

ELEMENTO FINITO ISOPARAMETRICO DE PLACA PARA CONTINUOS MICROPOLARES COSSERAT

Gutiérrez, Sergio E. *, Etse, Guillermo *

*Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería (CEMNCI)
Departamento de Construcciones y Obras Civiles
Universidad Nacional de Tucumán
Av. Roca 1800 – 4000 Tucumán.
e-mail: sgutierrez@herrera.unt.edu.ar

Key words: Elementos Finitos, Placas, Teoría micropolar, Cosserat.

Resumen.

En el presente trabajo se desarrolla un elemento finito isoparamétrico de placa basado en la teoría micropolar de Cosserat con el objetivo de incorporar a la teoría clásica de placas los campos cinemáticos y tensionales extendidos que caracterizan a los continuos micropolares. En este sentido se adicionan a la formulación clásica de Boltzmann tanto rotaciones micropolares como momentos tensionales.

Se logra así una formulación más general de elementos finitos de placas que presenta similitudes con la teoría de Reissner-Mindlin.

Luego de una discusión de la formulación matemática del elemento finito micropolar para placas, el trabajo se centra en el análisis numérico de sus predicciones mediante la consideración de métodos de integración reducida selectiva y mixta y en la comparación de éstas con soluciones analíticas de problemas diversos.

La formulación micropolar de placas propuesta ofrece un gran potencial para el análisis de problema de flexión que involucran campos no constantes de microgiros en el espesor de la placa en el marco de consideraciones multicapas, la cual es el próximo objetivo de la presente investigación.

1 INTRODUCCIÓN

Las ventajas de la mecánica de continuos Cosserat^{1,2} en el análisis de soluciones de problemas de placas devienen de los grados de libertad adicionales que incluye microgiros y microrotaciones, las cuales permiten resolver las ecuaciones débiles de equilibrio sin necesidad del planteo de funciones de continuidad C_1 . Análisis anteriores realizados por los autores^{3,4} han permitido visualizar claramente los efectos de los continuos Cosserat en la teoría de placas.

En la formulación de elementos finitos de placas se adiciona a las deformaciones del continuo clásico tridimensional de Boltzmann tanto rotaciones micropolares como momentos tensionales que involucran rigideces y grados de libertad adicionales a nivel local.

En el presente trabajo se desarrolla un elemento finito isoparamétrico de placa para continuos micropolares de Cosserat. Teniendo en cuenta las particularidades introducidas por el modelo micropolar se estudia el comportamiento y convergencia de este elemento finito en base a resultados existentes en la literatura para diferentes ejemplos con distintos tipos de malla y métodos de integración reducida y mixta.

2 HIPÓTESIS DE LA TEORÍA GENERAL DE PLACAS PARA CONTINUO COSSERAT

Un punto general del sistema estructural se denota a través de un sistema rectangular de Coordenadas Cartesianas (x_1, x_2, x_3) .

Se supone que las cargas actúan en forma normal a la superficie de la placa y que las deformaciones son pequeñas en comparación con el espesor de la misma.

Pueden enumerarse las siguientes hipótesis:

(a) En los puntos del plano medio se verifica que $u_1 = u_2 = 0$, es decir que los puntos del plano medio sólo se mueven verticalmente, no existiendo tampoco microgiros ω_3 con respecto al eje de coordenada x_3 .

(b) Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio tienen el mismo desplazamiento vertical u_3 .

(c) La tensión normal σ_{33} es despreciable. Lo que implica introducir las ecuaciones

$$\text{elásticas de tensión plana, resultando } \varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} \cdot (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

(d) Los puntos que antes de la deformación estaban sobre la normal al plano medio de la placa, permanecen al deformarse sobre una misma recta, sin que ésta tenga que ser necesariamente ortogonal a la deformada del plano medio.

En el continuo Cosserat, el campo de desplazamientos para un elemento flexional de placa se representa a través del desplazamiento u_3 y los giros micropolares ω_1 y ω_2 , ver figura 1. Se adopta como convención de signo para los mismos la regla de la mano derecha.

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = x_3 \cdot \omega_2(x_1, x_2) \quad (1)$$

$$u_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \cdot \omega_1(x_1, x_2) \quad (2)$$

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = u_3(x_1, x_2) \quad (3)$$

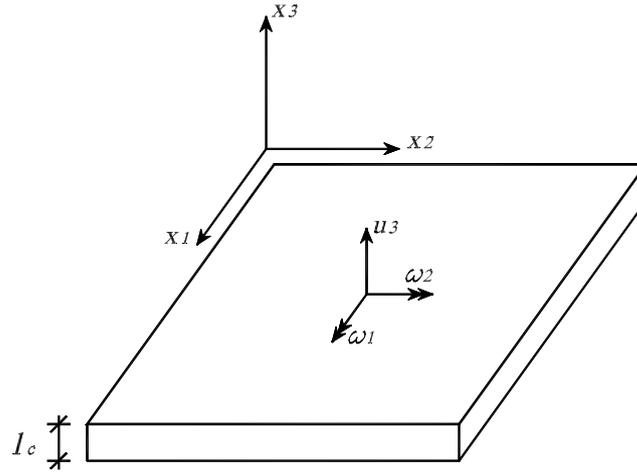


Figura 1: Elemento de Placa. Campo de Desplazamientos

2.1 Campo de Deformaciones de Flexión y Corte en placa

A partir de los tres grados de libertad u_3 , ω_1 y ω_2 y teniendo en cuenta la configuración de flexión de Cosserat³, se obtienen las siguientes componentes de deformaciones específicas y cortantes

$$\epsilon_{11} = u_{1,1} \quad \epsilon_{11} = x_3 \cdot \omega_{2,1}$$

$$\epsilon_{22} = u_{2,2} \quad \epsilon_{22} = -x_3 \cdot \omega_{1,2}$$

$$\epsilon_{33} = u_{3,3} \quad \epsilon_{33} = 0 \quad \text{de hipótesis (b).}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{2,1} + u_{1,2}) + \frac{1}{2}(u_{2,1} - u_{1,2}) - \omega_3 \quad \epsilon_{12} = -x_3 \cdot \omega_{1,1}$$

$$\epsilon_{21} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) + \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}) + \omega_3 \quad \epsilon_{21} = x_3 \cdot \omega_{2,2}$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{3,1} + u_{1,3}) + \frac{1}{2}(u_{3,1} - u_{1,3}) + \omega_2 \quad \epsilon_{13} = u_{3,1} + \omega_2$$

$$\epsilon_{31} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) + \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1}) - \omega_2 \quad \epsilon_{31} = 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}(u_{3,2} + u_{2,3}) + \frac{1}{2}(u_{3,2} - u_{2,3}) - \omega_1 & \varepsilon_{23} &= u_{3,2} - \omega_1 \\ \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) + \frac{1}{2}(u_{2,3} - u_{3,2}) + \omega_1 & \varepsilon_{32} &= 0 \end{aligned} \quad \text{ecs.(4)}$$

además, deben considerarse las curvaturas procedentes del gradiente de giros (figura 2)

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \omega_{1,1} & \kappa_{12} &= \omega_{2,1} & \kappa_{13} &= \omega_{3,1} = 0 \text{ de hipótesis (a)} \\ \kappa_{21} &= \omega_{1,2} & \kappa_{22} &= \omega_{2,2} & \kappa_{23} &= \omega_{3,2} = 0 \text{ de hipótesis (a)} \\ \kappa_{31} &= \omega_{1,3} = 0 & \kappa_{32} &= \omega_{2,3} = 0 & \kappa_{33} &= 0 \\ \text{de hipótesis (d)} & & \text{de hipótesis (d)} & & \text{de hipótesis (a)} & \end{aligned} \quad \text{ecs.(5)}$$

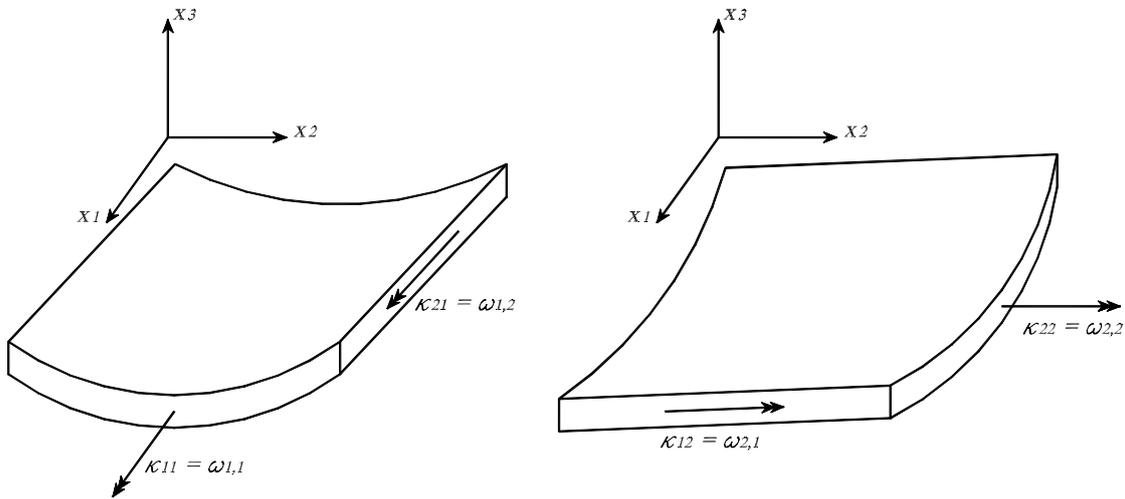


Figura 2: Curvaturas Dirección x_1 y Dirección x_2

Al considerar el plano medio de la placa $x_3 = 0$ el análisis del campo de deformaciones se reduce al siguiente vector

$$\bar{\varepsilon}^t = [\varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{23} \quad \kappa_{11} \quad \kappa_{12} \quad \kappa_{21} \quad \kappa_{22}] \quad (6)$$

2.2 Ecuaciones Constitutivas - Formulación Matricial

Las ecuaciones constitutivas en el continuo Cosserat para el análisis de placas pueden expresarse matricialmente de la siguiente forma

$$\bar{\sigma} = E \cdot \bar{\varepsilon} \quad (7)$$

$$\text{con } E = \begin{bmatrix} E_\sigma & | & 0 \\ \hline 0 & | & E_\mu \end{bmatrix}$$

$$\text{donde } E_\sigma = \begin{bmatrix} G+G_c & 0 \\ G-G_c & 0 \\ 0 & G+G_c \\ 0 & G-G_c \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E_\mu = \frac{G \cdot l_c^2}{6 \cdot (1-\nu)} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & -\frac{1-\nu}{2} \\ 0 & 1 & -\nu & 0 \\ 0 & -\nu & 1 & 0 \\ -\frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

En forma desacoplada

$$\sigma = E_\sigma \cdot \varepsilon \quad \text{y} \quad \mu = E_\mu \cdot \kappa \quad (8)$$

con

- G Módulo de Corte
- ν Coeficiente de Poisson
- G_c Módulo de Corte de Cosserat^{1,2}
- l_c Longitud Característica^{1,2}

2.3 Campo de Tensiones y Momentos Tensionales

Al aplicar las ecuaciones constitutivas se obtiene el siguiente campo de tensiones para el plano medio de la placa $x_3 = 0$

$$\sigma_{11} = 0 \quad \sigma_{12} = 0$$

$$\sigma_{21} = 0 \quad \sigma_{22} = 0$$

$$\sigma_{23} = (G + G_c) \cdot (u_{3,2} - \omega_1)$$

$$\sigma_{32} = (G - G_c) \cdot (u_{3,2} - \omega_1)$$

$$\sigma_{33} = 0$$

$$\sigma_{13} = (G + G_c) \cdot (u_{3,1} + \omega_2)$$

$$\sigma_{31} = (G - G_c) \cdot (u_{3,1} + \omega_2)$$

ecs.(9)

y el campo de momentos tensionales

$$\mu_{11} = \frac{G \cdot l_c^2}{12} \cdot (\omega_{1,1} - \omega_{2,2})$$

$$\mu_{12} = \frac{G \cdot l_c^2}{6 \cdot (1-\nu)} \cdot (\omega_{2,1} - \nu \cdot \omega_{1,2})$$

$$\mu_{21} = \frac{G \cdot l_c^2}{6 \cdot (1-\nu)} \cdot (\omega_{1,2} - \nu \cdot \omega_{2,1})$$

$$\mu_{22} = \frac{G \cdot l_c^2}{12} \cdot (\omega_{2,2} - \omega_{1,1})$$

$$\begin{aligned} \mu_{23} = 0 & & \mu_{32} = 0 \\ \mu_{13} = 0 & & \mu_{31} = 0 \end{aligned} \quad \text{ecs. (10)}$$

como

$$\mu_{33} = \frac{G \cdot l_c^2}{12} \cdot (-\omega_{1,1} - \omega_{2,2}) = 0 \quad \text{resulta} \quad \omega_{1,1} = -\omega_{2,2}$$

y puede concluirse que $\mu_{11} = \frac{G \cdot l_c^2}{6} \cdot \omega_{1,1} = -\mu_{22}$

Al aplicar la teoría de placas en el continuo Cosserat quedan cuatro tensiones, a saber:

$$\sigma_{23} \quad \sigma_{32} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{31} \quad (11)$$

y cuatro momentos tensionales

$$\mu_{11} \quad \mu_{12} \quad \mu_{21} \quad \mu_{22} \quad (12)$$

que pueden expresarse en forma vectorial de la siguiente manera:

$$\sigma' = [\sigma_{13} \quad \sigma_{31} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{32} \quad \mu_{11} \quad \mu_{12} \quad \mu_{21} \quad \mu_{22}] \quad (13)$$

2.4 Esfuerzos en el elemento de Placa

Al considerar en el elemento de placa del continuo Cosserat los campos anteriormente explicados, los esfuerzos de sección presentes en un elemento de placa resultan (figura 3):

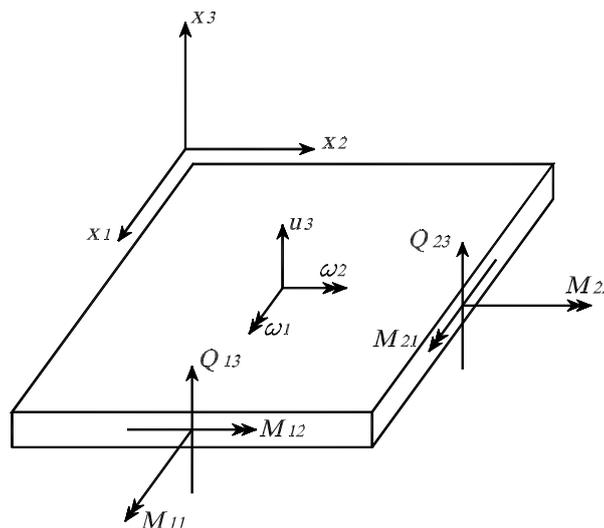


Figura 3: Esfuerzos en el Elemento de Placa

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \int_h \mu_{11} \cdot dx_3 & M_{22} &= \int_h \mu_{22} \cdot dx_3 \\
 M_{12} &= \int_h \mu_{12} \cdot dx_3 & M_{21} &= \int_h \mu_{21} \cdot dx_3
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{13} &= \int_h \sigma_{13} \cdot dx_3 & Q_{23} &= \int_h \sigma_{23} \cdot dx_3 \\
 Q_{31} &= \int_h \sigma_{31} \cdot dx_3 & Q_{32} &= \int_h \sigma_{32} \cdot dx_3
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Remplazando las expresiones de los momentos tensionales se tiene

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G \cdot l_c^2}{6} \cdot \omega_{1,1} \cdot dx_3 & M_{22} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G \cdot l_c^2}{6} \cdot \omega_{2,2} \cdot dx_3 \\
 M_{12} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G \cdot l_c^2}{6 \cdot (1-\nu)} \cdot (\omega_{2,1} - \nu \cdot \omega_{1,2}) \cdot dx_3 & M_{21} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{G \cdot l_c^2}{6 \cdot (1-\nu)} \cdot (\omega_{1,2} - \nu \cdot \omega_{2,1}) \cdot dx_3
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Al realizarse la operación de integración en el espesor de la placa se tiene en cuenta que los microgiros ω_1 y ω_2 son constantes en todos los puntos de la sección transversal, de acuerdo a la hipótesis de que las secciones se mantienen planas luego de la deformación.

Por lo tanto resulta

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \frac{G \cdot l_c^2 \cdot h}{6} \cdot \omega_{1,1} & M_{22} &= \frac{G \cdot l_c^2 \cdot h}{6} \cdot \omega_{2,2} \\
 M_{12} &= \frac{G \cdot l_c^2 \cdot h}{6 \cdot (1-\nu)} \cdot (\omega_{2,1} - \nu \cdot \omega_{1,2}) & M_{21} &= \frac{G \cdot l_c^2 \cdot h}{6 \cdot (1-\nu)} \cdot (\omega_{1,2} - \nu \cdot \omega_{2,1})
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

De las expresiones anteriores puede deducirse que los momentos están en función de la longitud característica l_c de Cosserat.

Para el caso en que se adopta $l_c = h$ se obtienen para los momentos las mismas expresiones de la Teoría de Placas de Reissner-Mindlin.

De idéntica manera pueden integrarse los valores correspondientes a los cortes, resultando:

$$\begin{aligned}
 Q_{13} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (G + G_c) \cdot (u_{3,1} + \omega_2) \cdot dx_3 = (G + G_c) \cdot h \cdot (u_{3,1} + \omega_2) \\
 Q_{31} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (G - G_c) \cdot (u_{3,1} + \omega_2) \cdot dx_3 = (G - G_c) \cdot h \cdot (u_{3,1} + \omega_2)
 \end{aligned}$$

$$Q_{23} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (G + G_c) \cdot (u_{3,2} - \omega_1) \cdot dx_3 = (G + G_c) \cdot h \cdot (u_{3,2} - \omega_1)$$

$$Q_{32} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (G - G_c) \cdot (u_{3,2} - \omega_1) \cdot dx_3 = (G - G_c) \cdot h \cdot (u_{3,2} - \omega_1) \quad \text{ecs. (18)}$$

Puede observarse que en este caso los esfuerzos cortantes dependen del módulo cortante de Cosserat G_c y a diferencia de los momentos flectores, son independientes de la longitud característica l_c de Cosserat.

3 FORMULACION CON ELEMENTOS FINITOS

El campo de desplazamientos y rotaciones del plano medio de la placa puede aproximarse a través de la siguiente serie

$$u = \begin{Bmatrix} u_3 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} \approx \sum_{k=1}^n \begin{Bmatrix} N_k \cdot u_{3k} \\ N_k \cdot \omega_{1k} \\ N_k \cdot \omega_{2k} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k \cdot u_k \quad (19)$$

donde u_{3k} desplazamiento vertical del plano medio de la placa en el nodo k .

ω_{1k} y ω_{2k} rotaciones en el nodo k .

N_k Función de forma.

Para obtener el campo de deformaciones es necesario obtener la matriz B de acuerdo a la formulación del continuo Cosserat en la teoría de placas.

$$\bar{\epsilon} \approx \sum_{k=1}^n B_k \cdot u_k \quad (20)$$

con

$$B_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 & N_k \\ \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & -N_k & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Puede expresarse en forma desacoplada $B_k = \begin{bmatrix} B_k^\epsilon \\ B_k^\kappa \end{bmatrix} \quad (22)$

$$\text{Con } B_k^\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 & N_k \\ \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & -N_k & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B_k^\kappa = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

entonces

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} \approx \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} B_k^\varepsilon \\ B_k^\kappa \end{bmatrix} \cdot u_k = \begin{bmatrix} B_1^\varepsilon & B_2^\varepsilon & \cdots & B_n^\varepsilon \\ B_1^\kappa & B_2^\kappa & \cdots & B_n^\kappa \end{bmatrix} \cdot u = \begin{bmatrix} B^\varepsilon \\ B^\kappa \end{bmatrix} \cdot u = B \cdot u \quad (24)$$

3.1 Funcional

Al considerarse teoría elástica lineal el funcional del potencial de energía puede plantearse considerándose las deformaciones específicas y las curvaturas micropolares en correspondencia con las tensiones y los momentos tensionales respectivamente

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \int \sigma \cdot \varepsilon \, dV \quad (25)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot u^t \cdot \left(\int B^t \cdot E \cdot B \, dV \right) \cdot u \quad (26)$$

en forma desacoplada

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \int (\sigma \cdot \varepsilon + \mu \cdot \kappa) \, dV \quad (27)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot u^t \cdot \left(\int \begin{bmatrix} B^\varepsilon & B^\kappa \end{bmatrix} \cdot E \cdot \begin{bmatrix} B^\varepsilon \\ B^\kappa \end{bmatrix} \, dV \right) \cdot u = \frac{1}{2} \cdot u^t \cdot \left[\int (B^{\varepsilon t} \cdot E_\sigma \cdot B^\varepsilon + B^{\kappa t} \cdot E_\mu \cdot B^\kappa) \, dV \right] \cdot u \quad (28)$$

Al minimizar el funcional con respecto a los parámetros indeterminados u , se obtiene la matriz de rigidez del elemento finito.

$$K = \int (B^{\varepsilon t} \cdot E_\sigma \cdot B^\varepsilon + B^{\kappa t} \cdot E_\mu \cdot B^\kappa) \, dV \quad (29)$$

que en forma desacoplada puede expresarse

$$K = K_\sigma + K_\mu = \int B^{\varepsilon t} \cdot E_\sigma \cdot B^\varepsilon \, dV + \int B^{\kappa t} \cdot E_\mu \cdot B^\kappa \, dV \quad (30)$$

con

- K_σ matriz de rigidez de corte
- K_μ matriz de rigidez de flexión

3.2 Elemento Finito Cuadrilátero

Se presenta un elemento de placa cuadrilátero isoparamétrico bilineal de 4 nodos.

El elemento utiliza las clásicas funciones de forma bilineales.

Las mismas funciones de forma son empleadas para interpolar la geometría y los desplazamientos.

La descripción del elemento puede observarse en la figura 4 siguiente

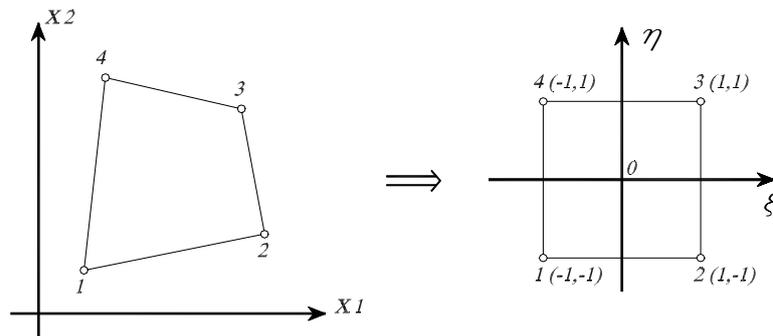


Figura 4: Elemento Finito Cuadrilátero Isoparamétrico

Los desplazamientos nodales considerados se corresponden con

u_{3k} desplazamiento vertical del plano medio de la placa en el nodo k .

ω_{1k} y ω_{2k} rotaciones en el nodo k .

Con $1 \leq k \leq 4$. Por lo tanto el elemento consta de 12 g.d.l.

Conjuntamente con las coordenadas cartesianas (x_1, x_2) se establecen las coordenadas naturales del sistema isoparamétrico (ξ, η) , con $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ para cada elemento.

El vector desplazamiento en cada elemento es evaluado según

$$u = \begin{Bmatrix} u_3 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} \approx \sum_{k=1}^4 \begin{Bmatrix} N_k(\xi, \eta) \cdot u_{3k} \\ N_k(\xi, \eta) \cdot \omega_{1k} \\ N_k(\xi, \eta) \cdot \omega_{2k} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

donde

$$N_1(\xi, \eta) = (1 - \xi) \cdot (1 - \eta) / 4$$

$$N_2(\xi, \eta) = (1 + \xi) \cdot (1 - \eta) / 4$$

$$N_3(\xi, \eta) = (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) / 4$$

$$N_4(\xi, \eta) = (1 - \xi) \cdot (1 + \eta) / 4$$

la matriz de rigidez del elemento finito puede escribirse como una integral sobre el dominio normalizado de las coordenadas naturales

$$K_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(B_i^{\varepsilon^t}(\xi, \eta) \cdot E_\sigma \cdot B_j^\varepsilon(\xi, \eta) + B_i^{\kappa^t}(\xi, \eta) \cdot E_\mu \cdot B_j^\kappa(\xi, \eta) \right) \cdot |J^e| h d\xi d\eta \quad (32)$$

que en forma desacoplada puede expresarse

$$K_{\sigma ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_i^{\varepsilon^t}(\xi, \eta) \cdot E_\sigma \cdot B_j^\varepsilon(\xi, \eta) \cdot |J^e| h d\xi d\eta \quad (33)$$

$$K_{\mu ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_i^{\kappa^t}(\xi, \eta) \cdot E_\mu \cdot B_j^\kappa(\xi, \eta) \cdot |J^e| h d\xi d\eta \quad (34)$$

De igual manera que en la formulación basada en la teoría de Reissner-Mindlin, la principal dificultad de la presente formulación surge como consecuencia de la presencia de un fenómeno de bloqueo por corte en la composición de la matriz de rigidez del elemento finito.

4 INTEGRACION REDUCIDA SELECTIVA

Mediante la formulación isoparamétrica pueden transformarse todas las integrales sobre el dominio del elemento a otras sobre el espacio de coordenadas naturales. Para el cálculo de dichas integrales puede hacerse uso de cualquiera de las cuadraturas de integración numérica.

Se define como integración completa cuando las matrices de rigidez de corte y de flexión son integradas exactamente. Por otra parte, si se mantiene la integración exacta para K_μ y sub-integra la matriz K_σ el proceso se denomina integración selectiva. Finalmente, si se sub-integran ambas matrices se denomina integración reducida.

Una usual forma de disminuir el fenómeno del bloqueo por corte surge al aplicarse la integración reducida selectiva sobre la matriz K_σ del elemento finito.

5 INTERPOLACIÓN MIXTA DE LAS COMPONENTES TENSORIALES (MITC)

Otra manera de superar el problema del bloqueo por corte consiste en formular la matriz de rigidez del elemento mediante diferentes interpolaciones para las componentes de flexión y corte.

Para la matriz K_μ se emplea la misma función de interpolación de desplazamientos, mientras que la matriz K_σ se procede a través de la interpolación lineal de las deformaciones tangenciales según se muestra en la figura 5.

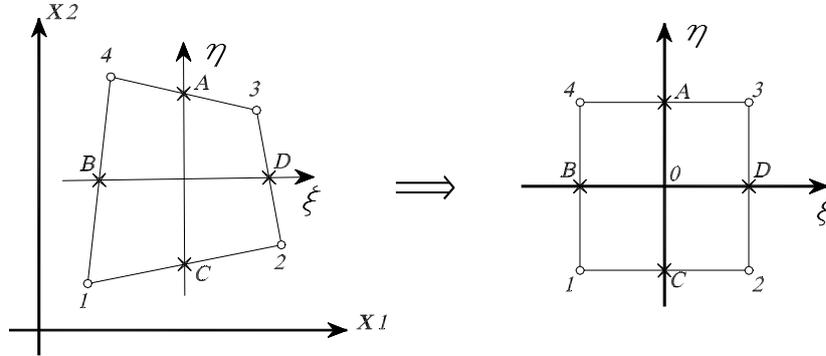


Figura 5: Interpolación lineal de las deformaciones tangenciales

$$\varepsilon_{\xi 3} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \eta) \cdot \varepsilon_{\xi 3}^A + \frac{1}{2} \cdot (1 - \eta) \cdot \varepsilon_{\xi 3}^C \quad (35)$$

$$\varepsilon_{\eta 3} = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi) \cdot \varepsilon_{\eta 3}^B + \frac{1}{2} \cdot (1 - \xi) \cdot \varepsilon_{\eta 3}^D \quad (36)$$

donde $\varepsilon_{\xi 3}^A$, $\varepsilon_{\xi 3}^C$, $\varepsilon_{\eta 3}^B$, $\varepsilon_{\eta 3}^D$ se corresponden con las deformaciones cortantes en los puntos A, B, C y D evaluadas haciendo uso de la interpolación de los desplazamientos y rotaciones nodales. Teniendo en cuenta el elemento isoparamétrico resulta:

$$\varepsilon_{\xi 3} = \frac{\sqrt{(C_x + \xi \cdot B_x)^2 + (C_y + \xi \cdot B_y)^2}}{8 \cdot \det J} \left\{ (1 + \eta) \cdot \left[\frac{w_1 - w_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{4} \cdot (\theta_y^1 + \theta_y^2) - \frac{y_1 - y_2}{4} \cdot (\theta_x^1 + \theta_x^2) \right] + (1 - \eta) \cdot \left[\frac{w_4 - w_3}{2} + \frac{x_4 - x_3}{4} \cdot (\theta_y^4 + \theta_y^3) - \frac{y_4 - y_3}{4} \cdot (\theta_x^4 + \theta_x^3) \right] \right\} \quad (37)$$

$$\varepsilon_{\xi 3} = \frac{\sqrt{(C_1 + \xi \cdot B_1)^2 + (C_2 + \xi \cdot B_2)^2}}{8 \cdot \det J} \left\{ (1 + \eta) \cdot \left[\frac{u_{33} - u_{34}}{2} + \frac{x_{13} - x_{14}}{4} \cdot (\omega_{23} + \omega_{24}) - \frac{x_{23} - x_{24}}{4} \cdot (\omega_{13} + \omega_{14}) \right] + (1 - \eta) \cdot \left[\frac{u_{32} - u_{31}}{2} + \frac{x_{12} - x_{11}}{4} \cdot (\omega_{22} + \omega_{21}) - \frac{x_{22} - x_{21}}{4} \cdot (\omega_{12} + \omega_{11}) \right] \right\} \quad (38)$$

con

$$A_1 = x_{13} - x_{14} - x_{11} + x_{12}$$

$$B_1 = x_{13} - x_{14} + x_{11} - x_{12}$$

$$C_1 = x_{13} + x_{14} - x_{11} - x_{12}$$

$$A_2 = x_{23} - x_{24} - x_{21} + x_{22}$$

$$B_2 = x_{23} - x_{24} + x_{21} - x_{22}$$

$$C_2 = x_{23} + x_{24} - x_{21} - x_{22}$$

6 EJEMPLOS

Para la verificación del comportamiento del elemento presentado se llevaron a cabo diversos ejemplos numéricos.

6.1 Ejemplo 1

Primeramente se consideró una placa cuadrada de 2x2 m de lados simplemente apoyada y empotrada en sus bordes. Con carga distribuida y carga puntual en el centro. Figura 6

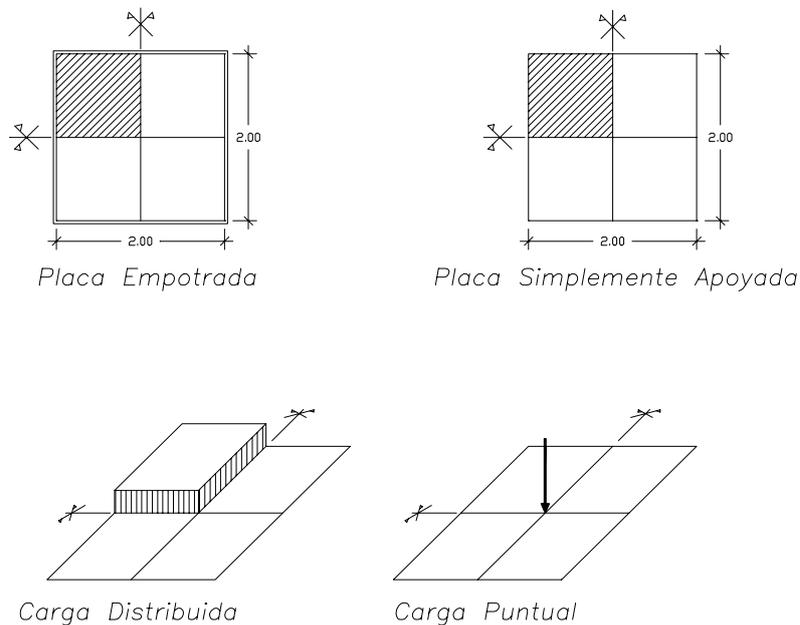


Figura 6: Ejemplo de Placa Cuadrada, simetría de forma y carga.

Teniendo en cuenta la simetría se analizó un cuadrante de esta placa con distintas mallas regulares de elementos finitos cuadrados, a saber: 2x2, 4x4, 8x8 y 16x16. Se estudió además el comportamiento para dos casos de mallas distorsionadas 4x4 (1) y 4x4 (2).

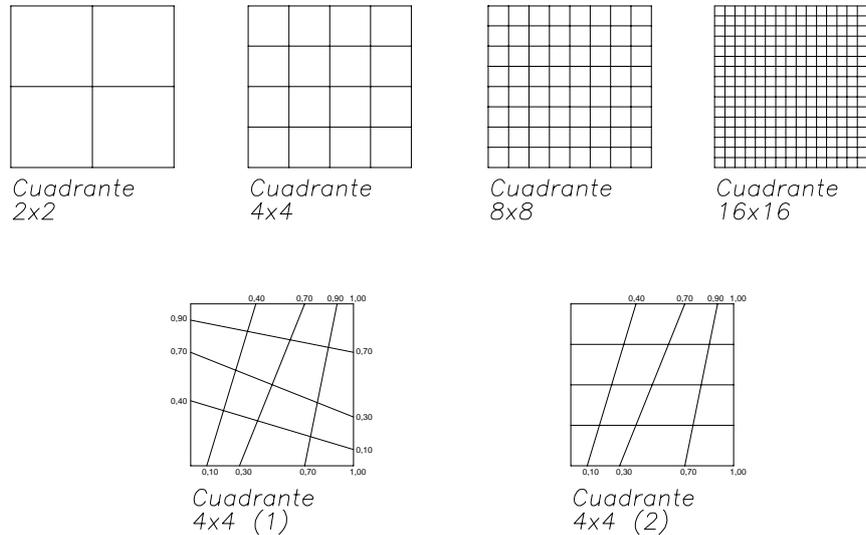


Figura 7: Mallas (n x n) para cuadrante de Placa Cuadrada

Los datos considerados son:

$$h = 0.10m , G = 6000MPa , \nu = 0.25 , G_c = 6000MPa , l_c = 0.10m$$

El valor analítico de la deformada en el centro de la placa⁵ es presentado en la tabla siguiente:

CARGA DISTRIBUIDA		CARGA PUNTUAL	
SIMPLEMENTE APOYADA	EMPOTRADA	SIMPLEMENTE APOYADA	EMPOTRADA
$w = 0.00416 \cdot \frac{q \cdot L^4}{D}$	$w = 0.00126 \cdot \frac{q \cdot L^4}{D}$	$w = 0.0116 \cdot \frac{P \cdot L^2}{D}$	$w = 0.0056 \cdot \frac{P \cdot L^2}{D}$

con

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = \frac{G \cdot h^3}{6 \cdot (1 - \nu)} \quad \text{rigidez flexional de la placa}$$

y

L : Lado de la Placa

Los valores de la deformada en el centro de la placa obtenidos a partir del elemento finito isoparamétrico de placa para continuos micropolares Cosserat son comparados con los

analíticos descritos anteriormente. En la tabla 1 se presenta la relación $R = \frac{W_{numérica}}{W_{analítica}}$ para el elemento finito analizado con integración reducida selectiva. Y en la tabla 2 la relación para el caso de interpolación mixta de las componentes tensoriales.

MALLA	CARGA DISTRIBUIDA (Q)		CARGA PUNTUAL (P)	
	SIMPLEMENTE APOYADA (SP)	EMPOTRADA (EMP)	SIMPLEMENTE APOYADA (SP)	EMPOTRADA (EMP)
2x2	0.960	0.986	1.011	0.908
4x4	0.977	1.018	1.020	1.023
8x8	0.981	1.026	1.029	1.064
16x16	0.982	1.028	1.036	1.085
4x4 (1)	0.958	0.991	1.000	1.001
4x4 (2)	0.944	1.001	0.996	1.040

Tabla 1: Valores obtenidos de R para Integración Reducida Selectiva (Placa Cuadrada)

MALLA	CARGA DISTRIBUIDA (Q)		CARGA PUNTUAL (P)	
	SIMPLEMENTE APOYADA (SP)	EMPOTRADA (EMP)	SIMPLEMENTE APOYADA (SP)	EMPOTRADA (EMP)
2x2	0.960	0.983	1.005	0.895
4x4	0.977	1.017	1.011	1.004
8x8	0.981	1.026	1.018	1.038
16x16	0.982	1.028	1.022	1.053
4x4 (1)	0.986	1.028	1.024	1.024
4x4 (2)	0.970	1.083	1.011	1.075

Tabla 2: Valores obtenidos de R para MITC (Placa Cuadrada)

De las tablas anteriores puede concluirse que para ambos casos de integración los resultados obtenidos son satisfactorios. Puede observarse que incluso para la malla simple de 2x2 y para los elementos distorsionados la relación R resulta próxima a la unidad.

Los valores de los momentos analíticos también fueron calculados para el caso de placa con carga distribuida:

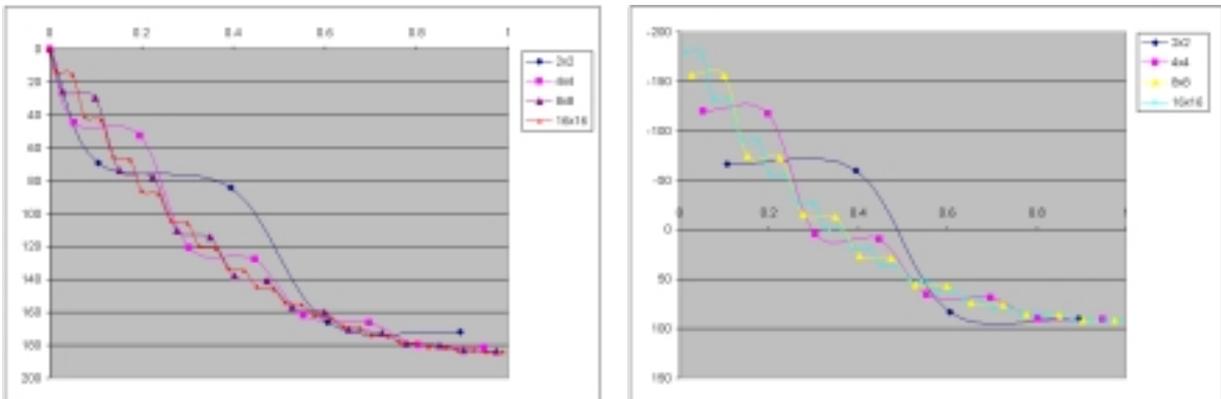
CARGA DISTRIBUIDA		
SIMPLEMENTE APOYADA	EMPOTRADA	
M_{max} en tramo	M (-) en apoyo	M (+) en tramo
$M_{max} = 0.0479 \cdot q \cdot L^2$	$M_{max}^{(-)} = -0.0513 \cdot q \cdot L^2$	$M_{max}^{(+)} = 0.0231 \cdot q \cdot L^2$

Haciendo uso del método de interpolación mixta de las componentes tensoriales se evaluaron los momentos en los puntos de gauss del elemento cuadrilátero isoparamétrico y en la tabla 3 se exponen los valores obtenidos para los puntos próximos al centro y borde de la placa para simplemente apoyada y empotrada respectivamente.

MALLA	CARGA DISTRIBUIDA		
	SIMPLEMENTE APOYADA	EMPOTRADA	
	M _{max} tramo	M (-) apoyo	M (+) tramo
2x2	0.0430	-0.0166	0.0224
4x4	0.0453	-0.0299	0.0228
8x8	0.0459	-0.0392	0.0229
16x16	0.0460	-0.0448	0.0229

Tabla 3: Valores obtenidos de Momentos / $q \cdot L^2$ (Placa Cuadrada)

Comparando estos valores con aquellos obtenidos analíticamente se aprecia una buena aproximación entre los momentos en el centro del tramo, mientras que para el caso del borde empotrado se observa una convergencia numérica en función de la densificación de la malla. En las figuras siguientes puede aclararse este concepto si se tiene en cuenta que para el caso 16x16 los puntos de gauss considerados en el elemento del borde se encuentran más próximos a este, y por lo tanto aproximan mejor el valor del momento de empotramiento.



Figuras 8: Diagramas de Momentos en los Puntos de Gauss para Placa Cuadrada Simplemente Apoyada y Empotrada, respectivamente, en función del $n \times n$.

6.2 Ejemplo 2

Seguidamente se consideró una placa circular de 2 m de diámetro simplemente apoyada y empotrada en sus bordes. Con carga distribuida y carga puntual en el centro. Figura 9

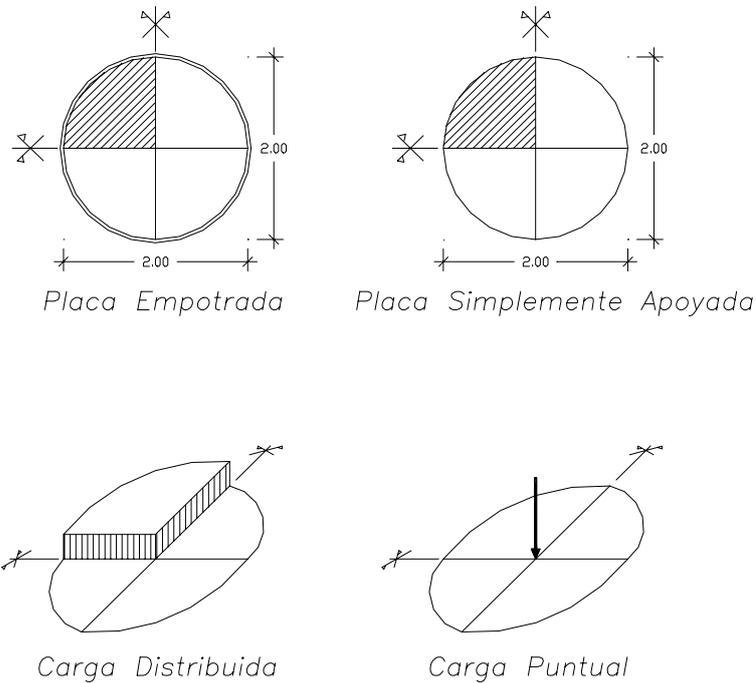


Figura 9: Ejemplo de Placa Circular, simetría de forma y carga.

Teniendo en cuenta la simetría se analizó un cuadrante de esta placa con distintas mallas regulares de elementos finitos cuadrados, a saber: 2x2, 4x4, 8x8 y 16x16.

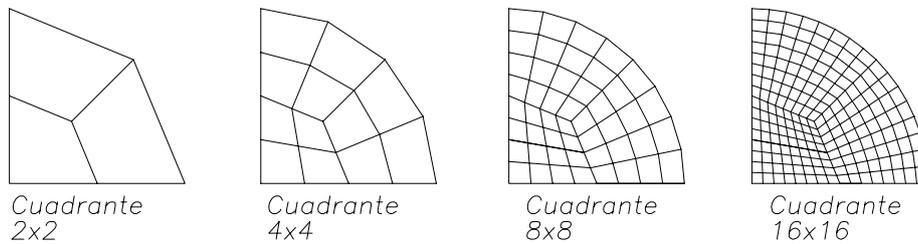


Figura 10: Mallas (n x n) para cuadrante de Placa Circular

El valor analítico de la deformada en el centro de la placa es presentado en la tabla siguiente:

CARGA DISTRIBUIDA		CARGA PUNTUAL	
SIMPLEMENTE APOYADA	EMPOTRADA	SIMPLEMENTE APOYADA	EMPOTRADA
$w = 0.065625 \cdot \frac{q \cdot a^4}{D}$	$w = 0.015625 \cdot \frac{q \cdot a^4}{D}$	$w = 0.051725 \cdot \frac{P \cdot a^2}{D}$	$w = 0.01989 \cdot \frac{P \cdot a^2}{D}$

Con a : Radio de la Placa

Los valores de la deformada en el centro de la placa obtenidos a partir del elemento finito isoparamétrico de placa para cotinuos micropolares Cosserat son comparados con los analíticos descritos anteriormente. En la tabla 4 se presenta la relación $R = \frac{W_{numérica}}{W_{analítica}}$ para el elemento finito analizado con integración reducida selectiva. Y en la tabla 5 la relación para el caso de interpolación mixta de las componentes tensoriales.

MALLA	CARGA DISTRIBUIDA (Q)		CARGA PUNTUAL (P)	
	SIMPLEMENTE APOYADA (SP)	EMPOTRADA (EMP)	SIMPLEMENTE APOYADA (SP)	EMPOTRADA (EMP)
2x2	0.776	0.877	1.025	0.957
4x4	0.937	0.974	1.000	1.014
8x8	0.988	1.010	1.021	1.059
16x16	1.001	1.018	1.031	1.082

Tabla 4: Valores obtenidos de R para Integración Reducida Selectiva (Placa Circular)

MALLA	CARGA DISTRIBUIDA (Q)		CARGA PUNTUAL (P)	
	SIMPLEMENTE APOYADA (SP)	EMPOTRADA (EMP)	SIMPLEMENTE APOYADA (SP)	EMPOTRADA (EMP)
2x2	0.921	0.953	1.003	0.826
4x4	0.986	1.018	1.013	0.991
8x8	1.002	1.026	1.017	1.034
16x16	1.005	1.027	1.021	1.051

Tabla 5: Valores obtenidos de R para MITC (Placa Circular)

De idéntica manera que en el ejemplo anterior puede apreciarse que para ambos casos de integración los resultados obtenidos son satisfactorios. No obstante la malla simple de 2x2 presenta una relación R muy disímil entre los distintos casos de carga de apoyo.

Los valores de los momentos también fueron calculados analíticamente para el caso de placa con carga distribuída:

CARGA DISTRIBUIDA		
SIMPLEMENTE APOYADA	EMPOTRADA	
M_{max} en tramo	$M (-)$ en apoyo	$M (+)$ en tramo
$M_{max} = 0.203125 \cdot q \cdot a^2$	$M_{r,max}^{(-)} = -0.125 \cdot q \cdot a^2$	$M_{r,max}^{(+)} = 0.078125 \cdot q \cdot a^2$

Se evaluaron los momentos en los puntos de gauss del elemento cuadrilátero isoparamétrico para el caso de interpolación mixta de las componentes tensoriales y en la tabla 6 se exponen los valores obtenidos para los puntos próximos al centro y borde de la placa para simplemente apoyada y empotrada respectivamente.

MALLA	CARGA DISTRIBUIDA		
	SIMPLEMENTE APOYADA	EMPOTRADA	
	M_{\max} tramo	M (-) apoyo	M (+) tramo
2x2	0.1865	-0.0533	0.0725
4x4	0.1999	-0.0820	0.0779
8x8	0.2022	-0.1020	0.0779
16x16	0.2028	-0.1132	0.0781

Tabla 6: Valores obtenidos de Momentos / $q \cdot a^2$ (Placa Cuadrada)

Para este caso de placa circular se observa también una aceptable aproximación de los momentos en el centro del tramo con aquellos obtenidos analíticamente. Asimismo para el borde empotrado se observa una convergencia numérica en función de la densificación de la malla, de acuerdo a lo ya explicado en el ejemplo anterior.

7 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se plantea la formulación de un elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de placa basado en la teoría micropolar de Cosserat. La misma se caracteriza por la presencia de campos cinemáticos enriquecidos por microgiros y microrotaciones, que permiten resolver las ecuaciones débiles de equilibrio sin necesidad del planteo de funciones de continuidad C_1 . Asimismo incluye campos tensionales enriquecidos por la presencia de momentos tensionales, lo que brinda formas alternativas de describir las rigideces de placas.

El mencionado elemento finito es analizado a través de dos métodos de integración: integración reducida selectiva e interpolación mixta de las componentes tensoriales.

El comportamiento de dicho elemento es expuesto a través de diversos ejemplos que demuestran un adecuado desempeño estructural para ambos casos de integración. No obstante es importante destacar que el método de integración reducida selectiva puede conducir a mecanismos de deformaciones internas que pueden resultar propagables en la malla y que invalidarían la solución en términos de deformaciones.

La formulación micropolar de elementos de placas propuesta permite tener en cuenta propiedades relevantes de la microestructura del material constitutivo de las placas en la respuesta de las mismas a nivel estructural, a través de la longitud característica y de los parámetros elásticos adicionales de la teoría de Cosserat. Esto significa una ventaja destacable habida cuenta del uso creciente de nuevos materiales en placas y cáscaras.

8 REFERENCIAS

- [1] Schaefer, H. “*Das Cosserat Kontinuum*”, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Heft 8, Band 47, 485-498, (1967).
- [2] Günther, W. “*Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums*”. Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 10, pag.195-213. (1958).
- [3] Gutiérrez, S.E.; Etse, G. “*Plate Finite Element Formulations Based on the Cosserat Micropolar Theory*”, ECCOMAS 2000, Barcelona, (2000).
- [4] Gutiérrez, S.E.; Etse, G. “*Teoría Micropolar para Elementos Finitos de Placa Multicapas*”, MECOM 2002, Santa Fe-Paraná, Argentina, (Oct. 2002).
- [5] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger. “*Theory of Plates and Shells*”, McGraw-Hill International Editions. (1959).