las geodésicas son arcos de circunferencia máxima, que son a su vez las intersecciones de la esfera con planos que contienen al centro. La intersección de tres hemisferios es un triángulo esférico. Con esos conceptos básicos se generalizan el símplice y el polígono esférico. El envoltorio convexo será la intersección común de todos los hemisferios que contienen al polígono; pero puede no haber ninguno, si el polígono abarca más de un hemisferio. El kernel también sigue definido igual que en el caso euclídeo y también aquí puede no existir.

3 APLICACIONES DEL KERNEL

Bajemos ahora a las dos y tres dimensiones que presentan los problemas del mallado. Para obtener el convex-hull o el kernel euclídeos hay algoritmos clásicos (DeBerg08) pero obtener el kernel no es tarea sencilla, sobretodo en 3D y cuando debe hacerse en múltiples instancias, por ejemplo: una para cada conjunto de elementos adyacentes a cada nodo. Obtener el kernel es obtener sus vértices, a partir de las intersecciones de las caras del poliedro, y determinar sus conectividades, las caras del kernel. Veamos el asunto en función de las necesidades.

3.1 Suavizado de mallas euclídeas

En este problema, que ejemplificamos en el plano, se debe encontrar “la mejor posición” para un nodo móvil, pero considerando fijo al conjunto de nodos vecinos: los otros nodos del conjunto de elementos que comparten el nodo móvil.

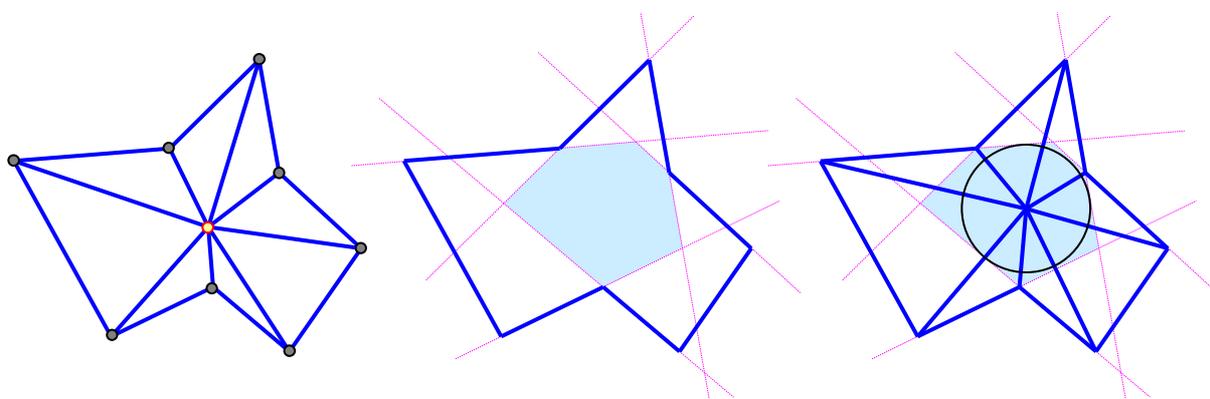


Figura 2: Izquierda: Triángulos adyacentes a un nodo. Centro: el kernel de la unión. Derecha: Circulo inscripto maximal, con el punto móvil llevado al centro

⁴ Un “entorno” de un punto es un conjunto abierto que contiene al punto.

En la Figura 2 se muestra el problema, junto con el kernel del polígono formado por la unión de los elementos triangulares. Del análisis de la figura, se desprende que cualquier ubicación del nodo móvil dentro del kernel, dará elementos válidos; mientras que llegando a la frontera del mismo, algún elemento se aplasta anulando su área; si el punto móvil sale fuera del kernel, habrá algún elemento invertido. Con cuadriláteros hay más ángulos y el problema es mayor y más aún en 3D con tetraedros y peor con hexaedros; el kernel tendrá más limitantes, puede ser más pequeño y aumenta la probabilidad de que no exista (Calvo99).

Respecto a “la mejor posición”, es necesario aclarar que existen tantas como métricas para cuantificar la calidad de los elementos. De modo que aquí entenderemos por tal a la posición interior que maximiza la menor altura de los triángulos.

En el FEM y en cualquier proceso de cálculo numérico e interpolación de resultados, se pretende que los resultados, ya sean interpolados o calculados, varíen con suavidad. Una interpolación lineal, en la arista de un elemento, se obtiene a partir de los valores calculados en los nodos extremos de esa arista. Si hay otro nodo muy cerca de la arista, su valor calculado puede ser muy distinto del interpolado en la arista. Lo mismo sucede en 3D cuando hay un nodo cerca de una cara (cap) o dos aristas cercanas entre sí (sliver). Indirectamente, el número de condición de la matriz de rigidez mide ese defecto (Knupp99), mas directamente se suele decir que no son aceptables los grandes gradientes de las funciones de forma (Calvo03) y, más directamente aun, hay que maximizar la mínima altura de los elementos⁵.

El punto más alejado posible de las fronteras del kernel es el centro de la máxima circunferencia que puede inscribirse en el kernel y ese punto también maximiza la mínima altura desde el nodo móvil a las caras opuestas: el radio en los puntos de tangencia define las menores alturas desde el punto móvil a los lados opuestos. La demostración es trivial por el absurdo: si hubiese un punto más alejado, centrada en ese punto se podría trazar una circunferencia mayor.

En tres dimensiones sucede exactamente lo mismo: el kernel es un poliedro convexo y el punto más alejado de las caras es el centro de la mayor esfera inscribible en el kernel.

Más adelante presentaremos una serie de algoritmos que permiten calcular el centro de la circunferencia sin ninguna necesidad de identificar el kernel, no será necesario calcular intersecciones ni enumerar sus vértices y conectividades, se obtendrá directamente el centro.

Más allá de la determinación del centro, hay que aclarar que este resultado sólo se puede utilizar en algoritmo de suavizado “egoista”: donde cada punto se ubica iterativamente donde mejor le conviene. Sabemos (Calvo99) que no es el mejor posible, un algoritmo “solidario”: donde el nodo se ubica donde es mejor, tanto para el como para sus vecinos, al menos en lo que de él depende, converge más rápidamente. Esto se puede observar a partir del hecho de que, ubicando el punto en el centro de la circunferencia, los nodos fijos pueden quedar a una menor distancia de las aristas móviles, las que conectan los nodos fijos con el móvil. Aún no disponemos de un algoritmo eficiente que minimice todo a la vez. Más adelante volveremos sobre este tema.

3.2 Normal por nodo

La definición de una normal por nodo sirve tanto para reconstruir la superficie curva local (por ejemplo mediante una interpolación con NURBS) como para propagar los nodos en una malla de capa límite o para realizar un offset (copia paralela) de la superficie.

⁵ Cuando se pretenden grandes variaciones o anisotropía (capa límite, ondas de choque, etc.) se recurre a grandes variaciones del tamaño o anisotropía de los elementos, pero esa no es la condición estándar y, en todo caso, el gradiente de las funciones de forma ($1/h$) está sugerido por la distancia esperada (h) entre nodos.

El primer intento, el que se realiza para iluminación en computación gráfica, consiste en un promedio renormalizado de las normales de las caras adyacentes al nodo. Este valor adolece de un defecto grave: cuando es distinta la cantidad de elementos a un lado y a otro de una dada dirección la normal apunta mal.

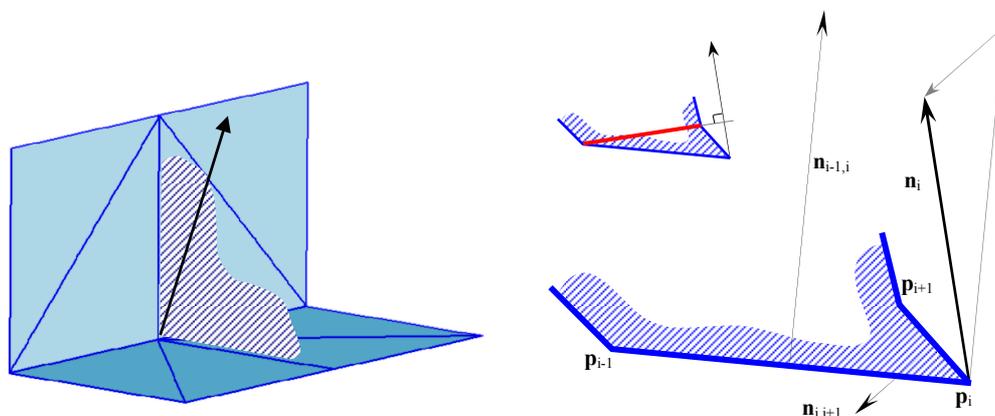


Figura 3: Izquierda: Normal promedio. Derecha: Promedio ponderado por áreas/longitudes.

El contraejemplo más sencillo de ver está a la izquierda de la Figura 3. En el plano horizontal hay cuatro elementos y en el vertical dos, de modo que la normal promedio tendrá una componente vertical dos veces mayor que la horizontal, cuando deberían ser iguales. Peor aún, en la línea que divide los planos horizontal y vertical, la normal puede ir zigzagueando entre cada nodo y el siguiente.

Realizar un promedio ponderado por áreas es aún peor, ya en mallas 1D de segmentos se puede ver el problema, tal como se grafica en la misma Figura 3, a la derecha. Cuando hay elementos de distinta longitud a ambos lados, el promedio ponderado por áreas puede dar una normal exterior que no apunte hacia el exterior o una opuesta interior que no apunte al interior del dominio. Para explicar esto, en dos o tres dimensiones, se puede utilizar el teorema de Gauss con un integrando unitario constante:

$$\int_{\Omega} \nabla f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \, \mathbf{n} \, ds \Rightarrow \int_{\Omega} \nabla 1 \, dx = \boxed{0 = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \, ds} \quad (1)$$

La integral de la normal sobre los elementos de área de una superficie cerrada es nula. En polígonos y poliedros se reduce al teorema de Minkowsky: en un polígono cerrado, la sumatoria de las normales, multiplicadas por el área de sus caras, es nula.

$$\sum s_i \, \mathbf{n}_i = 0 \quad (2)$$

Esto es: el promedio ponderado por áreas de las normales de los elementos de un nodo tiene la dirección opuesta de la normal media de la superficie que cierra ese conjunto de caras o aristas. En mallas 1D se visualiza fácilmente, es una sola línea: la línea que se muestra gruesa en la figura reducida de arriba. En una superficie en 3D es más complicado mostrar el cierre de un polígono no plano y su normal media, pero el defecto es el mismo: puede que la normal exterior no apunte al exterior o que su opuesta no apunte al interior.

Queremos una normal cuya línea de soporte vaya del interior al exterior, atravesando la malla por el nodo y además pretendemos que tenga cierta dirección preferencial. Queremos que “apunte al medio” del ángulo sólido, una especie de bisectriz generalizada.

Una mejor elección (que nos fue sugerida por Mario Storti, pero desconocemos el origen) es el promedio ponderado por ángulos internos (sólo en el caso 3D). Se puede visualizar a través del siguiente ejemplo gráfico:

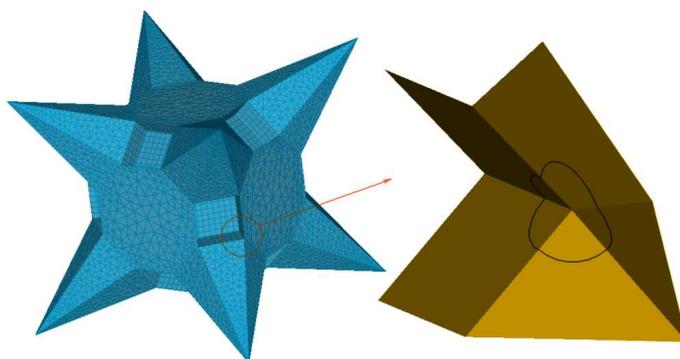


Figura 4: Entorno esférico de un nodo.

En un nodo centramos una esfera infinitesimal (aunque alcanza con que sea menor que las aristas). Esa esfera tiene una parte en el interior del dominio y otra en el exterior, separadas por su intersección con los elementos de superficie.

Esas “partes” son polígonos esféricos cuyas aristas quedan definidas por la intersección de la esfera con cada elemento de frontera de la malla (en un plano que pasa por el centro de la esfera, que es el nodo).

Por el teorema de Gauss, utilizado como antes (ec. 1), las áreas (vectoriales) integradas de ambas partes son iguales y opuestas y dan una buena normal promedio. Apuntan, tanto en el interior como en el exterior al centroide de los respectivos casquetes. Ahora, la figura compuesta por sectores circulares que se muestra a la derecha de la Figura 4, es la porción de los elementos de frontera encerrada por la esfera. Esa figura “tapa” o “cierra” a cualquiera de los dos polígonos esféricos mencionados. Por lo tanto su área integral también tendrá el mismo módulo y dirección. El área integral de la figura central se calcula como la suma de las normales por cara, ponderadas con el área de cada sector circular: el radio común de la esfera multiplicado por el ángulo interno en radianes.

En resumen: el promedio de normales por cara, ponderado por ángulos internos, apunta al centroide del polígono esférico exterior y su opuesto al centroide del polígono esférico interior.

Si bien ese algoritmo otorga un buen resultado en la mayoría de los casos, tiene problemas: Si un polígono (aún uno plano) es cóncavo, puede que su centroide esté fuera del mismo. Y otro: Aún si está dentro del polígono cóncavo puede que no “vea” a todas las caras.

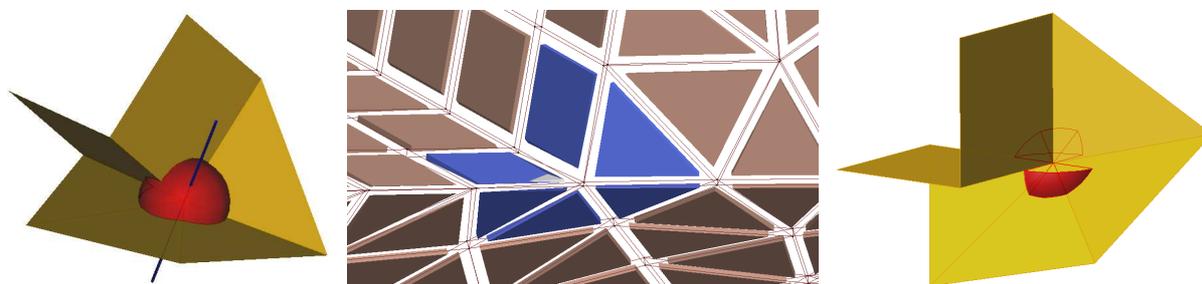


Figura 5: Izquierda: Dirección media ponderada por ángulos. Centro: malla de capa límite. Derecha: Kernel de los polígonos esféricos

En la Figura 5 se muestra, a la izquierda, uno de los polígonos esféricos del ejemplo anterior y la línea que soporta a la normal promediada, ponderando con los ángulos internos de las caras. Se puede observar que la línea no puede “ver” a una de las caras. El efecto, al

usarla para propagar el nodo en una malla de capa límite, es que aparecen elementos inválidos, con caras cruzadas. El problema se produjo porque el vector calculado no apunta al interior del kernel del polígono esférico⁶. Cualquier línea que atravesase el kernel verá todas las caras y podrá usarse para una propagación correcta del nodo en una malla de capa límite. Pero: ¿Cuál es la mejor?

Pretendemos que el ángulo que forma la línea con las caras sea lo más cercano posible a los 90°. Las direcciones a 90° de las caras las definen las normales, entonces: hay que encontrar el versor que minimiza el máximo ángulo con las normales de las caras (Aubry07).

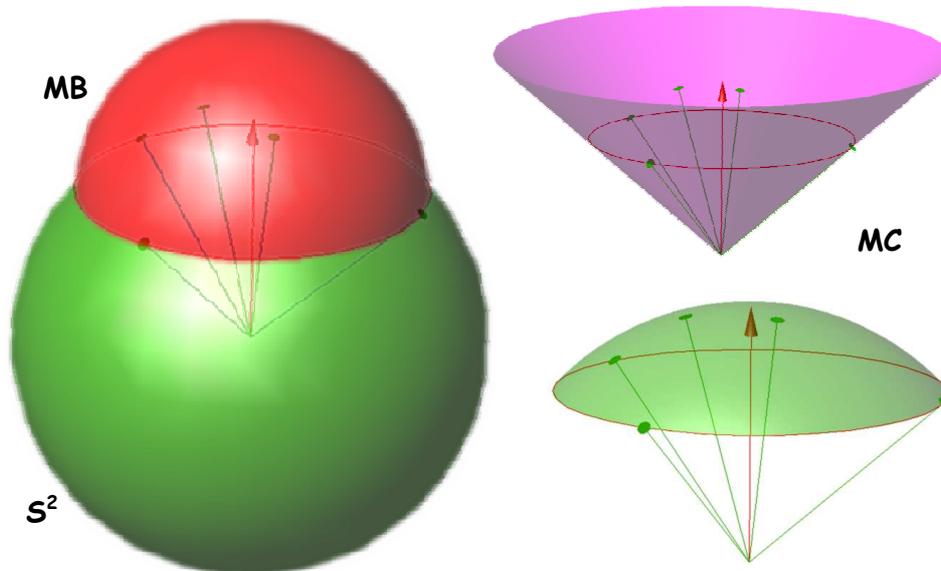


Figura 6: Esfera unitaria S^2 , Mínima esfera (MB) que contiene a “las puntas de los versores”, Mínimo Cono envolvente y mínimo casquete envolvente (ámbos MC)

La dirección cuyo alejamiento angular máximo a las normales es la mínima posible, es el eje del menor cono que las contiene, el cono MC, que se muestra en la Figura 6.

Existen otras dos formas alternativas de encontrar el mismo resultado. Las normales de las caras son vectores unitarios, sus extremos están todos en una esfera unitaria S^2 , podemos reemplazar la búsqueda del cono por la de la mínima esfera que contiene esos puntos en 3D o equivalentemente la mínima circunferencia en la esfera.

En la Figura 7 se muestra el mismo problema presentado en la Figura 4, allí se pueden observar las normales a las caras, que abarcan un ángulo muy amplio alrededor del nodo común, por lo tanto el mínimo cono que las envuelve es muy abierto. El cono está definido por dos normales, en este caso.

El cono puede considerarse generado por una de normal que gira en torno al eje, durante el giro coincide con dos o tres de las normales de las caras. Dualmente, puede pensarse en un plano que gira, siempre perpendicular a la normal que gira. Dicho plano coincidirá durante el giro con dos o tres de las caras adyacentes al nodo. El giro de dicho plano produce un cono interior, complementario del envolvente, que es tangente a dos o tres de las caras (a sus planos). Ese es el máximo cono inscribible en el interior del kernel esférico. Ambos conos complementarios comparten el eje que es el único resultado que importa: la normal del nodo,

⁶ Cada cara de frontera (su plano) define dos hemisferios, uno interior y uno exterior, por lo tanto, y curiosamente: el kernel del polígono interior tiene simetría central con el del exterior, de modo que si la dirección calculada apunta dentro de uno, la opuesta apunta dentro del otro.

la línea que apunta correctamente al interior y al exterior y que tiene el ángulo menos desviado posible de 90° con las caras.

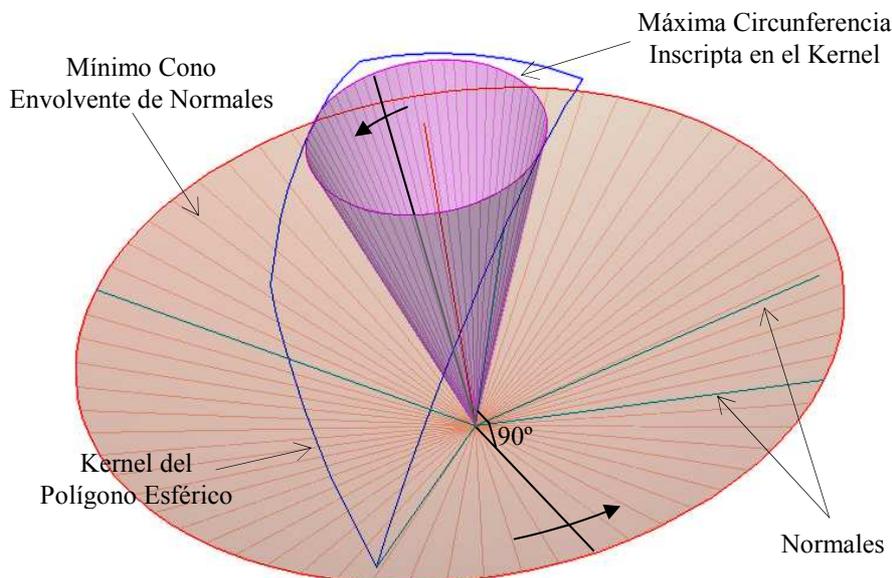


Figura 7: Mínimo cono de normales y Máximo cono del kernel

Si analizamos esto último, podemos ver inmediatamente que si el conjunto de normales ocupa más que un hemisferio, no habrá kernel y por lo tanto no habrá solución: ninguna dirección que vea todas las caras.

4 ALGORITMOS

Ahora presentaremos los métodos computacionales para obtener, primero la “normal por nodo” y luego la “mejor ubicación” para un nodo en el suavizado. El significado de las comillas debe resultar ahora obvio: la normal no es normal a nada (en todo caso, a un plano “medio” con algunas propiedades útiles) y, por otro lado, la mejor posición del nodo móvil, es sólo la que (egoístamente) maximiza la menor altura del punto móvil a las aristas opuestas.

Comenzaremos describiendo el algoritmo para encontrar la mínima esfera que envuelve a un conjunto de puntos y luego generalizaremos ese estilo al resto de los problemas planteados.

4.1 Mínima esfera envolvente

El problema consiste en encontrar la mínima esfera que envuelve a un conjunto de puntos en el espacio euclídeo. Este es uno de los problemas-ejemplo de la geometría computacional. El algoritmo de elección es el de Emo Welzl ([Welzl91](#)) que tiene los siguientes fundamentos:

- 1) La solución existe y es única.
- 2) La esfera estará definida por un subconjunto de puntos cuya cardinalidad está entre dos y la dimensión del espacio más uno. (Dos a cuatro puntos en 3D).
- 3) El centro está en el interior del simple que definen esos puntos. (Si la esfera está definida por dos puntos éstos son diametrales, el centro es el medio del segmento que los une, si está definida por tres puntos el centro está dentro del triángulo que definen, su mayor ángulo debe ser menor que 90°)
- 4) El algoritmo es recursivo: agrega los puntos, de a uno, al problema ya resuelto para el subconjunto actual, empezando con dos puntos y su esfera diametral.

- 5) Cuando un punto agregado no está dentro de la esfera, este punto debe ser un punto de definición del nuevo resultado. En la recursión se van agregando puntos “necesarios” hasta la máxima cardinalidad, que define la solución definitiva.

Se requiere un solo algoritmo recursivo y funciones que calculen esferas por dos, tres o más puntos. El algoritmo principal, el recursivo, se alimenta con una lista de puntos a analizar y una lista de puntos obligatorios. En cada recursión, cuando se agrega el punto obligatorio que completa la cardinalidad (el cuarto para la esfera 3D) el algoritmo termina, en caso de que no se complete la cardinalidad máxima, termina cuando todos los puntos están dentro de la solución actual.

Los puntos se pueden agregar en orden aleatorio⁷, pero hay optimizaciones que van ubicando al principio a los más probables, los que suelen estar fuera de la solución temporaria.

Todos los aspectos teóricos y la generalización de este algoritmo a otros problemas de programación quasi-lineal, se pueden consultar en la tesis de Samuel Zürcher ([Zurcher07](#)).

En los casos que nos competen, los algoritmos son especializaciones del antedicho.

4.2 Determinación del eje del cono evolvente

Para la determinación del cono o el casquete mínimo, que envuelve las puntas de las normales, debemos observar que el eje es perpendicular al plano de la circunferencia límite en la esfera, la intersección de las superficies cónica y esférica.

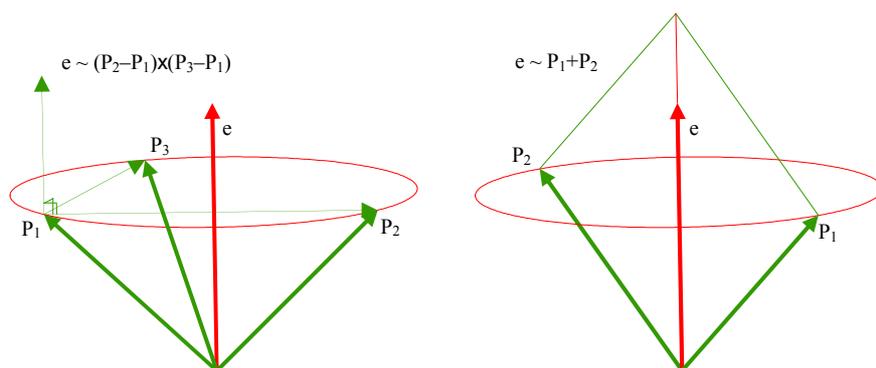


Figura 8: Circunferencia por dos o tres extremos de vectores.

Debido a que solo nos interesa la dirección del eje, cuando está definida por dos normales se puede calcular como la dirección de la suma y cuando está definido por tres como la del producto vectorial de las diferencias. El radio lo medimos como el coseno del ángulo, el producto escalar de versores normales con el eje. En el algoritmo, para saber si un punto está fuera verificamos si el producto escalar con el eje es menor que el “radio”.

En cada caso, el resultado es una dirección sin sentido definido. En el producto vectorial es obvio por la arbitrariedad del orden; en la suma (o en el producto) puede que un resultado temporario apunte hacia el lado equivocado. La elección de uno de los dos sentidos opuestos es uno de los problemas que han resultado más difíciles de resolver.

El problema de la mínima circunferencia en el plano tiene algunas diferencias de fondo con el caso esférico, y eso es debido a que la métrica en el plano es convexa y en la esfera completa no (ver [Zurcher07](#)). La tesis citada exige que el problema se reduzca a un hemisferio preestablecido. Nosotros encontramos, en primer lugar, que es muy difícil predefinir un

⁷ La demostración de que el costo asintótico en tiempo es lineal se basa en la aleatoriedad de la inserción y la probabilidad de que un punto caiga dentro de la esfera actual. El tiempo es “lineal esperado” (*expected linear*).

hemisferio pero también encontramos que basta con eliminar un solo punto de la esfera para recuperar la métrica convexa⁸. Cada circunferencia (no necesariamente máxima) en la esfera define dos casquetes, se pueden diferenciar por la inclusión/exclusión de un punto dado. Elegimos siempre la solución temporaria que excluye el punto opuesto a la normal promedio.

En este caso, a diferencia de la mínima esfera, el algoritmo tiene un punto más de terminación, cuando el radio-coseno es menor o igual que cero. Tal caso indica que el conjunto de normales ocupa más de un hemisferio y por lo tanto no existe el kernel.

4.3 Determinación del centro de la máxima esfera inscrita en el kernel euclídeo

Para el caso del kernel euclídeo (2D plano o 3D sólido) para los problemas de suavizado, el problema no es más sencillo que en la esfera, es mas complejo. La generalización obvia sería (2D): la circunferencia maximal está “atrapada” por dos o tres rectas tangentes, empezamos con dos y agregamos el resto de a una; cuando alguna corta la circunferencia, el algoritmo recurre con esta última agregada al conjunto de tangentes necesarias. Sin embargo, si bien existe una circunferencia definida por dos puntos (la que tiene esos puntos diametrales), no existe la circunferencia tangente a dos rectas. Es más: si hay dos limitantes paralelas, la solución no es única.

En vista de esos problemas, la primera solución que adoptamos consistió en utilizar, para el plano, el mismo algoritmo de la esfera: Centrado con el Bounding-Box (BB) del polígono, pero alejado del plano (distancia mucho mayor que la diagonal del BB) ponemos un centro que, unido con las aristas, define las pseudo-caras 3D del mismo problema que antes. Calculamos las normales, el mínimo cono envolvente y la intersección del eje con el plano de la figura que es el “centro” de una elipse casi circular (muy poco excéntrica) que se produce cuando el cono complementario del maximal intersecta al plano del polígono.

Se puede diseñar un algoritmo basado siempre en tres tangencias (cuatro para la esfera). Pero subsiste el problema del paralelismo: Si hay dos lados paralelos definiendo la circunferencia máxima, la misma puede estar centrada en cualquier lugar de la línea intermedia, entre un límite lateral y el opuesto. Si perturbamos una de las paralelas (un nodo), la circunferencia se apoyará contra alguno de los dos extremos laterales, aún cuando la intuición indica que habría que centrarla entre ambos límites. En el caso de la esfera, dos líneas del kernel no pueden ser paralelas, son arcos maximales; y si atrapan una circunferencia, la atrapan centrada (como en el ejemplo anterior).

Si obviamos el paralelismo, un algoritmo que resuelve el problema sin aumentar una dimensión, puede esbozarse así: Comienza con la esfera atrapada por un símplice virtual que envuelve al problema. Los semiespacios definidos por las caras del poliedro, se agregan de a uno. Cuando el agregado corta la esfera temporaria, éste debe reemplazar uno de los virtuales del conjunto necesario. El algoritmo termina cuando en el conjunto de necesarios, ya no hay ninguno virtual.

Uno de los problemas es el predicado: “el semiespacio corta la esfera”. Obviamente se trata del plano límite del semiespacio, pero puede que no corte a la esfera y esta quede totalmente incluida en el semiespacio opuesto. En dicho caso no hay kernel. El “corte” se define mediante la medida de la distancia con signo, desde el centro al plano. Si la distancia es positiva y menor que el radio, el plano corta (efectivamente) a la esfera, pero si es menor o igual que cero, es que no hay kernel.

El otro problema es el de cual semiespacio virtual reemplazar. La solución la da la estabilidad estática: Para “atrapar” la esfera debe haber una suma nula de fuerzas. Ninguno de

⁸ La proyección polar mapea un polo en el infinito, ese punto se excluye y el problema queda bien planteado.

los cuatro planos que atrapan la esfera está demás, si falta uno la esfera se escapa. Un simple análisis gráfico (o pensando en coordenadas baricéntricas) muestra que la captura se produce cuando los versores normales a los planos forman un símplice que contiene al origen: sólo en ese caso, una suma con pesos positivos puede dar cero.

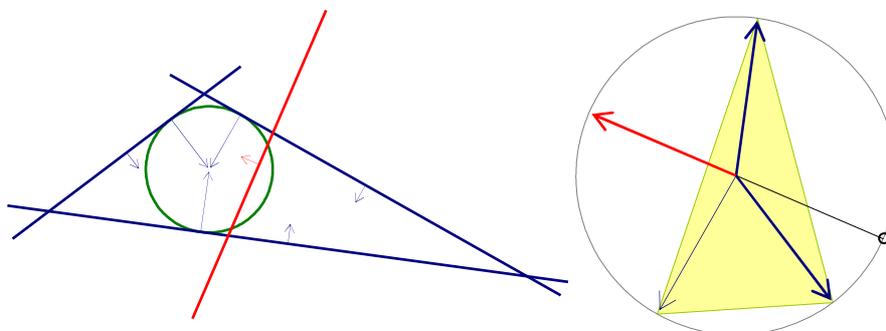


Figura 9: Atrape de la esfera y selección del semiplano a reemplazar

Este problema en 2D y sin posiciones “complicadas” puede verse en la Figura 9. ¿Que vector hay que reemplazar con el nuevo? Si la suma debe dar nula con pesos positivos, el nuevo es opuesto a la suma de dos viejos con pesos positivos. El opuesto al nuevo puede definirse como suma, con pesos positivos, de los dos vectores viejos que definen el arco al cual apunta. En 3D es equivalente: quedan los tres versores del triángulo esférico al cual apunta el opuesto al nuevo vector normal.

Ahora bien, más allá de la interpretación gráfica, algorítmicamente es más sencillo buscar la dupla (o terna) con base en la cual, el nuevo versor, tiene componentes afines negativas.

5 CONCLUSIONES

La principal conclusión es que si bien los algoritmos se basan en el kernel, en ningún caso se debió determinar el mismo, sino un punto “central” del mismo. No fue necesario identificar ni los vértices (intersecciones) ni la estructura conectiva (facetas) del kernel, ni en 2D ni en 3D. Los algoritmos y técnicas descritas sirven tanto para el plano como para superficies y sólidos 3D.

La mayor deuda pendiente es la de encontrar un algoritmo que permita identificar el punto “solidario” para el suavizado de mallas: el que maximice la mínima altura de los triángulos o tetraedros, pero desde el punto móvil a las caras y desde los vértices fijos a las caras adyacentes al punto móvil.

REFERENCIAS

- Angel, E. *Interactive Computer Graphics*. Fourth Edition. Pearson - Addison-Wesley, 2006.
- Aubry, R. and Lohner, R. *On the “most normal” normal*. Communications in Numerical Methods in Engineering. 24 (12): 1641 - 1652, 2007.
- Calvo, N. e Idelsohn, H. *All-hexahedral mesh smoothing with a normalized Jacobian metric combining gradient driven and simulated annealing*. Mecánica Computacional, Volumen Especial MECOM 99. 1999.
- Calvo, N. Idelsohn, S.R. and Oñate, E. *The extended Delaunay tessellation*. Engineering Computations: Int J for Computer-Aided Engineering, 20 (5-6): 583-600. 2003
- De Berg, M. Cheong, O. Van Kreveld, M. and Overmars, M. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. Springer-Verlag. Third Edition . 2008.

- Knupp, P. *Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities*, Parts I and II. Technical Report SAND 99-0709J, Sandia National Laboratories, 1999
- Lakatos, I., Worrall, J., and Zahar E. *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press, 1976
- Shewchuk, J.R. *What is a Good Linear Element? Interpolation, Conditioning, and Quality Measures*". Eleventh International Meshing Roundtable, 2002.
- Welzl E. *Smallest Enclosing Disks (Balls and Ellipsoids)*. H. Maurer, editor, New Results and New Trends in Computer Science, LNCS. Springer, 1991.
- Zürcher, S Smallest. *Enclosing Ball for a Point Set with Strictly Convex Level Sets*. Master Thesis. Advisor: Bernd Gärtner. Institute of Theoretical Computer Science. Department of Computer Science. ETH Zurich. March 7, 2007