

## RETRIANGULACION LOCAL PARA ELIMINACION DE SLIVERS

Walter Sotil<sup>a</sup> y Nestor Calvo<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Cátedra de Computación Gráfica - Ingeniería en Informática - FICH - UNL*

<sup>b</sup>*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería CIMEC - CONICET*

**Palabras clave:** sliver, remeshing, Delaunay.

**Resumen.** En este trabajo se presentan algunas técnicas para la remoción de slivers.

Es sabido que la generación de mallas tridimensionales de una nube de puntos fija por el método de Delaunay produce mallas con una gran cantidad de slivers. Estos son tetraedros de nodos bien espaciados, pero con dos diagonales opuestas muy cercanas entre sí. Se describen algunas técnicas para la remoción de dichos elementos malformados, consistentes en retriangulaciones locales. Extrayendo de la malla un conjunto conexo de tetraedros, sin ningún nodo en el interior, y reemplazándolo con un conjunto distinto de tetraedros, pero que posea la misma frontera, se puede obtener una malla localmente distinta y no Delaunay, pero de mejor calidad. Se exploran los algoritmos, alcances y limitaciones de estas técnicas.

## 1 INTRODUCCION

La generación de mallas de tetraedros para el Método de Elementos Finitos es una cuestión que ha sido muy estudiada y existen muchos algoritmos con mayor o menor velocidad y robustez. De entre ellos se destacan dos métodos: el método heurístico de avance frontal y la Triangulación Delaunay. El conjunto de algoritmos involucrados en la construcción de la malla hace que la triangulación Delaunay sea mucho más rápida, pero presenta algunos problemas en mallas tridimensionales.

El error de la aproximación en el Método de Elementos Finitos está en relación directa al tamaño y a la deformación de los elementos. En dos dimensiones, de todas las triangulaciones posibles de un conjunto dado de nodos, la Triangulación Delaunay maximiza el mínimo ángulo de los triángulos, pero eso no se generaliza a más dimensiones. En tres dimensiones, la presencia de tetraedros interiores aplastados a la manera de los slivers generan ángulos diedros tan pequeños que invalidan la malla.

La utilización inmediata de la malla tridimensional generada mediante la Triangulación Delaunay es inviable; en su lugar se recurre a algoritmos que extraen automáticamente los slivers mediante retriangulaciones locales o bien a extensiones que convierten algunos conjuntos de tetraedros en elementos poliédricos (Calvo, 2005) capturando los slivers.

## 2 OBJETIVOS Y METODOS

En este trabajo se presentan algunas técnicas para la remoción de slivers generados por la Triangulación Delaunay de una nube de puntos dados y fijos.

El objetivo es obtener finalmente una malla que, aunque no sea Delaunay, sea de mejor calidad. Para ello, por cada sliver, se extrae de la malla un conjunto conexo de tetraedros vecinos, sin ningún nodo en el interior y que incluya al sliver, para reemplazarlo con un conjunto distinto de tetraedros, pero que posea la misma frontera. De este modo, el resto de la malla no necesita retriangularse pues el conjunto extraído se conecta a la malla del mismo modo que el nuevo conjunto reinsertado.

Se analizan los algoritmos, alcances y restricciones de estas técnicas.

Algunos desarrollos se incorporaron exitosamente al generador de mallas Meshsuite desarrollado en el CIMEC y quedaron anexados como un utilitario adicional que se ofrece al usuario, a través del menú.

## 3 CONCEPTOS PRELIMINARES

### 3.1 Diagrama de Voronoï y Triangulación Delaunay

El Diagrama de Voronoï es una técnica de ordenamiento espacial muy utilizada debido a sus propiedades y múltiples aplicaciones.

En su forma más general consiste en dividir el espacio en celdas, una para cada objeto; de modo que cada celda contiene los puntos del espacio que están más cerca de su objeto que de cualquier otro. Las múltiples variantes se deben al tipo de objetos y a la forma de medir la distancia. En el caso de la generación de mallas, los objetos son los nodos dados o creados por el generador. A los puntos dato (fijos) los llamaremos siempre nodos, para diferenciarlos de los puntos comunes del espacio. Entonces, para este caso, todo el espacio se divide en celdas convexas, cada una es el conjunto de puntos más cercanos a su nodo que a otro.

En tres dimensiones, cuatro puntos definen una esfera, siempre que no sean coplanares ni haya tres colineales. Para simplificar, diremos que los nodos están en posición general si no

hay tres colineales, cuatro coplanares o cinco en la misma superficie esférica. En posición general, las facetas del diagrama de Voronoï separan dos celdas y equidistan de sus dos nodos. Forman parte de la mediatriz de los dos nodos, que es el plano que parte por la mitad y es perpendicular al segmento que los une. Las aristas equidistan de tres nodos, son parte la línea que atraviesa perpendicularmente y por el centro, a la circunferencia definida por esos tres nodos. Finalmente un vértice, equidistante de cuatro nodos, es el centro de la esfera que inscribe al tetraedro formado por los cuatro nodos. En la práctica la posición general no se cumple y así puede haber vértices que equidistan de más de cuatro nodos o aristas de más de tres. Si bien la posición general no se puede cumplir, asumiremos que no habrá nodos coincidentes.

El conjunto de tetraedros formados con los nodos que definen cada esfera forma la triangulación Delaunay. Podemos hablar de esfera o tetraedro y nos referimos a la misma conexión simplicial de cuatro nodos.

Se define el envoltorio convexo (convex-hull) de un conjunto de puntos (puntos aislados y/o conjuntos continuos) como la intersección de todos los semiespacios que contienen al conjunto. Es el menor convexo que contiene al conjunto, menor en el sentido de la inclusión.

Una triangulación de un conjunto de nodos (puntos aislados) es una partición de su envoltorio convexo en símplices (triángulos/tetraedros) cuyos vértices son los nodos.

Dado el conjunto de nodos, hay muchas triangulaciones posibles. La que se obtiene como dual del Diagrama de Voronoï se denomina Triangulación Delaunay. Cada vértice del diagrama es centro de la circunferencia que equidista de los nodos y define el tetraedro; se puede ver la relación de dualidad uno a uno entre los elementos del diagrama y los de la triangulación: aristas y caras, facetas y aristas y entre celdas y nodos.

Las esferas, definidas por cuatro nodos, tienen la propiedad de que ningún otro nodo está en su interior, por ello se suelen denominar esferas vacías o Delaunay o Voronoï. Si un nodo estuviese dentro, sería más cercano al centro que los cuatro nodos periféricos.

A grandes rasgos, el método de mallado consiste en agregar los nodos de a uno y en orden aleatorio a una triangulación preexistente, reconstruyendo localmente la triangulación con cada nodo agregado para mantener la triangulación Delaunay. Supóngase la triangulación ya comenzada y en un estado intermedio, con una cierta cantidad de esferas (o equivalentemente tetraedros) ya definidas. Al agregar un nodo nuevo hay que buscar el conjunto de esferas que lo contienen (entorno natural) y dejan de ser vacías, esas esferas deberán desaparecer y crearse nuevas esferas vacías definidas por el nuevo nodo y algunos nodos preexistentes.

Este proceso tiene como resultado la triangulación del envoltorio convexo de la malla. Pero normalmente se pretende una frontera distinta, cóncava y/o impuesta. El paso final del proceso consiste en recuperar la frontera supuesta (solo nodos) o impuesta (triángulos). Para la recuperación de la frontera supuesta, cuando el dato es una nube de puntos “supuestamente” cóncava, la técnica de elección es la de  $\alpha$ -shape: las esferas muy grandes se descartan. En el otro caso, cuando la geometría exterior viene impuesta mediante triángulos de frontera, hay que hacer un proceso de cambios llamados flips que recuperan caras y aristas que no aparecen en la triangulación Delaunay; luego los tetraedros externos se descartan.

### 3.2 Entorno Natural y Cavidad de un punto

Para un punto cualquiera del espacio, se llama entorno natural a la unión de las esferas de Voronoï que lo contienen (en el interior o la superficie), sus nodos son los vecinos naturales del punto.

La alternativa poliédrica del entorno natural es la cavidad de un punto. La cavidad es el

poliedro resultante de unir los tetraedros cuyas esferas contienen al punto.

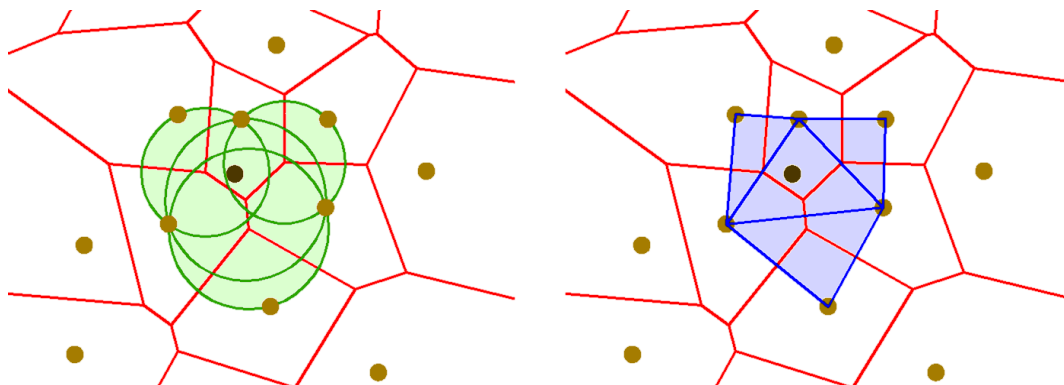


Figura 1: Izquierda: Entorno Natural de un punto. Derecha: Cavity de un punto.

Es importante observar que la cavidad no es necesariamente convexa, aunque punto ve todas las caras de frontera de la cavidad, ninguna cara de frontera oculta a otra. Alguna cara puede tener una visibilidad marginal, con un ángulo muy pequeño.

En el proceso de triangulación Delaunay, el punto es el nuevo nodo que se va a agregar. La cavidad se reemplaza por un conjunto de tetraedros formado por el nodo y las caras de frontera de la cavidad. Ese conjunto “calza justo” en la triangulación preexistente y no es necesario ningún paso más. Ninguna nueva esfera contiene a ningún nodo exterior a la cavidad previa.

Cuando el nodo nuevo es prácticamente coplanar con una cara de la cavidad (adyacente a una concavidad) formará un sliver con esa cara. Es decir que el problema se presenta cuando el punto pertenece a una esfera, cuyo tetraedro tiene una cara, con la cual el nodo es prácticamente coplanar, pero la esfera del tetraedro vecino por dicha cara no contiene al nodo. En ese caso, el nodo formará un sliver con la cara que ve casi de punta. Esto no puede suceder en dos dimensiones.

### 3.3 Slivers

La triangulación Delaunay, que es muy adecuada para el Método de Elementos Finitos en dos dimensiones, no es una buena triangulación en tres dimensiones y eso se debe casi exclusivamente a la presencia de tetraedros interiores aplastados a la manera de los slivers.

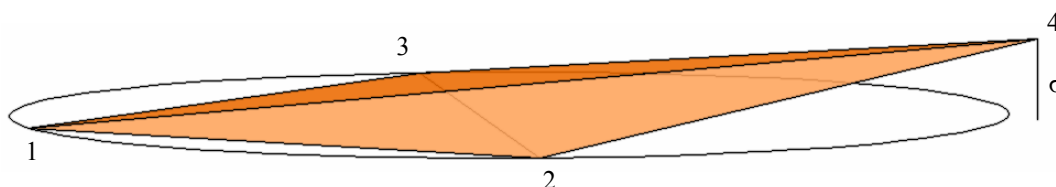


Figura 2: Sliver.

El sliver es un tetraedro aplastado de modo que dos aristas opuestas resultan muy próximas entre sí, su contorno mayor es un cuadrilátero bien proporcionado. Tiene mediatrices con poco ángulo y el centro puede estar cerca del tetraedro o bien extremadamente lejos. En la figura hay un sliver con nodos numerados  $\{1,2,3,4\}$ ; las aristas próximas son  $\{1,4\}$  y  $\{2,3\}$ , el nodo 4 está alejado del plano del triángulo  $\{1,2,3\}$  por una distancia  $\sigma$  muy pequeña. El volumen del sliver será del orden de  $\sigma h^2$ , donde  $h$  es la distancia típica entre nodos.

En una malla Delaunay, los slivers se forman siempre con cuatro nodos, que además de ser prácticamente coplanares, son casi cocirculares: Cada cuarto nodo está muy cerca de la circunferencia de los otros tres.

El sliver, puede aparecer tanto en el interior como en la frontera de la malla, su esfera puede ser de cualquier tamaño entre uno comparable a la distribución de nodos e infinito y puede estar ubicada hacia un lado o hacia el otro del plano medio de los cuatro nodos.

En el interior de la malla Delaunay, el sliver solo existirá cuando su esfera sea de tamaño comparable a la densidad de nodos, una esfera muy grande contendría más nodos en el interior y no podría existir. Los slivers de frontera, a diferencia de los interiores pueden tener su esfera muy grande siempre que el centro esté hacia el exterior, de modo que no contengan nodos en su interior.

Cuando un sliver de frontera tiene muy poco volumen, podría eliminarse de la malla sin alterar demasiado el dominio. El problema con los slivers de frontera surge cuando se pretende imponer una frontera de triángulos, normalmente porque se desea unir la malla resultante con otra; en ese caso, el sliver puede ser necesario pues aporta dos caras de frontera necesarias.

Lejos de ser una rareza, es muy común encontrar slivers en el interior de una malla Delaunay, aún con nodos bien distribuidos, y es la principal fuente de falta de robustez de los programas. Evitar la existencia de los slivers es de vital importancia y hay varias publicaciones sobre métodos para eliminarlos, obteniendo una triangulación “mejor” que Delaunay (George, 2003).

Para comprender la formación de un sliver interior supóngase que el tetraedro  $\{1,2,3,4\}$  de la figura anterior se va a formar en el interior de la malla. En el proceso de triangulación ya existen dos tetraedros  $\{1,2,3,5\}$  y  $\{1,3,2,6\}$ , con los nodos 5 y 6, uno a cada lado del triángulo  $\{1,2,3\}$ . Si ambas esferas contienen al nuevo nodo 4 o ninguna lo contiene,  $\{1,2,3\}$  no será una cara de la cavidad y por lo tanto no se formará el sliver. Solamente si una esfera lo contiene y la otra no, el sliver puede formarse.

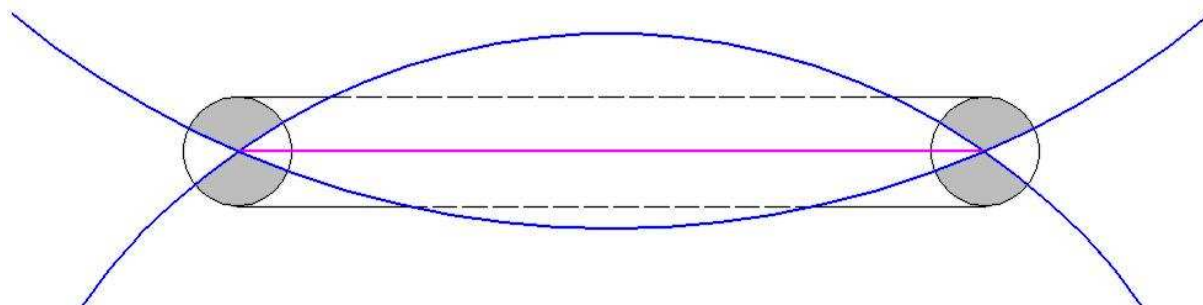


Figura 3: Zona de formación de sliver.

En la figura se dibujó horizontal la circunferencia de  $\{1,2,3\}$ , vista de costado y en color magenta. También se muestra, en azul, un corte de las esferas que forma con los nodos extra 5 y 6 (que no se muestran en la figura). El tetraedro  $\{1,2,3,4\}$  se formará si el nodo 4 está en una esfera y no en la otra. Si está lejos de la circunferencia no será un sliver, será un tetraedro normal; de modo que solo se puede formar un sliver si nodo 4 está en la zona gris del toroide de radio  $\sigma$  que rodea la circunferencia, prácticamente cocircular con los nodos 1, 2 y 3 y ligeramente alejado de su plano.

### 3.4 Flips

Se ha dado en denominar flip a una alteración local de la malla (George, 2003) que consiste en tomar un conjunto de tetraedros que forman un poliedro sin nodos interiores y alterar la triangulación del poliedro. Cambian las caras y aristas interiores, pero no las de frontera.

Al realizar operaciones como ésta, la malla deja de ser Delaunay.

El proceso de flipping general en tres dimensiones puede ser utilizado para remover una arista o una cara de una malla, y para forzar la aparición de una arista o cara necesaria, consecuentemente puede servir para eliminar un sliver.

Un elemento se considera válido si está orientado en forma coherente con el resto de los elementos de la malla (volumen positivo) y está bien conectado al resto: dos elementos comparten una cara o una arista o un nodo o nada. En el proceso general se pretende que, partiendo de una malla válida, se obtengan elementos válidos al realizar los flips.

### 3.5 Flips 2-3 y 3-2

El flip 2-3 considera dos tetraedros que comparten una cara y los reemplaza por tres tetraedros que comparten una nueva arista, cuyos puntos extremos están opuestos a la cara común que desaparece.

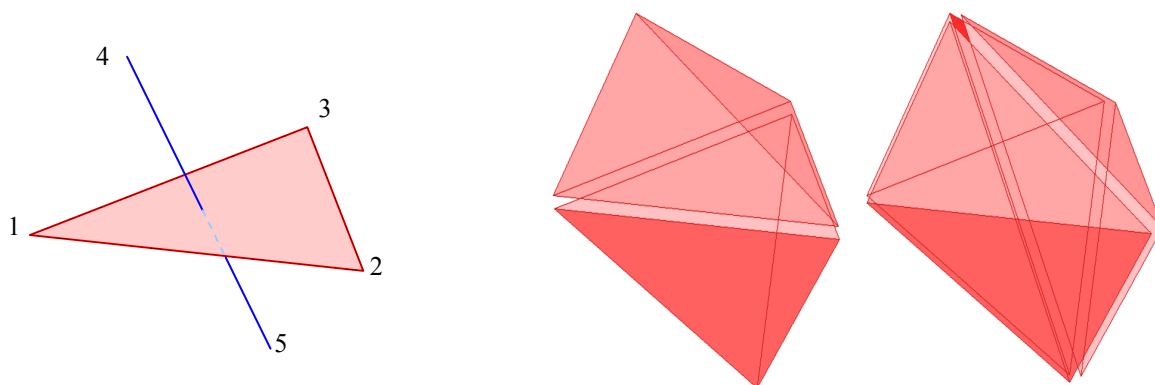


Figura 4: Flip 2-3 Izquierda: la arista  $\{4,5\}$  intercepta al triángulo que corresponde a la cara común  $\{1,2,3\}$ . Centro: dos tetraedros compartiendo una cara. Derecha: tres tetraedros compartiendo una arista luego del flip.

Consideremos en la figura el poliedro compuesto por los dos tetraedros  $\{1,2,3,4\}$  y  $\{1,3,2,5\}$  que comparten la cara  $\{1,2,3\}$ , si este poliedro es convexo (si  $\{4,5\}$  intercepta a  $\{1,2,3\}$ ) entonces existe una configuración de tetraedros alternativa y con la misma frontera, pero compuesta de tres tetraedros:  $\{1,2,5,4\}$ ,  $\{2,3,5,4\}$  y  $\{3,1,5,4\}$ , compartiendo la arista común  $\{5,4\}$ . Se reemplaza la cara interna  $\{1,2,3\}$  por la arista interna  $\{4,5\}$  sin modificar la frontera.

Si la configuración de partida es válida, los puntos 4 y 5 están uno a cada lado del plano  $\{1,2,3\}$ , formando con él dos tetraedros de volumen positivo. Pero puede suceder que el segmento  $\{4,5\}$  no intercepte al interior ni la frontera del triángulo. En tal caso la triangulación alternativa, resultante del flip, no será válida. Si el punto de intersección del segmento con el plano del triángulo define alguna coordenada baricéntrica negativa, el tetraedro formado con la arista opuesta al vértice con coordenada negativa será inválido.

El flip 3-2 reemplaza los tres tetraedros que compartían una arista por dos tetraedros que comparten una cara. Es el inverso al flip 2-3.

En una configuración de partida válida de tres tetraedros para el flip 3-2, siguiendo la figura anterior, la intersección de la recta  $\{4,5\}$  y el plano del triángulo está dentro del triángulo.

Pero puede suceder que los puntos 4 y 5 estén ambos del mismo lado del plano del triángulo, con lo cual el flip 2-3 produciría un tetraedro inválido.

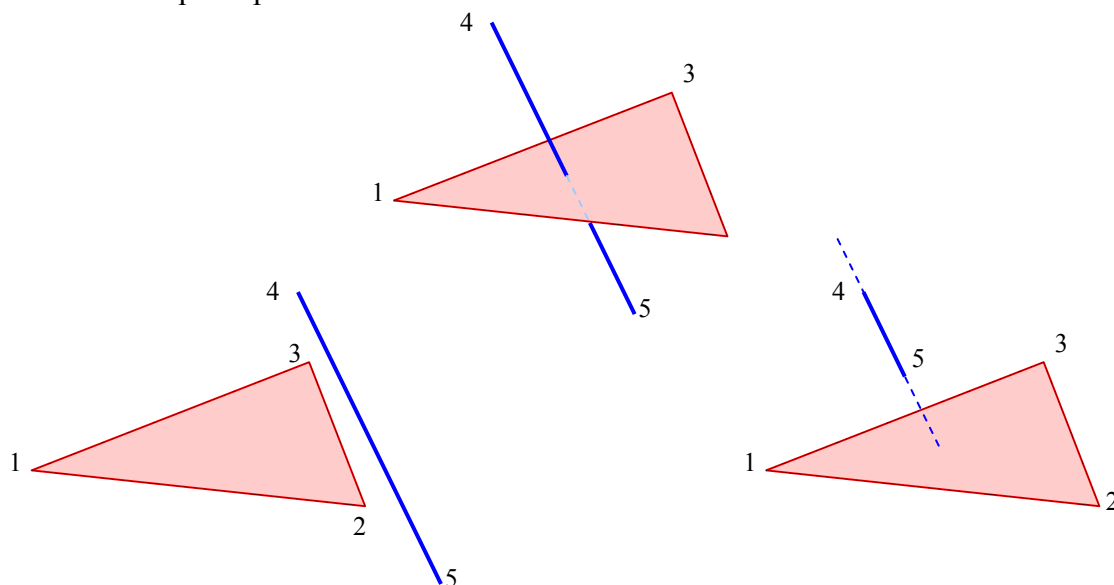


Figura 5: Arriba-Centro: Configuración válida para 2 o 3 tetraedros.  
Abajo-Izquierda: Válida para 2 e Inválida para 3. Abajo-Derecha: Inválida para 2 y Válida para 3.

### 3.6 Flip 4-4

El flip 4-4 reemplaza cuatro tetraedros que compartían una arista por otros cuatro tetraedros que comparten una distinta. Se puede visualizar como un cambio de diagonal interna en un octaedro regular; en la figura: la diagonal  $\{5,6\}$ , común a  $\{1,2,6,5\}$ ,  $\{2,3,6,5\}$ ,  $\{3,4,6,5\}$  y  $\{4,1,6,5\}$ , se cambió por la diagonal  $\{2,4\}$ , común a los nuevos tetraedros  $\{1,5,2,4\}$ ,  $\{5,3,2,4\}$ ,  $\{3,6,2,4\}$  y  $\{6,1,2,4\}$ .

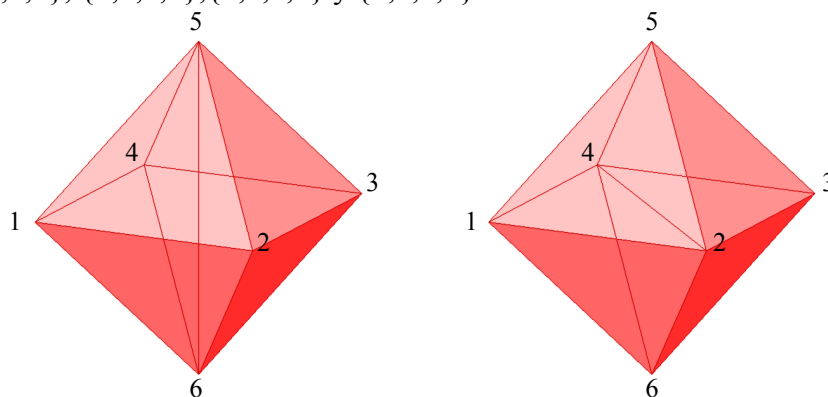


Figura 6: Flip 4-4.

El octaedro regular tiene tres diagonales posibles (la  $\{1,3\}$  era otra opción); pero en la práctica los nodos tienen una disposición más caprichosa que sólo está condicionada por la validez de la configuración de partida: Los cuatro tetraedros originales se presuponen válidos (a lo sumo algunos eran slivers). Imaginar todas las posibilidades de configuración de los nodos resulta difícil. De todos modos cualquier test geométrico de orientación en 3D se basa en el cálculo del volumen de un tetraedro. Aquí, el análisis es simple: si el resultado es de mejor calidad se utiliza, en caso contrario se prueba el otro y si tampoco es válido, el

problema dado no tenía (esta) solución.

Es posible considerar al flip 4-4 como una combinación de flips 2-3 y 3-2, es más o menos sencillo imaginarlo, pero es inútil, pues un resultado válido se puede obtener combinando resultados parciales inválidos: En el octaedro regular, el flip de la figura se puede reemplazar así: Se hace primero un flip 2-3 sobre  $\{1,2,6,5\}$  y  $\{4,1,6,5\}$  y luego uno 3-2 sobre  $\{2,3,6,5\}$ ,  $\{3,4,6,5\}$  y el recién formado (sliver de volumen nulo)  $\{2,5,6,4\}$ . Si el nodo 2 estuviese un poco más cerca del 3, el resultado válido se habría obtenido con un intermediario inválido, pues el sliver formado tendría volumen negativo. En resumen: Si bien se podría resolver todo con flips 2-3 y 3-2, habría que permitir inversiones en estadios intermedios, por lo tanto conviene programar el flip 4-4.

### 3.7 Flips más complejos

Se puede considerar así a cualquier otro caso en el que se parte de la unión de varios tetraedros, sin nodos en el interior, para alterar la triangulación de modo que la 1) frontera del poliedro permanezca igual, 2) los nuevos tetraedros sean válidos y 3) que las nuevas vecindades sean validas (dos tetraedros no pueden compartir dos caras). La necesidad o no de programar estos flips se debe analizar en cada caso, de acuerdo a la intención. En el trabajo de George, para recuperar aristas o caras, se argumenta su posible reducción a casos simples. En nuestro caso, para eliminar slivers, no resultó necesario, por los motivos que se explican en 4.4.3 más adelante.

### 3.8 Validez de las conectividades

Cabe analizar lo que sucede cuando los flips son geoméricamente posibles, dando una configuración válida como resultado, pero presentando una conectividad inválida con el resto de la malla. Esto es: si el resultado contiene dos tetraedros compartiendo dos caras, uno de ellos en el poliedro, producido por el flip y el otro exterior, en la malla que lo rodea.

Siendo que hay un elemento exterior válido, pero compartiendo dos caras del poliedro, el diedro debe ser menor o igual que un llano, visto desde el exterior. Si es menor, la condición de validez geométrica coincide con la conectiva, pues no puede haber, como resultado del flip, un tetraedro con un diedro mayor que un llano.

El caso en que el par de caras forma un diedro exactamente llano, se trata de un sliver que comparte dos caras con el poliedro. En tal caso, hay que prever que no se forme un sliver interior entre ambas caras, como resultado del flip.

## 4 PASOS DEL PROCEDIMIENTO

A continuación se analizan algunas técnicas para la remoción de slivers generados por la Triangulación Delaunay de una nube de puntos. Se obtiene finalmente una malla que, aunque no es Delaunay, posee mejor calidad.

### 4.1 Unas notas acerca de los caps

Hay varios tipos (y nombres) de tetraedros deformados. La gran mayoría son deformes porque hay nodos muy cerca conectados (formando tetraedros) con nodos más alejados. Estas malas distribuciones de puntos pueden tener distintas causas, pero para la triangulación los nodos están dados, de modo que no hay ninguna solución.

Este proceso genera una triangulación del envoltorio convexo. La recuperación de la frontera también es un tema importante pero que no se trata aquí. Aquí sólo se debe procurar



que la triangulación dada tenga la mejor calidad en términos de los requerimientos del Método de Elementos Finitos.

Los caps son también tetraedros deformados, al igual que los slivers tienen nodos bien espaciados, pero uno de ellos está muy cerca de la cara opuesta. Su circunferencia es muy grande, se puede visualizar conformada por un nodo cercano al plano de la circunferencia de la cara opuesta. En la triangulación Delaunay, la esfera no contiene otros nodos; una esfera grande solo puede existir si se abre hacia fuera del dominio. Es decir que, en este caso, hay un nodo muy cerca de una cara de frontera. Ese problema tampoco es de la triangulación, ese nodo fue mal ubicado o bien ese tetraedro no debería formar parte del dominio, no se identificó la concavidad en forma correcta.

En resumen, los únicos elementos deformes, causados por ineficacia de la triangulación Delaunay en 3D, son los slivers.

## 4.2 Detección de Slivers

Una vez concluido el proceso de generación de la malla Delaunay, se continúa con la detección de los slivers, para eliminarlos en una etapa posterior.

Se recorren todos los tetraedros de la malla y se marcan los slivers. Para ello, se aprovechan sus principales características, tales como el hecho de ser tetraedros aplastados, con dos aristas opuestas muy próximas y los cuatro nodos aproximadamente cocirculares. Identificados tres nodos de un tetraedro, se verifica si el cuarto se encuentra dentro de un toroide cuyo radio mayor es el de la circunferencia del triángulo y su radio menor es una tolerancia ( $\sigma$ ) impuesta. Si se cumple esta condición el elemento se considera sliver.

Además de marcar el sliver, se reordenan sus nodos para un posterior tratamiento, de modo que el mayor ángulo diedro corresponda a la arista  $\{0,2\}$ ; la arista opuesta  $\{1,3\}$  tendrá el otro diedro obtuso.

## 4.3 Eliminación de Slivers de frontera

Con todos los slivers detectados, el siguiente paso es remover los slivers de frontera.

Si no hay una triangulación impuesta para la frontera, se eliminan directamente, sin recurrir ningún flip, debido a que su remoción no produce variación significativa en el volumen de la malla. Si sus (dos) triángulos de frontera son necesarios, la única solución es tratarlos como internos y usar flips.

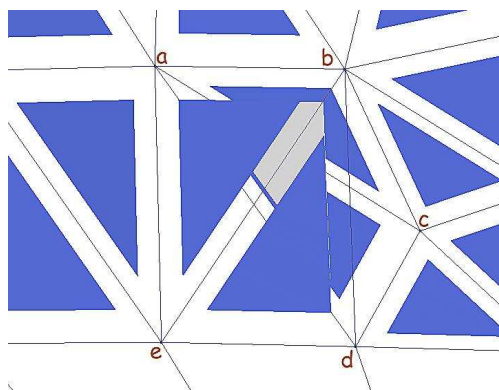


Figura 7: Eliminación errónea de slivers superpuestos: formación de un bolsillo.

Los slivers se forman a partir de cuatro nodos aproximadamente cocirculares; pero si hay más de cuatro, como se muestra en la figura, habrá slivers superpuestos que requieren especial

atención. Para su eliminación se verifica que el sliver tenga exactamente dos caras en la frontera.

En la figura se aprecia el error de haber eliminado un sliver  $\{c,b,a,d\}$  con una sola cara  $\{c,b,d\}$  en la frontera.

Puede suceder que haya tres o más slivers de frontera, cada uno apoyado sobre el siguiente, en orden circular; todos con una sola cara de frontera. Ese caso no se detecta, pero todos los slivers con una sola cara de frontera son tratados como interiores y es posible que el proceso de flipping posterior solucione el problema. También puede suceder que no lo pueda solucionar y los slivers quedarán.

La figura puede sugerir falsamente que ese problema se produce en las fronteras planas. En ese caso, todos los slivers de frontera podrían eliminarse sin ningún problema. En general, el mayor peligro surge cuando la superficie presenta pequeñas curvaturas (superficies orgánicas); en una ronda de slivers apoyados entre sí, algunos pueden tener una altura justo por encima y otros justo por debajo de la tolerancia ( $\sigma$ ) impuesta (cualquier valor que se elija) y en ese caso algunos serían eliminados y otros no, dejando “bolsillos” como el que se muestra en la figura.

#### 4.4 Eliminación de Slivers interiores

En esta etapa se eliminan los slivers interiores (los que no tienen dos caras en la frontera) mediante la aplicación de distintos flips.

Se extrae, por cada sliver de la malla, un conjunto conexo de tetraedros vecinos, sin ningún nodo en el interior y que incluya al sliver, para reemplazarlo con un conjunto distinto de tetraedros, pero que posea la misma frontera. Para cada conjunto conexo de tetraedros se emplean distintos tipos de flips, con la finalidad de remover el sliver contenido en dicho conjunto. Con este mecanismo, el resto de la malla no necesita retriangularse debido a que el conjunto extraído se conecta a la malla del mismo modo que el nuevo conjunto reinsertado.

Se analizan primero los elementos que comparten la arista  $\{0,2\}$ , el máximo diedro. Muy probablemente, haya un sólo nodo coesférico con los cuatro cocirculares del sliver, ese nodo forma dos tetraedros con las caras del sliver que comparten la arista y por lo tanto se intenta resolver con un flip 3-2. Puede que el flip no pueda realizarse o puede que haya más de dos tetraedros vecinos: si hay más de un nodo coesférico habrá más de dos tetraedros (más de tres alrededor de la arista). Si el flip 3-2 no puede hacerse por la arista  $\{0,2\}$ , se intenta por el otro lado, por la arista  $\{1,3\}$ . Si tampoco se puede se intentan flips 4-4, primero por la arista  $\{0,2\}$ , con dos diagonales posibles y luego por la  $\{1,3\}$  con otras dos.

##### 4.4.1 Análisis del flip 3-2 para eliminar slivers

En una primera etapa, se toma cada sliver detectado anteriormente y se intenta un flip 3-2. Para ello se buscan los elementos vecinos que comparten la arista de mayor ángulo diedro y sólo se continúa con éste análisis si posee tres elementos que la comparten.

En la figura se puede observar el poliedro compuesto por los tres tetraedros y la arista común  $\{0,2\}$  indicada mediante un cilindro. Para mayor claridad, la figura solo muestra, de cada tetraedro, las dos caras que comparten la arista común. En la base del poliedro se encuentra el sliver  $\{0,1,2,3\}$  que se desea remover y en la cima está el nodo 4, coesférico con los del sliver. Luego de realizar el flip 3-2, se obtienen dos tetraedros  $\{0,1,3,4\}$  y  $\{3,1,2,4\}$  que comparten la cara  $\{3,1,4\}$  y se aprecia que el sliver ha desaparecido.

La validez geométrica está garantizada pues el segmento  $\{0,2\}$  no puede estar a un lado del triángulo  $\{3,1,4\}$ ; en tal caso el elemento  $\{0,1,2,3\}$  no sería un sliver pues no puede formarse con un “cuadrilátero” cóncavo, los nodos deben ser cocirculares.

En cuanto a la validez conectiva del procedimiento, debe analizarse si hay algún nuevo tetraedro compartiendo dos caras con un vecino externo. Tal situación se daría, por ejemplo, si hay un único vecino por las caras  $\{0,1,4\}$  y  $\{3,0,4\}$  correspondientes al nuevo tetraedro  $\{3,0,1,4\}$ . Para que eso suceda el diedro que forman en la arista  $\{0,4\}$  debería ser llano. Si el punto 4 está por encima del plano del sliver eso es imposible por la misma razón que antes: la base es un sliver, el nodo 0 no puede estar en el plano de  $\{3,1,4\}$ . Lo que sí puede suceder es que el nodo 4 esté prácticamente en el plano del sliver, y cocircular con el resto de los nodos: una ronda de slivers. En resumen, es necesario analizar si alguna de las aristas  $\{0,4\}$  y  $\{2,4\}$  posee un único vecino exterior; en tal caso éste flip no se realiza.

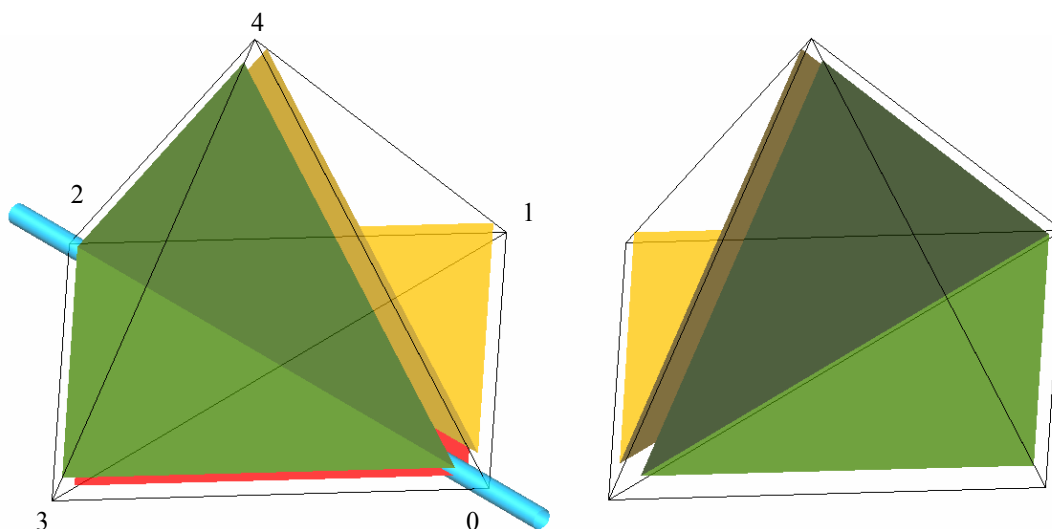


Figura 8: Eliminación de Slivers mediante flip 3-2. Izquierda: presencia de sliver en la base del poliedro de 6 caras. Derecha: resultado del flip.

Si el sliver no se pudo remover mediante este flip inicial, en una segunda etapa se intenta el flip 3-2 con la arista opuesta  $\{1,3\}$ , que también tiene un diedro obtuso y se repite el proceso anterior.

#### 4.4.2 Análisis del flip 4-4 para eliminar slivers

Si luego de los dos pasos anteriores aún permanece el sliver, se continúa el proceso con la aplicación del flip 4-4.

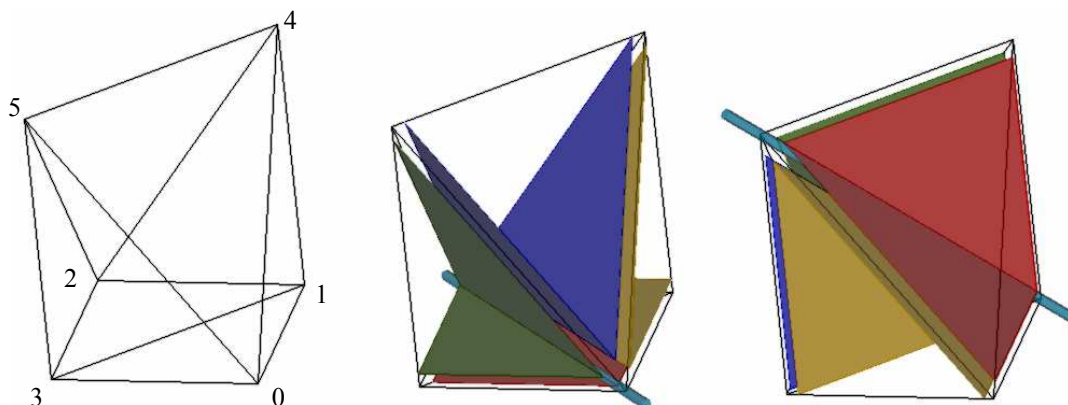


Figura 9: Eliminación de Slivers mediante flip 4-4. Centro: presencia de sliver en la base del poliedro de 8 caras. Derecha: resultado del flip.

Se buscan los elementos vecinos que comparten la arista de mayor ángulo diedro y solo se continúa con el análisis para esta arista si contiene cuatro elementos que la comparten.

Consideremos el octaedro de la figura anterior, compuesto por los cuatro tetraedros  $\{3,0,2,5\}$ ,  $\{0,1,2,4\}$ ,  $\{0,4,2,5\}$  y el sliver  $\{3,0,1,2\}$  compartiendo la arista común  $\{0,2\}$ , tal como se muestra en el centro de la figura. Mediante el flip 4-4, se cambia la diagonal interna  $\{0,2\}$  por otra, puede ser la  $\{1,5\}$ , que se muestra en la figura o la  $\{3,4\}$ . En cualquier caso se obtienen cuatro nuevos tetraedros. En la figura se muestra, a la derecha, el resultado de utilizar la arista  $\{1,5\}$  formando los nuevos tetraedros  $\{3,0,1,5\}$ ,  $\{3,1,2,5\}$ ,  $\{5,0,1,4\}$  y  $\{5,1,2,4\}$ . Como se puede apreciar, el sliver ha desaparecido.

A diferencia del caso anterior, aquí la validez geométrica no está garantizada. Analizando la figura, el nodo 5, por ejemplo, se puede mover perpendicularmente al plano  $\{0,1,4\}$  hasta atravesarlo (¡y mucho!) sin alterar la validez de la configuración inicial, pero invalidando el resultado, pues el tetraedro nuevo  $\{5,0,1,4\}$  quedaría invertido.

Además, y al igual que en el caso 3-2, debe analizarse que no haya dos elementos (uno nuevo y uno exterior) compartiendo dos caras.

En resumen, este caso requiere de mayor precaución y más análisis: debe verificarse que no se forma un elemento invertido y que no hay errores conectivos.

En el ejemplo analizado del movimiento del nodo 5, si no atraviesa el plano pero se aproxima demasiado, se puede formar un nuevo sliver; con lo que el resultado ha sido cambiar un sliver por otro. Tal resultado se admite, pues es muy posible que el nuevo sliver formado sí pueda ser corregido luego mediante un flip 3-2. Si el sliver original fue sometido a este flip es porque el flip 3-2 no se pudo realizar sobre él, cambiándolo por otro aumentan muchísimo las probabilidades de resolver el problema.

Si el sliver no se pudo remover (o cambiar por otro) mediante el flip 4-4 inicial, se intenta el flip 4-4 con la otra diagonal posible  $\{3,4\}$  y se repite el proceso anterior. Si eso no resulta se intenta por el otro lado, con la arista  $\{1,3\}$ .

### 4.4.3 Otros flips

En nuestro desarrollo, sólo se implementaron las seis posibilidades que otorgan los flips elementales 3-2 y 4-4; debido a ello no es posible eliminar todos los slivers que en teoría pudiesen aparecer. La posibilidad de encontrar dichas configuraciones especiales de nodos, en la práctica, es ínfima. En los procesos normales, tener más de tres nodos cocirculares es estándar, dado que es muy común que la nube de puntos a triangular, tenga regularidad cúbica en el interior o, al menos, en la frontera; esto está totalmente contraindicado para utilizar el método de Delaunay, pero es muy común encontrarlo. Aún así, en estos casos sería muy extraño encontrar más de cuatro nodos cocirculares.

La aparición de cinco o seis nodos cocirculares es una casualidad factible y que se ha presenciado, pero siempre en la frontera de un dominio con pequeñas sinuosidades, donde las rondas resultantes de slivers terminan siendo eliminadas sin mayores dificultades.

Lo que sí puede suceder (y sucede) en los arreglos cúbicos es la existencia de ocho puntos coesféricos, con varios grupos de cuatro cocirculares: las caras y los planos diagonales del cubo. Así, pueden aparecer divisiones del cubo que presenten cinco o seis tetraedros compartiendo una arista: Los que se muestran en la figura comparten la arista diagonal de la cara inferior, en el primer caso, con cinco tetraedros hay sólo un sliver en la cara inferior, en el segundo hay además un sliver diagonal. En el caso con seis tetraedros, el sliver central se resuelve con un flip 3-2 y se reduce al de cinco, La aparición de dos configuraciones de cinco tetraedros, una a cada lado del sliver de la cara, nunca ha sido vista en la práctica, pero bien

puede suceder. Muy probablemente, nunca ha aparecido por el mecanismo de perturbación de las posiciones nodales empleados durante la construcción de la cavidad.

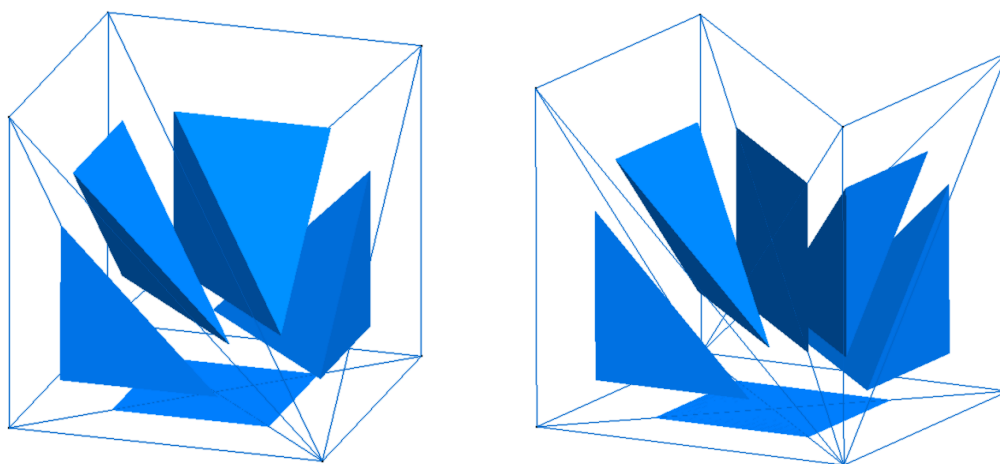


Figura 10: Array cúbico presentando cinco y seis tetraedros compartiendo una arista.

Dijimos que un elemento se considera válido si tiene volumen positivo. En nuestro caso, partimos de una malla que contiene slivers de volumen prácticamente nulo o nulo o aún, por errores numéricos, pueden ser ligeramente negativos. Debido a la incerteza de los métodos empleados, hay situaciones en que un sliver no puede eliminarse a menos que se admita un flip que lo elimine pero que produzca otro sliver. Por esta razón admitiremos como válidos a los slivers que tengan un volumen mayor que  $-\epsilon h^2$  ( $\epsilon \ll \sigma$ ), es decir que se admite un volumen ligeramente negativo “en un sliver” (no en otro tipo de tetraedros). Con éste criterio sí se logra que todos los slivers de la malla desaparezcan, salvo casos extremadamente raros, producidos a propósito pero nunca encontrados en la práctica.

## 5 RESULTADOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos luego de la aplicación de éstas técnicas para la remoción de slivers.

El primer ejemplo consiste en un cilindro cuya frontera presenta triángulos muy alargados en la dirección axial. Es un caso en el que la formación de bolsillos periféricos es una fuerte posibilidad, debido a la curvatura que hace que haya algunos tetraedros justo por encima y otros justo por debajo del límite admitido. El criterio de cocircularidad en la detección de slivers ha logrado aquí evitar el problema. Los pocos slivers presentes han sido removidos con éxito.

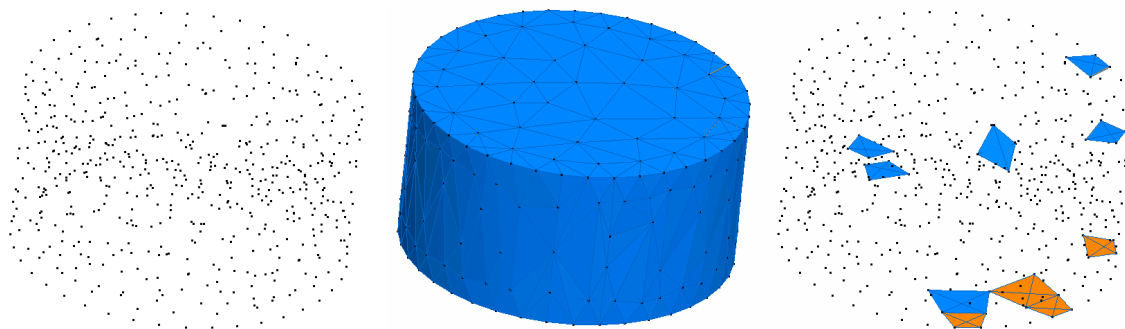


Figura 11: Triangulación de una nube de 264 puntos.

Los dos ejemplos que siguen corresponden a formas orgánicas, el primer caso es una garra de dinosaurio y el segundo al circuito izquierdo del corazón humano. Estos problemas presentan las peligrosas sinuosidades leves que caracterizan la formación de ciclos o rondas de slivers apoyados mutuamente.

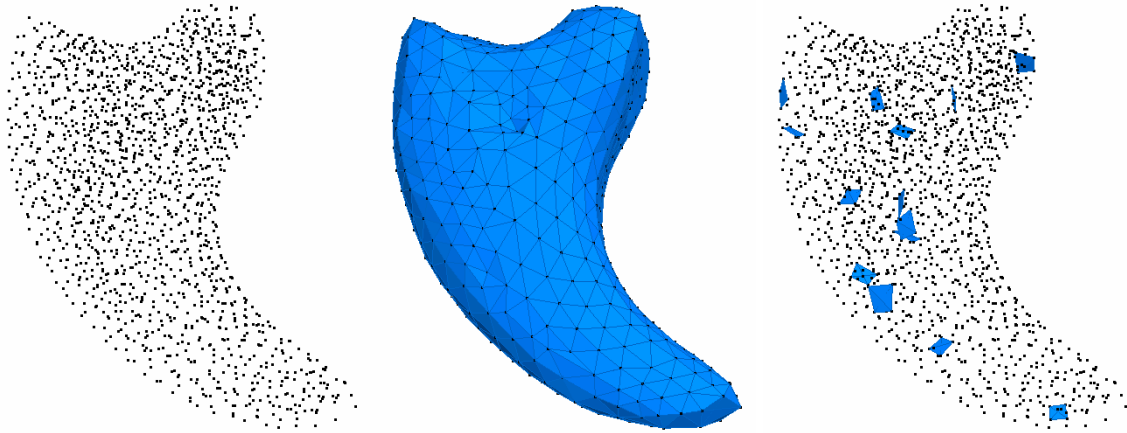


Figura 12: Triangulación de una malla de frontera de 1134 triángulos. Derecha: Sin remoción de slivers. Izquierda: con remoción de slivers.

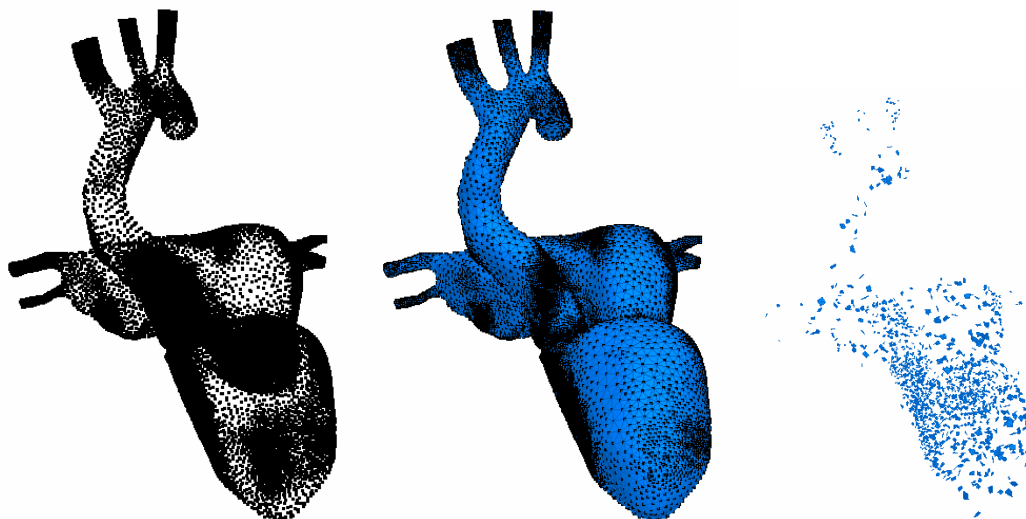


Figura 13: Triangulación de una malla de frontera de 54526 triángulos. Derecha: Sin remoción de slivers. Izquierda: con remoción de slivers.

Puede observarse la inmensa cantidad de slivers de frontera que presenta la malla del corazón. Estos ejemplos también fueron resueltos en forma automática y sin dificultades especiales.

## 6 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se han desarrollado algunas técnicas para la remoción de slivers generados por la Triangulación Delaunay de una nube de puntos dados y fijos.

Luego de aplicarle a las mallas estas técnicas desarrolladas se eliminaron todos los slivers, transformándolas en aptas para su utilización en el Método de Elementos Finitos.

## 7 TRABAJOS FUTUROS

A partir de los desarrollos aquí mostrados, puede seguirse el camino por algunas líneas de

investigación, tales como la implementación de flips para la resolución de casos especiales y para recuperar la frontera impuesta en el proceso conocido como Constrained Delaunay Triangulation.

## REFERENCIAS

- Calvo, N., *Generación de mallas tridimensionales por métodos duales*. Tesis doctoral, Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, 2005.
- George, P. L., Borouchaki H., *Back to edge flips in 3 dimensions*. 12 International Meshing Roundtable, New Mexico, USA, 2003.